Математические заметки

Том 120 выпуск 6 декабрь 2026

УДК ???

Классы сложности аналитических функций и их касательные пространства

В. К. Белошапка

Получен ряд утверждений о непредставимости аналитических функций двух переменных суперпозициями функций одного переменного. Метод доказательства основан на описании касательных пространств к классам сложности и свойствах линейных суперпозиций.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: ?????????????.

DOI: https://doi.org/???

{s1}

1. Введение. Располагая некоторым набором объектов и операций над ними, мы можем строить новые объекты. Среди построенных объектов возникает иерархия; те, что были изначально, те, что возникли при первой итерации, и т.д. Данная индуктивная конструкция, за которой стоит интуиция натурального числа и счета, является в математике вездесущей [1]. Описанный индуктивный процесс понимается как построение из простого сложного. Этот взгляд на вещи побуждает нас ставить определенные вопросы. По отношению новому объекту мы спрашиваем: попал ли он в нашу иерархию, а если попал, то на каком шаге? К вопросам такого типа относятся классические вопросы о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, дифференциальных уравнений в элементарных функциях и т.д. Известный вопрос такого типа – это проблема Гильберта № 13 (см. [2]).

Как известно, зависимость корня уравнения 5-й степени от его коэффициентов не может быть, вообще говоря, выражена в радикалах. Однако достаточно в число разрешенных операций кроме арифметических операций и радикалов добавить некоторую конкретную алгебраическую функцию одного переменного, и это станет возможным. Аналогично для решения уравнения степени 6 надо добавить алгебраическую функцию двух переменных, а для 7-й степени – трех переменных. Гильберт, пропуская случай 6-й степени, задал вопрос о функции, которая решает уравнение 7-й степени: можно ли ее получить используя только функции двух переменных и их суперпозиции (подстановки)? Возможность использования арифметических действий и радикалов можно отдельно уже не оговаривать. При этом, конечно,

© В. К. Белошапка, 2026

необходимо уточнить, какие функции двух переменных разрешены для использования. Формулировка Гильберта была неожиданно широкой: все непрерывные функции. И, как показали Арнольд [3] и Колмогоров [4], любая непрерывная функция произвольного числа переменных $(x_1,\dots,x_n)$ на n-мерном кубе может быть представлена в виде суммы $(2n+1)$-го слагаемого вида $c(a_1(x_1)+\cdots+a_n(x_n))$, где $(a_1(t),\dots,a_n(t),c(t))$ – непрерывные функции одного переменного. Причем все внутренние функции a_j – фиксированы и не зависят от f. Специфику f учитывают только $2n+1$ из внешних функций c.

Если ограничиться случаем двух переменных, то теорема Колмогорова утверждает, что любая непрерывная на квадрате функция $f(x,y)$ может быть представлена в виде суммы пяти слагаемых вида $c_j(a_j(x)+b_j(y))$, $j=1,\dots,5$. В контексте этого результата рассмотрим следующую неубывающую последовательность классов функций: $\{\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^j\}$, $j=1,2,\dots$, где $\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^j$ – это непрерывные функции на квадрате, представимые в виде суммы j произвольных слагаемых вида $c(a(x)+b(y))$, где (a,b,c) – непрерывные функции. В работе [5] показано, что Kl^1 не содержит всех непрерывных функций на квадрате, а в работе [6] это доказано для $\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^4$. Итак,

$$\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^1\subseteq\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^2\subseteq\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^3\subseteq\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^4\subseteq\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^5=\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^6=\cdots,$$

т.е. последовательность стабилизируется, начиная с пятого члена.

Рассмотрим аналитический аналог последовательности $\{\mathrm{Kl}_{\mathrm{c}}^j\}$ – последовательность $\{\mathrm{Kl}^j\}$. Пусть Kl^1 – это класс аналитических функций двух переменных вида $z(x,y)=C(A(x)+B(y))$, где (A,B,C) – аналитические функции одного переменного. Соответственно, Kl^n – это функции, имеющие локальное представление вида

$$z(x,y)=C_1\big(A_1(x)+B_1(y)\big)+\cdots+C_n\big(A_n(x)+B_n(y)\big). \tag{1}$$ {eq1}

Ясно, что при росте n эта система классов не убывает.

Уместно погрузить рассмотрение этой последовательности в общий контекст (см. [7], [1]). Тогда в этой терминологии мы говорим о *схемах композиции*, *иерархиях классов*, *дифференциальных идеалах* и их образующих, а также о *сложности функции*.

Введенные выше классы – частный случай схем композиции и иерархии классов. Схемы вида (1) – это схемы глубины (композиции) один. Можно определять схемы S произвольного вида и глубины, зависящие от произвольного числа $l\geqslant 1$ независимых функциональных параметров $f=(f_1(u),\dots,f_l(u))$, где f_j – аналитические функции одного переменного. Каждой схеме соответствует свой класс $\mathrm{Cl}(S)$, образованный аналитическими функциями, имеющими локальное представление в рамках фиксированной схемы, т.е. $Z(x,y)=S(f)(x,y)$.

Также каждой схеме соответствует радикальный дифференциальный идеал $I(S)$ в кольце дифференциальных полиномов (дифференциальный идеал, совпадающий со своим радикалом). В соответствии с теоремой Ритта–Роденбаша (см. [8], [9]) такой радикал имеет конечную систему образующих. То есть набор дифференциальных полиномов с рациональными коэффициентами, аналитические решения которых – это функции из $\mathrm{Cl}(S)$. В частности, все классы состоят из дифференциально-алгебраических функций (аналитические решения дифференциальных полиномов с рациональными коэффициентами).

Пусть $\mathcal{M}$ – совокупность сходящихся степенных рядов от одного комплексного переменного без свободного члена, а $\mathcal{M}^3 = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ – прямая сумма. Аналитическая функция $Z_0(x, y)$ принадлежит Kl^1, если она в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) имеет локальное представление вида

$$Z_0(x, y) = z_0 + C_0\big(A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0)\big), \qquad m_0 = (A_0, B_0, C_0) \in \mathcal{M}^3.$$

Отметим, что из представления такого вида в окрестности некоторой точки следует существование такого представления в окрестности *почти любой* точки (дополнение к собственному аналитическому множеству).

Придадим функциональному параметру m_0 приращение, зависящее от малого одномерного параметра t, т.е. $m = m_0 + t\delta m + o(t)$, где $\delta m \in \mathcal{M}^3$. Касательное пространство к Kl^1 в точке $Z_0 = Z(m_0)$ – это

$$T\,\mathrm{Kl}^1_{Z(m_0)} = \left\{\delta z = \frac{d}{dt}(Z(m_0 + tm))\bigg|_{t=0}\right\},$$
$$Z(m)(x, y) = Z(m_0)(x, y) + t\delta z(x, y) + o(t).$$

То есть касательное пространство – это совокупность линейных приращений $Z(m)$. Ясно, что касательное пространство в любой точке – это линейное пространство. Подчеркнем, что мы варьируем аналитическую функцию $Z_0(x, y)$, имеющую локальное представление в виде степенного ряда так, что возмущенная функци $Z(x, y)$ – это функция того же самого вида и то же можно сказать про линейную часть приращения – функцию $\delta z(x, y)$.

На плоскости одного комплексного переменного u действует группа обратимых голоморфных преобразований $G = \{u \to \lambda u + o(u),\ \lambda \neq 0\}$, сохраняющих начало координат. Прямое произведение трех экземпляров этой группы $G \times G \times G = G^3$ действует на $\mathcal{M}^3$. Если $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$, то

$$(A(u), B(u), C(u)) \to (A^*(u) = g_1 \circ A(u),$$
$$B^*(u) = g_2 \circ B(u), \qquad C^*(u) = g_3 \circ C(u)).$$

И, соответственно, G^3 действует на элементы Kl^1 при фиксированных значениях (x_0, y_0, z_0):

$$S(A, B, C)(x, y) \to S(A^*, B^*, C^*)(x, y).$$

Если схема S зависит не от трех, а от l функциональных параметров, то имеет место действие G^l на $\mathcal{M}^l$, которое индуцирует действие G^l на $\mathrm{Cl}(S)$.

Нетрудно дать описание орбит действия G на $\mathcal{M}$. Действительно, любая функция $\varphi(u) \in \mathcal{M}$ с точностью до действия G – это либо u^k, $k = 1, 2, \ldots$, либо $\varphi(u) = 0$. Это позволяет описать орбиты действия G^l на $\mathcal{M}^l$. Откуда видно, что набор ростков функций, имеющих в начале координат нуль кратности один, – это единственная открытая плотная орбита. То есть $\mathcal{M}^l$ – почти однородное пространство. И всякая схема наследует эту почти однородность. Особые точки – это функции, допускающие представление с ростками кратности, отличной от единицы.

На совокупности схем имеются естественные операции. В частности, можно рассмотреть операцию сложения. Пусть имеется две схемы $S_1(m_1)$ и $S_2(m_2)$, где

$m_1 \in \mathcal{M}^{l_1}$, $m_2 \in \mathcal{M}^{l_2}$, т.е. m_1 и m_2 – независимые параметры. Тогда мы можем определить новую схему $S(m) = S_1(m_1) + S_2(m_2)$, где $m = (m_1, m_2) \in \mathcal{M}^{(l_1+l_2)}$. Сформулируем вполне очевидное утверждение. {p1}

Предложение 1. *Имеет место равенство*

$$T_{S(m)}\,\mathrm{Cl}(S) = T_{S_1(m_1)}\,\mathrm{Cl}(S_1) + T_{S_2(m_2)}\,\mathrm{Cl}(S_2),$$

т.е. касательное пространство к сумме – это сумма касательных пространств.

Отметим, что эта сумма линейных пространств не обязана являться прямой; слагаемые могут иметь ненулевое пересечение. {s2}

2. Отсутствие стабилизации в иерархии Kl**.** Зафиксируем значения функциональных параметров $m_0 = (A(x), B(y), C(u))$ и рассмотрим касательное пространство $T_{Z(m_0)}\,\mathrm{Kl}^1$. {p2}

Предложение 2. *Функция $\delta z \in T_{Z(m_0)}\,\mathrm{Kl}^1$ в том и только том случае, если*

$$\delta z = C'\big(A(x)+B(y)\big)\big(a(x)+b(y)\big) + c\big(A(x)+B(y)\big) \tag{2}$$ {eq2}

для некоторых $(a(x), b(y), c(u))$.

Доказательство. Рассмотрим возмущение Dm в направлении (a, b, c), т.е.

$$m_t = \big(A(x) + ta(x),\, B(y) + tb(y),\, C(u) + tc(u); x_0, y_0, z_0\big).$$

Тогда $Z(m_t)(x, y) = Z_0(x, y) + t\delta z(x, y) + o(t)$. Вычисляя $\delta z(x, y)$, получаем наше утверждение.

‘

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Полагая $A(x) = \alpha \ln(x)$, $B(y) = \beta \ln(y)$, $C(u) = \gamma \exp(u)$, получаем $Z_0 = \gamma x^\alpha y^\beta$. Применяя предложение 2, получаем

$$\delta z = \gamma\big(a(x)+b(y)\big)x^\alpha y^\beta + c(x^\alpha y^\beta). \tag{3}$$ {eq3}

Положим

$$X_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad D_x = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad D_y = y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ясно, что ядро оператора $X_{(\alpha,\beta)}$ – это функции вида $c(x^\alpha y^\beta)$. Дадим дифференциальный критерий представимости функции $\delta z(x, y)$ в виде (3).

В дальнейшем для производных функции двух переменых мы используем индексные обозначения, т.е. вместо $z_{x^i y^j}$ мы пишем z_{ij}. {p3}

Предложение 3. *Имеют место следующие утверждения*:

(a) *критерием представимости функции $\delta z(x, y)$ в виде (3) является соотношение*

$$\begin{aligned} L_{(\alpha,\beta)}(z) = {} & -\alpha^2\beta y\delta z_{01} + \alpha^2 y^2\delta z_{02} + \alpha\beta^2 x\delta z_{10} - \alpha x y^2\delta z_{12} - \beta^2 x^2\delta z_{20} \\ & + \beta x^2 y\delta z_{21} + \delta z_{01}\alpha^2 y - \delta z_{11}\alpha y x - \beta^2 x\delta z_{10} + \beta x y\delta z_{11} = 0; \end{aligned}$$

(b) $L_{(\alpha,\beta)} = (D_x - \alpha)(D_y - \beta)(\beta D_x - \alpha D_y)$;

(c) *любые два оператора вида* $L_{(\alpha,\beta)}$ – *коммутируют*;
(d) $L_{(\alpha,\beta)}(x^\lambda y^\mu) = (\lambda-\alpha)(\mu-\beta)(\beta\lambda-\alpha\mu)x^\lambda y^\mu$.

Доказательство. Будем последовательно исключать функции (c, b, a) из соотношения (3). Применяя к этому равенству $X_{(\alpha,\beta)}$, исключаем $c(x^\alpha y^\beta)$. Выражая в полученном соотношении $b'(y)$ и дифференцируя по x, исключаем $b(y)$. Выражая в полученном соотношении $a''(x)$ и дифференцируя по y, исключаем $a(x)$ и получаем пункт (a). Выражая $L_{(\alpha,\beta)}$ через (D_x, D_y), получаем (b). Пункт (c) следует из того, что D_x и D_y – коммутируют, а L – полином с постоянными коэффициентами от (D_x, D_y). Пункт (d) проверяется прямой подстановкой. Предложение доказано.

Из предложений 2 и 3 можно получить {c4}

Следствие 4. *Пусть* $\delta z(x, y)$ – *элемент касательного пространства к* Kl^n *в точке* $Z_0(x, y) = \sum_{j=1}^n \gamma_j x^{\alpha_j} y^{\beta_j}$, *и пусть оператор* L – *это результат последовательного выполнения коммутирующих операторов* $L_{(\alpha_j,\beta_j)}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *тогда* $L(\delta z) = 0$.

Выражения, которые дают представление общего элемента касательного пространства к классу S в фиксированной точке $Z_0 = S(m_0))(x, y)$ – это тоже схемы композиции, но несколько более общего вида. Исходно мы строили схемы из свободных функциональных переменных и арифметических действий. Теперь мы позволяем в обычной схеме присваивать некоторым функциональным переменным фиксированные значения, т.е. значения фиксированных аналитических функции одного переменного. Отразим это в наших обозначениях. Мы будем писать $z = S(m, M)(x, y)$, имея в виду, что m – это группа свободных параметров, а M – это группа фиксированных параметров. Например, в схеме из предложения 2 набор свободных параметров m – это (a, b, c), а набор фиксированных параметров M – это (A, B, C). При переходе к такому более широкому классу схем утверждение, что всякая схема имеет определяющие уравнения в виде дифференциальных полиномов в дифференциальном кольце с независимыми переменными x и y, зависимой переменной z дифференцированиями по x и y над $\mathbb{Q}$ нуждается в следующей корректировке без изменения доказательств. Определяющие уравнения это теперь дифференциальные полиномы с коэффициентами в дифференциальном расширении, порожденном присоединением к $\mathbb{Q}$ элементов набора M. Для примера, описанного в предложении 3, это расширение $\mathbb{Q}$, порожденное присоединением координат векторов (α, β, γ).

Результаты, приведенные ниже, получены комбинированием двух соображений.

Первое соображение [10]. Пусть имеется схема S и $Z_0 = S(m_0)(x, y)$ для некоторого неособого значения m_0 и известно, что $\delta z(x, y)$ не принадлежит касательному пространству к $\mathrm{Cl}(S)$ в точке $Z_0 = S(m_0))(x, y)$. Тогда 1-мерная прямая вида $Z_t = Z_0 + t\delta z$ не может целиком содержаться в $\mathrm{Cl}(S)$.

У этого соображения имеется вариация. Пусть имеются две схемы композиции S' и S'' такие, что соответствующие классы имеют непустое пересечение и $W(x, y) \in \mathrm{Cl}(S') \cap \mathrm{Cl}(S'')$. Если $\mathrm{Cl}(S') \subseteq \mathrm{Cl}(S'')$, то касательное пространство к $\mathrm{Cl}(S')$ в точке W содержится в касательном пространстве к $\mathrm{Cl}(S'')$ в этой точке.

Поэтому если нам удастся предъявить вектор из первого пространства, не содержащийся во втором, то это означает, что $\mathrm{Cl}(S')$ не содержится в $\mathrm{Cl}(S'')$.

Второе соображение [11]. Из наличия у каждого класса, в частности у класса, определяющего касательное пространство, определяющей системы дифференциальных полиномов имеется следствие. Коль скоро прямая вида $Z_t = Z_0 + t\delta z$ целиком не содержится в $\mathrm{Cl}(S)$, то те значения параметра t, для которых $Z_t = Z_0 + t\delta z \in \mathrm{Cl}(S)$ принадлежат соответствующему алгебраическому расширению. И каждое значение $t = t_0$, не попавшее в это расширение поставляет пример функции, не содержащейся в $\mathrm{Cl}(S)$.

Это открывает возможность строить такие примеры на основе теоремы Линдемана–Вейерштрасса. Эта теорема утверждает, что если система комплексных констант $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ – *линейно* независима над $\mathbb{Q}$, то их экспоненты $(\exp(\alpha_1), \exp(\alpha_2), \dots)$ *алгебраически* независимы над $\mathbb{Q}$. Простейший пример такого набора – это последовательность квадратных корней из простых чисел.

Пусть p_n – это n-е простое число. Положим

$$Z_n(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \exp(-\sqrt{p_j}) x^j y^{j^2}.$$

Ясно, что $Z_n(x,y) \in \mathrm{Kl}^n$.

{t5}

Теорема 5. *Последовательность классов* Kl^n *является строго возрастающей, т.е.* $\mathrm{Kl}^{n+1} \neq \mathrm{Kl}^n$ *для всех* $n \geqslant 1$. *Более того,* $Z_{n+1}(x,y) \in \mathrm{Kl}^{n+1} \setminus \mathrm{Kl}^n$.

Доказательство. То, что $Z_{n+1}(x,y) \in \mathrm{Kl}_{n+1}$, вполне очевидно. Докажем, что $Z_{n+1}(x,y) \notin \mathrm{Kl}^n$. Рассмотрим касательное пространство к Kl^n в точке, соответствующей Z_n (с очевидным набором функциональных параметров), т.е.

$$A_j(x) = \alpha_j \ln(x), \qquad B_j(y) = \beta_j \ln(y), \qquad C_j(u) = \gamma_j \exp(u),$$
$$\text{где} \quad \alpha_j = j, \quad \beta_j = j^2, \quad \gamma_j = \exp(\sqrt{-p_j}).$$

В соответствии с предложениями 1 и 2 общий элемент касательного пространства – это сумма

$$\delta z = \delta z_1 + \dots + \delta z_n, \tag{4}$$

{eq4}

где δz_j имеет вид, описанный в предложении 2. Положим $L_j = L_{\alpha_j, \beta_j}$ из предложения 3. Последовательно применяя к (4) все операторы $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ и пользуясь тем, что они коммутируют, получаем, что условие $L(\delta z) = L_1 \circ L_2 \circ \dots \circ L_n(\delta z) = 0$ является необходимым для того, чтобы функция δz принадлежала касательному пространству. В соответствии с предложением 3 любой моном вида $x^\lambda y^\mu$ является собственным для оператора L, причем соответствующее собственное значение имеет вид

$$\prod_{j=1}^{n} (\beta_j - \mu)(\alpha_j - \lambda)(\beta_j \lambda - \mu \alpha_j) = \prod_{j=1}^{n} (j^2 - \mu)(j - \lambda)(j^2 \lambda - j\mu).$$

Откуда видно, что если положить $\lambda = (n+1)$, $\mu = (n+1)^2$, то получим величину, не равную нулю. Откуда следует, что прямая $Z = Z_n + t x^{n+1} y^{(n+1)^2}$ не может целиком

принадлежать Kl^n. Но Kl^n – это множество общих нулей системы дифференциальных полиномов, чьи коэффициенты принадлежат расширению поля рациональных чисел, порожденное присоединением $(\exp(-\sqrt{p_1}),\dots,\exp(-\sqrt{p_n}))$. Поэтому те значения параметра t, при которых $Z\in\mathrm{Kl}^n$ принадлежат этому расширению. В соответствии с теоремой Линдемана–Вейерштрасса [12] число $\gamma_{n+1}=\exp(-\sqrt{p_{(n+1)}})$ не принадлежит этому расширению (алгебраическая независимость). Таким образом,

$$Z_{n+1}=Z_n+\exp(-\sqrt{p_{(n+1)}})x^{(n+1)}y^{(n+1)^2}$$

не принадлежит Kl^n. Теорема доказана.

{s3}

3. Сравнение иерархий Kl **и** Cl**.** Наряду с системой классов аналитических функций от двух переменных Kl^n можно рассмотреть систему Cl^n. Эта система определяется следующим образом. При $n=1$ положим $\mathrm{Cl}^1=\mathrm{Kl}^1$. Далее, Cl^{n+1} – это аналитические функции, имеющие локальное представление вида $Z(x,y)=C(A_n(x,y)+B_n(x,y))$, где $A_n,B_n\in\mathrm{Cl}^n$, а $C(u)$ – аналитическая функция одного переменного. Система классов Cl^n так же, как и Kl^n, является бесконечно расширяющейся.

Пользуясь тем же методом, докажем, что $\mathrm{Cl}^2\not\subset\mathrm{Kl}^n$ при всех n.

{t6}

Теорема 6. (a) *При любом n класс* Cl^2 *не лежит в* Kl^n.
(b) *Более того*,

$$Z_n(x,y)=(x^2y+xy^2)^{(n-1)}+\pi\exp(x^2y+xy^2)\in\mathrm{Cl}^2\setminus\mathrm{Kl}^n\,.$$

Доказательство. Можем предполагать, что $n\geqslant 2$. Пусть $Z_0=(xy(x+y))^{n-1}$. Поскольку этот многочлен представим как сумма n мономов, он принадлежит Kl^n. С другой стороны, поскольку $(xy(x+y))\in\mathrm{Cl}^2$, то и любая функция от него, в частности, степень, тоже принадлежит Kl^n. Итак, $Z_0\in\mathrm{Kl}^n\cap\mathrm{Cl}^2$. Если предположить, что $\mathrm{Cl}^2\subseteq\mathrm{Kl}^n$ для некоторого n, то любой вектор, принадлежащий касательному пространству к Cl^2 в точке Z_0, должен содержаться в касательном пространстве к Kl^n.

Определим набор линейных операторов

$$L_j=L_{\alpha,\beta},\qquad\text{где}\quad\alpha=2(n-1)-j,\quad\beta=(n-1)+j,\quad j=0,1,2,\dots,n-1.$$

И определим оператор L как результат их последовательной композиции. Применяя следствие 4, получаем, что если δz принадлежит касательному пространству Kl^n в точке Z_0, то $L(\delta z)=0$.

Класс Cl^2 зависит от семи функциональных параметров. Схема имеет вид:

$$Z=K\big(C(A(x)+B(y))+R(P(x)+Q(y))\big).$$

Для того чтобы получить Z_0, достаточно положить

$$A_0(x)=2\ln(x),\qquad B_0(y)=\ln(y),\qquad C_0(u)=\exp(u),$$
$$P_0(x)=\ln(x),\qquad Q_0(y)=2\ln(y),\qquad R_0(u)=\exp(u),\qquad K_0(u)=u^{(n-1)}.$$

Возмутим только последнюю координату $K(u) = K_0(u) + tk(u) + o(t)$. В результате получаем вектор, касательный к Cl^2 в Z_0 вида $\delta z = k(x^2y + xy^2)$. Предположим, что $\mathrm{Cl}^2 \subseteq \mathrm{Kl}^n$ и возьмем в качестве $k(u)$ функцию $\exp(u)$; получим, что $L(\exp(xy(x + y))) = 0$. Все мономы $x^p y^q$ являются собственными функциями для L. Степенное разложение $\exp(xy(x + y))$ содержит однородные компоненты вида $(xy(x + y))^{2N}$, а эти компоненты содержат мономы вида $x^{(4N-5)}y^{(2N-1)}$, $N \geqslant 0$, с ненулевыми коэффициентами. Поэтому из $L(\exp(xy(x+y))) = 0$ следует, что $L(x^{4N-5}y^{2N-1}) = 0$ при всех $N \geqslant 0$. Однако для оператора $L_{\alpha\beta}$ собственное число, соответствующее указанному моному, это

$$3(2Nj - 2j - n + 1)(2N - n - j)(4N - 3 - 2n + j).$$

Таким образом, собственное число для L – это величина

$$3^n \prod_{j=0}^{n-1} (2Nj - 2j - n + 1)(2N - n - j)(4N - 3 - 2n + j),$$

которая при $N > n$ не обращается в нуль.

Это доказывает, что при любом n класс $\mathrm{Cl}^2 \not\subseteq \mathrm{Kl}^n$. Далее, повторяя рассуждение из доказательства теоремы 5, рассмотрим прямую $Z_t = Z_0 + t\exp(x^2y + xy^2)$. Эта прямая не содержится в Kl^n. Этот класс имеет определяющие уравнения, которые являются дифференциальными полиномами с рациональными коэффициентами. Поэтому те значения t, для которых $Z_t \in \mathrm{Kl}^n$, – это элементы алгебраического замыкания поля рациональных чисел (алгебраические числа). Поэтому для любого не алгебраического значения t, в частности, для $t = \pi$, функция $Z_t(x, y) \notin \mathrm{Kl}^n$. Теорема доказана.

Теорема 5 побуждает нас рассмотреть функцию

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\sqrt{p_n})x^n y^{n^2}.$$

Эта аналитическая функция является решением уравнения $D_y f = (D_x)^2 f$ (аналог уравнения теплопроводности в фуксовых производных D_x, D_y). Если повторить для этой функции рассуждение из работы [11], то можно показать, что эта функция не принадлежит не только $\mathrm{Kl} = \bigcup_1^\infty \mathrm{Kl}^n$, но и гораздо большему классу $\mathrm{Cl} = \bigcup_0^\infty \mathrm{Cl}^n$.

Пусть $E(s)$ – это целая часть вещественного числа s.

{p7}

Предложение 7. *Имеют место вложения*:
(a) $\mathrm{Kl}^m \subset \mathrm{Cl}^n$, *где* $n = E(\log_2(m)) + 1$;
(b) $\mathrm{Kl} \subset \mathrm{Cl}$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Kl}^1 = \mathrm{Cl}^1$, ясно, что $\mathrm{Kl}^2 \subset \mathrm{Cl}^2$; далее $\mathrm{Kl}^3 \subset \mathrm{Kl}^4 \subset \mathrm{Cl}^3$ и т.д. Соответственно, если $m \leqslant 2^n$, то $\mathrm{Kl}^m \subset \mathrm{Cl}^n$, и мы получаем (a), откуда сразу следует (b). Предложение доказано.

{p8}

Предложение 8. *Пусть имеется последовательность схем композиции* $\{S_n\}$ *такая, что последовательность классов не убывает, т.е.* $\mathrm{Cl}(S_n) \subset \mathrm{Cl}(S_{n+1})$; *пусть*

$f(x,y,t)$ голоморфна в $B^3=\{|x-a|<r_1,\ |y-b|<r_2,\ |t-c|<r\}$, причем для любого n в круге $B=\{|t-c|<r\}$ найдется точка t_n такая, что $f(x,y,t_n)\notin \mathrm{Cl}(S_n)$. Тогда в круге B найдется точка T такая, что $f(x,y,T)\notin \mathrm{Cl}(S_n)$ для всех n.

Доказательство. Пусть P_n – набор дифференциальных полиномов, определяющих $\mathrm{Cl}(S_n)$. По условию в наборе P_n есть полином p_n такой, что $p_n(f(x,y,t_n))$ – это функция, голоморфная в бидиске $\{|x-a|<r_1,\ |y-b|<r_2\}$ и не равная там тождественному нулю. Следовательно, N_n – множество точек t круга B, для которых $p_n(f(x,y,t))$ есть тождественный нуль, дискретно и не более чем счетно. Поэтому $N=\bigcup N_n$ также не более чем счетно. Таким образом, $B\setminus N$ непусто (диск минус счетное множество). И если T – точка из дополнения, то $f(x,y,T)\notin \mathrm{Cl}(S_n)$ для всех n. Предложение доказано.

Воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа [13] для вспомогательной комплексной переменной t (переменная ζ – параметр). Положим

$$g(\zeta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta^{n-1}+\pi\exp(\zeta))}{2^n}\,\frac{\sin(t-\pi n)}{(t-\pi n)}.$$

Если $|\zeta|<1$, то $g(\zeta,t)$ голоморфна по обеим переменным в произведении круга на плоскость. Причем $g(\zeta,n)=(\zeta^{n-1}+\pi\exp(\zeta))$. Возьмем в качестве $f(x,y,t)$ функцию $g(\zeta,t)$, где $\zeta=xy(x+y)$. Если $|x|\leqslant 1/4$, $|y|\leqslant 1/4$, то $|\zeta|\leqslant 1/8$, $|\zeta^{n-1}+\pi\exp(\zeta)|\leqslant 5$ при всех n. Итак, $f(x,y,n)$ – это функции, пропорциональные функциям из теоремы 6.

Таким образом, мы выполнили условия предложения 8 и теперь из него получаем, что для почти любого комплексного числа T (вне счетного множества особых значений) функция $f(x,y,T)$ не принадлежит Kl. Ее принадлежность Cl^2 очевидна. Действительно, $\zeta(x,y)\in\mathrm{Cl}^2$, а $f=g(\zeta,t)$ и при фиксированном t тоже принадлежит Cl^2. Итак, получили следующий результат. {t9}

Теорема 9. *Для почти всех комплексных T (дополнение к счетному множеству) функция*

$$f(x,y,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(xy(x+y))^{n-1}+\pi\exp(xy(x+y))}{2^n}\right)\frac{\sin(T-\pi n)}{(T-\pi n)}$$

принадлежит $\mathrm{Cl}^2\setminus\mathrm{Kl}$.

Оба класса, как Kl, так и Cl, являются линейными пространствами над полем $\mathbb{C}$. Пространство полиномов от (x,y) – это собственное подпространство Kl, которое, в свою очередь, как показывает теорема 9, есть собственное подпространство Cl.

Отметим также, что δz – элемент касательного пространства к $\mathrm{Cl}(S)$ для произвольной схемы композиции S в точке – принадлежит некоторому специальному классу схем. Пример такого выражения дает предложение 2. Элемент δz касательного пространства к Cl^2 в точке $Z_0=x^\alpha y^\beta+x^\lambda y^\mu$ имеет вид

$$\begin{aligned}\delta z=&(a(x)+b(y))x^\alpha y^\beta+c(x^\alpha y^\beta)+(p(x)+q(y))x^\lambda y^\mu\\&+r(x^\lambda y^\mu)+s(x^\alpha y^\beta+x^\lambda y^\mu).\end{aligned}$$

Схемы суперпозиций такого вида называются *линейными*. Все свободные функциональные параметры входят в эти выражения линейно. Совокупность функций такого вида по этой причине образует линейное пространство. Непрерывным и гладким суперпозициям такого вида посвящена работа Витушкина и Хенкина [14]. Если оставаться в нашем контексте функций двух переменных, то в цитированной работе линейными суперпозициями называются схемы вида

$$z(x,y) = f_1(\varphi_1(x,y)) + \cdots + f_m(\varphi_m(x,y)),$$

где φ_j – это фиксированные функции двух переменных, а f_j – произвольные функции одного переменного (заданного класса). Будем называть схемы такого типа *линейными схемами*.

Пусть S – произвольная схема, $\mathrm{Cl}(S)$ соответствующий ей класс, $z_0(x,y) \in \mathrm{Cl}(S)$ – некоторая фиксированная функция, $T_{z_0}S$ – схема, представляющая касательное пространство к $\mathrm{Cl}(S)$ в точке z_0.

{p10}

Предложение 10. *Схема $T_{z_0}S$ – линейная.*

Отметим, что в этой линейной схеме внутренние функции φ_j однозначно определяются через z_0, а внешние f_j – это, по-существу, координаты касательного пространства.

{s4}

4. Заключение. Схемы – это функции от функциональных аргументов. Если такое выражение линейно, то в функциональном анализе это называется линейным функционалом. То есть можно сказать, что схема – это нелинейный функционал. В теории дифференциальных уравнений и в математической физике схемы используются, когда фиксируется априорный вид решения уравнения, и тогда это называется “анзац” (ansatz). Подобно функциям схемы обладают двойственной природой: схема как число и схема как отображение. Схемы как числа доступны арифметическим операциям. А схемы как отображения – операции суперпозиции. Соответственно, к оценке сложности схемы можно подходить по-разному. Первая: сложность – это глубина (число вложенных композиций). Вторая: сложность – это число арифметических операций.

Выше на основе Kl^1 мы определили Kl^n как n-кратную сумму $(\mathrm{Kl}^1 + \mathrm{Kl}^1 + \cdots + \mathrm{Kl}^1)$. Так выглядит произвольная схема глубины суперпозиции один, построенная с использованием сложения. При росте n глубина не меняется, оставаясь равной единице, а увеличивается лишь число сложений. Если бы мы взяли за основу Cl^2 и образовали его n-кратную сумму $\mathrm{Cl}^2 + \mathrm{Cl}^2 + \cdots + \mathrm{Cl}^2$, то получили бы общий вид схем глубины два, построенных на основе сложения. Тогда как для иерархии классов Cl^n глубина композиции равна в точности n и неограниченно возрастает.

Выше мы видели, как существенно меняется ситуация для иерархии Kl при переходе из непрерывной категории в аналитическую. Рассмотрим Cl_c – непрерывную версию рассмотренной выше иерархии Cl, состоящую из неубывающей последовательности классов Cl^n_c, которые определяются так же, как и классы Cl^n, с заменой аналитических функций на непрерывные. Нетрудно убедиться в том, что $\mathrm{Kl}^5_\mathrm{c} \subseteq \mathrm{Cl}^4_\mathrm{c}$. При этом в силу теоремы Колмогорова последовательность Kl^n_c стабилизируется,

поглощая все непрерывные функции, начиная с $\mathrm{Kl}^5_{\mathrm{c}}$. Таким образом последовательность Cl^n стабилизируется не позже $\mathrm{Cl}^4_{\mathrm{c}}$. К тому же известно [3], что $\mathrm{Cl}^1_{\mathrm{c}} = \mathrm{Kl}^1$ – это не все непрерывные функции; таким образом, $\mathrm{Cl}^1_{\mathrm{c}} \neq \mathrm{Cl}^4_{\mathrm{c}}$.

{q11}

Вопрос 11. На каком шаге стабилизируется последовательность $\{\mathrm{Cl}^n_{\mathrm{c}}\}$?

Имеется три варианта ответа: $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, но правильный ровно один.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. К. Белошапка, “Измерение сложности функций”, *Тр. ММО*, **85**:1 (2024), 13–25.

[2] А. Г. Витушкин, “13-я проблема Гильберта и смежные вопросы”, *УМН*, **59**:1(355) (2004), 11–24.

[3] В. И. Арнольд, “О функциях трех переменных”, *Докл. АН СССР*, **114**:4 (1957), 679–681.

[4] А. Н. Колмогоров, “О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения”, *Докл. АН СССР*, **114**:5 (1957), 953–956.

[5] В. И. Арнольд, “О представимости функций двух переменных в виде $\chi(\varphi(x)+\psi(y))$”, *УМН*, **12**:2(74) (1957), 119–121.

[6] R. Doss, “On the representation of the continuous functions of the two variables by means of the addition and continuous functions of one variable”, *Colloq/Math.*, **10** (1963), 249–259.

[7] V. K. Beloshapka, “Decomposition of functions of finite analytical complexity”, *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, **11**:6 (2018), 680–685.

[8] E. R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, NY, 1973.

[9] *Введение в дифференциальную алгебру*, ИЛ, М., 1959.

[10] В. К. Белошапка, “Геометрические конструкции в теории аналитической сложности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **88**:3 (2024), 3–11.

[11] М. А. Степанова, “Об аналитической сложности дифференциально-алгебраических функций”, *Матем. сб.*, **210**:12 (2019), 120–135.

[12] А. Б. Шидловский, *Диофантовы приближения и трансцендентные числа*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2007.

[13] Б. Я. Левин, *Целые функции*, Механико-математический факультет МГУ, М., 1977.

[14] А. Г. Витушкин, Г. М. Хенкин, “Линейные суперпозиции функций”, *УМН*, **22**:1(133) (1967), 77–124.

В. К. Белошапка
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной
математики
E-mail: vkb@strogino.ru

Поступило
27.03.2025
После доработки
03.10.2025
Принято к публикации
20.04.2026