Функциональный анализ и его приложения
2024, т. 58, вып. 4, с. 138–141

Подгруппы группы Кремоны ограниченной степени в CR-геометрии

Валерий Белошапка

Дается описание подгрупп равномерно ограниченной степени группы Кремоны произвольного ранга. Такие подгруппы естественно возникают в CR-геометрии как группы голоморфных автоморфизмов невырожденных однородных модельных поверхностей.

Гладкое вещественное подмногообразие M комплексного многообразия – основной объект изучения в CR-геометрии. Локальный анализ предшествует глобальному. С локальной точки зрения основной объект – росток M_p гладкого порождающего подмногообразия M в точке p. CR-тип ростка – это пара (n, k), где n – комплексная размерность комплексной касательной (величина n предполагается постоянной), k – коразмерность (вещественная). Более тонкая характеристика, которая определяется распределением комплексных касательных, – это тип по Блуму–Грэму [1]. Ростки подмногообразий рассматриваются с точностью до локально биголоморфного действия (отношение эквивалентности). С ростком инвариантно связана $\operatorname{aut} M_p$ – алгебра Ли векторных полей, порождающих локальные 1-параметрические подгруппы голоморфных автоморфизмов ростка M_p. Алгебра $\operatorname{aut} M_p$ является касательной алгеброй Ли псевдогруппы голоморфных преобразований ростка $\operatorname{Aut} M_p$. Размерность $\operatorname{aut} M_p$ может, вообще говоря, быть как конечной, так и бесконечной. С каждым ростком M_p можно связать его модельную поверхность Q, которая является вещественно-алгебраической [2]. Многие свойства ростка удобнее изучать по его модельной поверхности. В частности, размерность $\operatorname{Aut} Q$ мажорирует размерность $\operatorname{Aut} M_p$. Этим вызван интерес к модельным поверхностям и их автоморфизмам.

Пример 1. Если $k = 1$, то Q, модельная поверхность CR-типа $(n, 1)$, – это гиперквадрика, и замыкание $\operatorname{Aut} Q$ – это некоторая подгруппа в $\mathrm{PGL}(\mathbf{C}^{n+2})$ (С. Черн, Ю. Мозер [3], 1974).

Для типа $(n, 2)$, а также многих других CR-типов были построены матрично дробно-линейные представления $\operatorname{Aut} Q$ (В. Ежов, Г. Шмальц [4], 1998, [5], 2001).

2020 *Mathematics Subject Classification*: 32V40.

Ключевые слова: CR-геометрия, модельная поверхность, группа Кремоны.

DOI: https://doi.org/10.4213/faa4190

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00109, https://rscf.ru/project/23-21-00109/.

Пусть Q – модельная поверхность CR-типа (n,k), невырожденная (т.е. конечного типа по Блуму–Грэму и голоморфно невырожденная [6]) голоморфно однородная модельная поверхность в $\mathbf{C}^{n+k}$ [2]. Тогда псевдогруппа $\operatorname{Aut} Q$ ее голоморфных в окрестности начала координат автоморфизмов состоит из бирациональных преобразований объемлющего комплексного пространства, чьи степени равномерно ограничены некоторой постоянной d. Причем эта псевдогруппа транзитивно действует на всей поверхности Q. Отметим, что имеющаяся оценка степени имеет вид $\ln d \leqslant 3N \ln N + N \ln 2 + 4 \ln N$. Доказательство этого утверждения основано на приеме, который использовался в работе В. Каупа ([7], 1973) по автоморфизмам областей Зигеля. Первое применение этого приема в CR-геометрии принадлежит А. Туманову ([8], 1988), который доказал бирациональность и ограниченность степени для невырожденных квадратичных модельных поверхностей при $k \leqslant n^2$. Утверждение о бирациональности с равномерной оценкой степени выполняется в гораздо более общей ситуации, а именно для автоморфизмов произвольной голоморфно однородной невырожденной модельной поверхности ([9], 2021). В контексте этих результатов предпринимались попытки распространить упомянутые результаты Ежова и Шмальца на более общие ситуации (А. Исаев, В. Кауп [10], 2012).

Итак, для понимания строения групп голоморфных автоморфизмов модельных поверхностей особую значимость получает вопрос о строении подгрупп группы Кремоны ограниченной степени. В работе Д. Зайцева и А. Хаклберри ([11], 1995) было приведено описание таких групп вне контекста CR-геометрии, но при весьма сильных ограничениях, которые затрудняют его использование. Недавно К. Шрамов сообщил автору данной заметки, что, по существу, ответ на вопрос о строении таких подгрупп содержится в работе [12] (Ж. Блан, Ж.-Ф. Фётер, 2013). Приведем здесь этот результат.

Теорема 2. *Пусть G – подгруппа группы Кремоны* $\operatorname{Bir}(\mathbf{P}^N)$. *Следующие два условия эквивалентны.*

(1) *Группа G состоит из бирациональных преобразований, чьи степени равномерно ограничены, т.е.* $\exists\, d\colon \forall\, g \in G \ \deg g \leqslant d$.

(2) *Замыкание G – алгебраическая подгруппа группы* $\operatorname{Bir}(\mathbf{P}^N)$.

Доказательство. В следствии 2.8 работы [12] утверждается, что множество B_d бирациональных автоморфизмов, задаваемых многочленами степени не выше d, замкнуто в группе Кремоны (любого ранга). В частности, замыкание $\overline{G}$ любого подмножества G бирациональных автоморфизмов степени не выше d содержится в этом множестве, а значит, имеет структуру алгебраического многообразия (так как B_d само является алгебраическим многообразием). С другой стороны, если G – подгруппа, то и $\overline{G}$ – подгруппа. Таким образом, G содержится в алгебраической группе $\overline{G}$. То есть из условия (1) следует условие (2). Лемма 2.19 в [12] утверждает, что если φ – алгебраический гомоморфизм из алгебраической группы G в группу $\operatorname{Bir}(\mathbf{P}^N)$, то его образ $\varphi(G)$ имеет ограниченную степень. Таким образом, из условия (2) следует условие (1) и теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Отметим, что рассуждение из первой части доказательства теоремы 2 с той же ссылкой приведено также в [13] (Х. Урех, 2017) перед следствием 3.2.5 (но не оформлено как теорема). В работе [14] (Х. Урех, 2018, с. 2–3) написано, что трюк с замыканием впервые появился в статье [15] (Ж. Блан, 2008).

Из теоремы сразу следуют два утверждения.

Следствие 4. *Пусть Q – модельная поверхность в $\mathbf{C}^N$ конечного типа по Блуму–Грэму, голоморфно невырожденная и голоморфно однородная. Тогда замыкание $\operatorname{Aut} Q$ – это алгебраическая подгруппа в $\operatorname{Bir}(\mathbf{P}^N)$.*

Следствие 5. *Пусть M – связное гладкое локально голоморфно однородное подмногообразие комплексного многообразия X конечного типа по Блуму–Грэму. Пусть Q – модельная поверхность в произвольной точке $p \in M$, и пусть Q голоморфно невырождена. Тогда $G = \overline{\operatorname{Aut} Q}$ – алгебраическая группа.*

Доказательство. Модельная поверхность локально однородного многообразия однородна [2]. Теперь результат следует из следствия 4. □

В CR-геометрии имеется подход, идущий от Э. Картана, так называемый метод подвижного репера. В современной версии это геометрия G-структур, а также теория Н. Танаки с техникой градуированных алгебр Ли. Для реализации этого подхода необходима информация о структурной группе. Теорема 2 и ее следствия открывают широкие возможности для этого подхода. Алгебра $\operatorname{aut} Q$ состоит из полиномиальных векторных полей и допускает естественную структуру конечноградуированной алгебры Ли. При этом сама модельная поверхность Q допускает естественное отождествление с группой, порожденной полями отрицательного веса. В связи с этим можно утверждать, что если G, алгебраическая подгруппа $\operatorname{Bir}(\mathbf{P}^N)$, может быть реализована как группа автоморфизмов модельной поверхности, то $\dim G \geqslant 2N$. А ее подгруппа (стабилизатор), которая оставляет неподвижной фиксированную точку, получает представление в виде композиционного ряда [2].

Поэтому можно поставить следующий вопрос.

Вопрос 6. Какие алгебраические подгруппы $\operatorname{Bir}(\mathbf{P}^N)$ размерности не меньше чем $2\,N$ допускают реализацию в виде группы голоморфных автоморфизмов модельной поверхности?

Литература

[1] Th. Bloom, I. Graham, *On "type" conditions for generic real submanifolds of $\mathbb{C}^n$*, Invent. Math., **40**:3 (1977), 217–243.

[2] V. K. Beloshapka, CR-*manifolds of finite Bloom–Graham type*: *the model surface method*, Russ. J. Math. Phys., **27**:2 (2020), 155–174.

[3] S. S. Chern, J. K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifold*, Acta Math., **133**:3-4 (1974), 219–271.

[4] V. V. Ežov, G. Schmalz, *A matrix Poincaré formula for holomorphic automorphisms of quadrics of higher codimension. Real associative quadrics*, J. Geom. Anal., **8**:1 (1998), 27–41.

[5] V. V. Ežov, G. Schmalz, *Automorphisms of nondegenerate CR quadrics and Siegel domains. Explicit description*, J. Geom. Anal., **11**:3 (2001), 441–467.

[6] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild, *CR automorphisms of real analytic manifolds in complex space*, Comm. Anal. Geom., **6**:2 (1998), 291–315.

[7] W. Kaup, *Einige Bemerkungen über polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten*, Math. Ann., **204** (1973), 131–144.

[8] А. Е. Туманов, *Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **52**:3 (1988), 651–659; англ. пер.: A. E. Tumanov, *Finite-dimensionality of the group of CR automorphisms of a standard CR manifold, and proper holomorphic mappings of Siegel domains*, Math. USSR-Izv., **32**:3 (1989), 655–662.

[9] V. K. Beloshapka, *On the group of holomorphic automorphisms of a model surface*, Russ. J. Math. Phys., **28**:3 (2021), 275–283.

[10] A. Isaev, W. Kaup, *Regularization of local CR-automorphisms of real-analytic CR-manifolds*, J. Geom. Anal., **22**:1 (2012), 244–260.

[11] A. Huckleberry, D. Zaitsev, *Actions of groups of birationally extendible automorphisms*, in: *Geometric complex analysis* (Hayama, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, 261–285.

[12] J. Blanc, J.-P. Furter, *Topologies and structures of the Cremona groups*, Ann. of Math. (2), **178**:3 (2013), 1173–1198.

[13] Ch. Urech, *Subgroups of Cremona groups*, Ph.D. thesis, Univ. Rennes, Univ. Bale, Univ. Basel, 2017, 180 pp., https://theses.hal.science/tel-01687404.

[14] Ch. Urech, *Subgroups of elliptic elements of the Cremona group*, J. Reine Angew. Math., **2021**:770 (2021), 27–57.

[15] J. Blanc, *Sous-groupes algébriques du groupe de Cremona*, Transform. Groups, **14**:2 (2009), 249–285.

Валерий Константинович Белошапка
(Valerii K. Beloshapka)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: vkb@strogino.ru

Поступила в редакцию
15 декабря 2023 г.
После доработки
2 февраля 2024 г.
Принята к публикации
20 марта 2024 г.