Ассоциативность и дистрибутивность аналитических функций

В.К.Белошапка

29.02.2024

Аннотация

Доказано, что с точностью до естественной эквивалентности существует ровно пять локально ассоциативных аналитических функций двух переменных: $0,\ x,\ y,\ (x+y), xy$. Дано описание всех ассоциативных (нелокально) полиномов. Также описаны все дистрибутивные пары, где хотя бы одна из функций локально ассоциативна.

[1]

К голоморфной функции двух переменных $F(x,y)$ можно предъявлять требования, которые обычно предъявляются к бинарным алгебраическим операциям: коммутативность, ассоциативность. А если у нас имеется пара таких функций $F(x,y)$ и $G(x,y)$, то можно формулировать условие дистрибутивности (правой и левой). Что собой представляют коммутативные функции, т.е. функции с условием $F(y,x)=F(x,y)$, достаточно понятно. В данной работе будет рассмотрен вопрос об ассоциативных функциях и о дистрибутивных парах. Данная работа естественно примыкает к работе автора [1].

[1]Механико-математический факультет Московского университета им. М.В.Ломоносова, Воробьевы горы, 119991 Москва, Россия, vkb@strogino.ru.
Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ им. М.В.Ломоносова

Локальная ассоциативность

В последней части работы [1] было начато изучение голоморфных функций двух переменных $F(u,v)$, для которых в некоторой области 3-мерного комплексного пространства выполнено соотношение $F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z))$, т.е. функция F ассоциативна как бинарная операция. Для того чтобы выражения, участвующие в этом соотношении, были где-то определены, должна найтись такая точка (a,b,c), что если $p = F(a,b)$, а $q = F(b,c)$, то (p,c) и (a,q) попадают в область определения функции F. Так понимаемое свойство ассоциативности не является локальным. Рассмотрим сначала локальную версию этого вопроса. А именно, пусть $F(u,v)$ – функция двух переменных, голоморфная в окрестности начала координат, причем $F(0,0) = 0$. Тогда, как нетрудно видеть, мы можем положить $(a,b,c) = (0,0,0)$ и рассматривать условие ассоциативности как соотношение, которое тождественно выполнено в окрестности начала координат в $\mathbf{C}^3$.

Определение 1: Говорим, что F – *локально ассоциативна*, если

$$\begin{gathered} F \text{голоморфна в окрестности } (0,0), \quad F(0,0)=0 \ \text{ и} \\ F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z)) \quad \text{в окрестности точки } \ (0,0,0). \end{gathered} \tag{1}$$

Ассоциативные формальные степенные ряды играют важную роль в теории *формальных групп* [2], [3]. В этой теории рассматриваются степенные ряды, где переменные x и y, которые у нас одномерны, могут быть многомерными. Однако в этой теории кроме условий, которые присутствуют в определении 1, на F дополнительно накладываются условия $F(x,0) = x,\ F(0,y) = y$ (существование нейтрального элемента). С этой точки зрения наша работа направлена на то, чтобы выяснить, что находится за пределами этих условий. Наш объект – это аналитическая функция F, априори не претендующая на реализацию какой-либо алгебраической структуры. Отметим также, что все полученные в работе результаты без изменения переносятся в категорию формальных степенных рядов.

Рассмотрим группу $\mathcal{G}$ голоморфных преобразований вида

$$\mathcal{G} = \{u \to g(u) = \lambda\, u + o(u),\ \lambda \neq 0\}. \tag{2}$$

Эта группа действует на голоморфных функциях двух переменных в окрестности начала координат следующим образом:

$$F(x,y) \to M_g \circ F(x,y) = F_g(x,y) = g \circ F(x,y) = g^{-1} \circ F(g(x), g(y)). \quad (3)$$

Нетрудно убедиться, что имеет место утверждение:

Утверждение 2: Действие (3) сохраняет локальную ассоциативность. Т.е. F – локально ассоциативна тогда и только тогда, когда локально ассоциативна $M_g \circ F$.

Действие (3) вводит на ростках функций $F(x,y)$ в начале координат с условием $F(0,0)=0$ отношение эквивалентности. Отметим также, что если бы мы находились в контексте формальных групп, то преобразованию (3) соответствует гомоморфизм соответствующей формальной группы.

Функцию F можно представить в виде $F(x,y) = p(x) + y\,\varphi(x,y)$ или $F(x,y) = q(y) + x\,\psi(x,y)$, где $p(0) = q(0) = 0$.

Лемма 3: Если F – локально ассоциативна, то $p(x)$ – это либо x, либо 0. Аналогично $q(y)$ – это либо y, либо 0.
Доказательство: Подставим $F(x,y) = p(x) + y\,\varphi(x,y)$ в (1), получим

$$\begin{aligned} E = p\left(x\right) + \left(p\left(y\right) + zf\left(y,z\right)\right) f\left(x, p\left(y\right) + zf\left(y,z\right)\right) - \\ p\left(p\left(x\right) + yf\left(x,y\right)\right) - zf\left(p\left(x\right) + yf\left(x,y\right), z\right) = 0. \end{aligned}$$

Подставим в E значения y и z равными нулю, получим $p\left(x\right) = p\left(p\left(x\right)\right)$. Откуда следует утверждение относительно $p(x)$. Аналогично доказывается утверждение относительно $q(y)$.

Таким образом, локально ассоциативная функция F имеет одно из четырех представлений:

$$\begin{aligned} &(1) \quad F = x\,y\,f(x,y), \\ &(2) \quad F = x + x\,y\,f(x,y), \\ &(3) \quad F = y + x\,y\,f(x,y), \\ &(4) \quad F = x + y + x\,y\,f(x,y). \end{aligned}$$

Рассмотрим эти случаи.

Утверждение 4: Если F – локально ассоциативная, имеющая представление случая 2, то $F(x,y)=x$, а если случая 3, то $F(x,y)=y$.
Доказательство: Подставляя $F(x,y)=x+x\,y\,f(x,y)$ в (1) и полагая $y=0$, получаем $xzf\,(x,z)=0$. Аналогично для случая 3. Утверждение доказано.

Таким образом, в дальнейшем изучении нуждаются локально ассоциативные функции оставшихся двух типов:

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= x\,y\,f(x,y) && \text{(случай 1)},\\
F(x,y) &= x+y+x\,y\,f(x,y), && \text{(случай 4)}.
\end{aligned}
$$

Случай 1.

Пусть $F(x,y)=x\,y\,q(y)+x^2\,y\,\varphi(x,y)$. Ясно, что $y\,q(y)=F'_x(0,y)$. Пусть $(t\to g(t),\ g(0)=0,\ g'(0)\neq 0)$ – голоморфная замена в окрестности нуля и $\tilde{F}(x,y)=g^{-1}\circ F(g(x),g(y))=x\,y\,\tilde{q}(y)+x^2\,y\,\tilde{\varphi}(x,y)$. Тогда $y\,\tilde{q}(y)=\tilde{F}'_x(0,y)=g(y)\,q(g(y))$. Если $q(y)$ не есть тождественный ноль (случай 1.1), то можно подобрать g так, что $\tilde{q}(y)=y^k,\ k\geq 0$, т.е. теперь $F(x,y)=x\,y^{k+1}+x^2\,y\,f(x,y)$. Если при этом $f=0$, то, как показывает непосредственная проверка, для ассоциативности F необходимо и достаточно $k=0$. В таком случае $F=x\,y$ (случай 1.1.1.). Пусть в $f\neq 0$ (случай 1.1.2).

Подставим F в (1), сократим на xyz и положим $x=0$, получим

$$
f\,(y,z)\left(yz\left(z^k+yf\,(y,z)\right)\right)^k y - z^k y^k + z^k\left(yz\left(z^k+yf\,(y,z)\right)\right)^k = 0. \quad (4)
$$

Пусть $m=\operatorname{ord}(f)$ – порядок f в $(0,0)$, т.е. $f_m(x,y)$ – младшая ненулевая однородная компонента разложения f в сумму однородных слагаемых. Рассмотрим порядки в нуле всех трех слагаемых, входящих в (4). Каждое слагаемое отлично от нуля, поэтому равенство всех трех порядков необходимо для выполнения (4).

Пусть $k\leq m+1$, тогда

$$
\operatorname{ord}\Big(f\,(y,z)\left(yz\left(z^k+yf\,(y,z)\right)\right)^k y\Big)=(m+1)+(k+2)\,k,
$$
$$
\operatorname{ord}\left(z^k y^k\right)=2\,k,\quad \operatorname{ord}\Big(z^k\left(yz\left(z^k+yf\,(y,z)\right)\right)^k\Big)=(k+2)\,k+k.
$$

Если $k > m+1$, то порядки имеют вид

$$\operatorname{ord}\left(f\left(y,z\right)\left(yz\left(z^k+yf\left(y,z\right)\right)\right)^k y\right)=\left(m+1\right)k+2\,k+m+1,$$
$$\operatorname{ord}\left(z^k y^k\right)=2\,k,\quad \operatorname{ord}\left(z^k\left(yz\left(z^k+yf\left(y,z\right)\right)\right)^k\right)=\left(m+3\right)k+k.$$

В обоих случаях минимален порядок второго слагаемого, который равен $2\,k$. Противоречие, т.е. случай 1.1.2 невозможен.

Пусть теперь $q(y)=0$ тождественно (случай 1.2), т.е. $F(x,y)=x^k\,y\,f(x,y),\ k\geq 2$. Если F – это тождественный ноль, то F – ассоциативна (1.1.2.1). В противном случае, (1.1.2.2) мы можем предполагать, что f на x не делится, т.е $r(y)=f(0,y)$ не есть тождественный ноль. Запишем условие ассоциативности. После сокращения на $(x\,y)^k$ получаем

$$f\left(y,z\right)f\left(x,y^k zf\left(y,z\right)\right)-\left(x^{k-1}f\left(x,y\right)\right)^k f\left(x^k yf\left(x,y\right),z\right)=0. \qquad (5)$$

Подставляя $x=0$, получаем $f\left(y,z\right)r\left(y^k zf\left(y,z\right)\right)=0$. Откуда следует, что $f(y,z)=0$ и, соответственно, $F(x,y)=0$.

Итак, нами доказано следующее утверждение:

Утверждение 5: Если функция вида $F=x\,y\,f(x,y)$ ассоциативна, то она либо равна 0, либо эквивалентна $x\,y$.

Случай 4.

Если $F(x,y)=x+y+x\,y\,f(x,y)$, то $A(x)=F'_y(x,0)=1+x\,f(x,0)$. Если $\tilde{F}(x,y)=g^{-1}\circ F(g(x),g(y)),\ g\in\mathcal{G}$, то

$$\tilde{A}(x)=\tilde{F}'_y(x,0)=\frac{g'(0)}{g'(g(x))}\,A(g(x)).$$

Выберем в качестве g решение дифференциального уравнения $g'(u)=A(g(u)),\ g(0)=0$. При этом $g'(0)=A(0)=1$. Тогда $A(g(x))=g'(g(x))$ и мы получим, что $\tilde{A}(x)=1$.

Поэтому в дальнейшем мы полагаем, что $F'_y(x,0)=1$ и $f(x,y)$ делится на y. Если это не тождественный ноль, то (после смены обозначений) мы запишем $F(x,y)=x+y+x\,y^m\,f(x,y)$, где $m\geq 2$ и $f(x,0)$ не есть тождественный ноль. Подставляя это выражение в (1), получаем $E(x,y,z)=0$.

Подставим $y = 0$ в E'_y, сократим это выражение на z^{m-1}, подставим $z = 0$б получим $m\, f(x, 0) = 0$. Это противоречие показывает, что f – это тождественный ноль и $F = x + y$.

Таким образом нами доказано утверждение:

Утверждение 6: Если функция вида $F = x + y + x\, y\, f(x, y)$ ассоциативна, то она эквивалентна $x + y$.

В результате нами доказана следующая теорема:

Теорема 7: Пусть $F(x, y)$ локально ассоциативна, тогда либо она равна одной из функций:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = x, \quad F_3 = y,$$

либо F эквивалентна (в смысле действия группы $\mathcal{G}$ см. (3)) одной и только одной из двух ассоциативных функций (каноническая форма):

$$F_4 = x + y, \quad F_5 = x\, y.$$

Следует отметить, что F_1, F_2 и F_3 не изменяются под действием $\mathcal{G}$. Получить с помощью этого действия новые локально ассоциативные функции можно только из F_4 и F_5. Если в (3) положить $g(t) = \ln(t)$, то $g \circ (x + y) = x\, y$. Но $\ln(t)$ не голоморфен в нуле, поэтому это преобразование не принадлежит $\mathcal{G}$. Такие преобразования не сохраняют голоморфности F в окрестности $(0, 0)$ и условия $F(0, 0) = 0$. По отношению к действию $\mathcal{G}$ функции $x + y$ и $x\, y$ неэквивалентны (у них разные порядки в $(0, 0)$). Отметим также, что из пяти канонических локально ассоциативных функций в контекст формальных групп вписывается только F_4.

Следствие 8: (a) Если $F(x, y)$ ассоциативна, то $F \in Cl^1$ (класс функций аналитической сложности не выше единицы).
(b) Пусть $F(x, y)$ ассоциативна и зависит от обеих переменных (т.е. $F'_x\, F'_y$ не есть тождественный ноль). Тогда F коммутативна (т.е. $F(y, x) = F(x, y)$).
Доказательство: Все функции из теоремы 9 содержатся в Cl^1. Преобразования (3) сложности не меняют. Это доказывает (a). Если $F'_x\, F'_y \neq 0$, то

F эквивалентна либо $(x+y)$, либо $x\,y$, но эти функции коммутативны, а преобразования (3) коммутативности не нарушают. Это доказывает (b).

Нелокальная ассоциативность

Пусть функция $F(x,y)$ непостоянна и мероморфна в $\mathbf{C}^2$, т.е. $F(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$, где P и Q – взаимно простые целые функции. Тогда для того чтобы записать условие ассоциативности, не обязательно налагать условие $F(0,0) = 0$. Действительно, общая область определения обеих частей (1) – открытое плотное множество

$$\{(x,y,z) : Q(F(x,y),z) \neq 0\} \cap \{(x,y,z) : Q(x,F(y,z)) \neq 0\} \cap \\ \{(x,y,z) : Q(x,y) \neq 0\},$$

поэтому можно дать следующее определение.

Определение 9: Говорим, что мероморфная в $\mathbf{C}^2$ функция $F(x,y)$ ассоциативна, если $F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z))$ там, где определены обе части равенства.

В частности, это определение годится для рациональных, целых или полиномиальных функций.

Теорема 10: Все ассоциативные полиномы $F(x,y)$ содержатся в следующем списке (p и q – произвольные постоянные):

$$F_1 = 0, \quad F_2 = x, \quad F_3 = y, \quad F_4 = x + y + p\,x\,y, \quad F_5 = p\,x\,y, \\ F_6 = q + p\,q\,(x+y) + p\,(p-1)\,x\,y.$$

Доказательство: Пусть $F(x,y) = a_0(x) + a_1(x)\,y + \cdots + a_m(x)\,y^m$ – ненулевой ассоциативный полином степени m по y, т.е. $a_m(x) \neq 0$. Член полинома $F(F(x,y),z)$ старшей степени по z – это $a_m(F(x,y))\,z^m$, а старший член по z полинома $F(x,F(y,z))$ – это $(a_m(y)\,z^m)^m$. Откуда следует, что $m \leq 1$, т.е. $F(x,y) = a_0(x) + a_1(x)\,y$. Подставляя в (1) и отделяя степени по z, получаем

$$a_0(x) + a_1(x)\,a_0(y) - a_0(a_0(x) + a_1(x)\,y) = 0, \\ a_1(x)\,a_1(y) - a_1(a_0(x) + a_1(x)\,y) = 0. \qquad (6)$$

Пусть m_0 – это степень $a_0(x)$ и m_1 – степень $a_1(x)$, тогда из (6) следует, что $m_0 \leq 1$. Пусть $m_0 = 0$, т.е. a_0 – постоянная. Тогда первое соотношение

(6) принимает вид $a_1(x)\, a_0 = 0$. И если $a_0 \neq 0$, то $a_1(x) = 0$ и $F = a_0$ – постоянная. Если же $a_0 = 0$, то второе соотношение (6) принимает вид

$$a_1\,(x)\, a_1\,(y) - a_1\,(a_1\,(x)\, y) = 0.$$

Откуда следует, что $m_1 \leq 1$. Итак, степени F как по x, так и по y не превосходят 1. Подставляя в (6) общий вид такого полинома, окончательно находим полный список решений, который представлен в формулировке. Теорема доказана.

Если рассмотреть полученные полиномы с точностью до действия $\mathcal{G}$, то $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ дадут все пять канонических ассоциативных функций из теоремы 7. Для приведения семейства F_6 к каноническому виду рассмотрим действие M_h (см. (3)), порожденное сдвигом $h(t) = t + a$. Ассоциативность (нелокальная) сохраняется (хотя h не содержится в $\mathcal{G}$). Тогда

$$\tilde{F}_6(x,y) = F_6(x+a, y+a) - a =$$
$$p^2q\,(x+a)\,(y+a) + pq\,(x+a) + pq\,(y+a) - (x+a)\,(y+a)\,p + q - a.$$

Поэтому $\tilde{F}_6(0,0) = F_6(a,a) - a = (ap+1)\,(pqa - a + q)$. И если $a = \frac{q}{1-pq}$, то $\tilde{F}_6(x,y) = xyp\,(pq-1)$ и эта функция преобразованием из $\mathcal{G}$ либо превращается в $x\,y$, либо это 0.

Этот прием можно использовать и для описания более общих ситуаций. Действительно, если найдется такая постоянная a, что $F(a,a) + a = 0$, тогда если $h(u) = u + a$, то $M_h \circ F$ – локально ассоциативная функция, к которой применима теорема 7.

Утверждение 11: Пусть имеется ассоциативная мероморфная в $\mathbf{C}^2$ функция $F(x,y)$, т.ч. $F(a,a) = a$ для некоторого a. Тогда

$$F_{j,g,a}(x,y) = g^{-1} \circ f_j(g(x-a), g(y-a)) + a,$$

где f_j – это одна из пяти функций теоремы 7 ($1 \leq j \leq 5$), а $g \in G$. Причем

$$F_{1,g,a}(x,y) = a = const, \quad F_{2,g,a}(x,y) = x, \quad F_{3,g,a}(x,y) = y,$$
$$F_{4,g,a}(x,y) = g^{-1} \circ (g(x-a) + g(y-a)) + a,$$
$$F_{5,g,a}(x,y) = g^{-1} \circ (g(x-a)\, g(y-a)) + a.$$

А что можно сказать о функции $g \in \mathcal{G}$, если известно, что F рациональна и попала в класс сложения или умножения?

Рассмотрим аддитивный случай. Пусть рациональная функция F удовлетворяет соотношению $g(F(x,y)) = g(x-a) + g(y-a) + a$. Предполагаем, что $F'_x F'_y$ не равно нулю тождественно (т.е. F – функция двух переменных). Дифференцируя соотношение по x и по y, получаем, что в окрестности точки (a,a) выполнено соотношение

$$g'(F(x,y))\, F''_{xy}(x,y) + g''(F(x,y))\, F'_x(x,y)\, F'_y(x,y) = 0. \tag{7}$$

Перейдем от координат (x,y) к координатам (x,t), где $t = F(x,y)$, тогда это соотношение определяет y как алгебраическую функцию $y = Y(x,t)$. И соотношение (7) примет вид:

$$\frac{g''(t)}{g'(t)} = -\frac{F''_{xy}(x, Y(x,t))}{F'_x(x, Y(x,t))\, F'_y(x, Y(x,t))} = A(t), \text{ где } A(t) \text{ – алгебраична.} \tag{8}$$

Причем то, что правая часть (8) не зависит от x – это дифференциальное условие на F (неявное дифференцирование). Если операцию взятия первообразной обозначить через D^{-1}, то решение (8) можно записать в виде:

$$g(t) = D^{-1}(\exp(D^{-1}(A)))(t).$$

Если $(a_1, \ldots, a_s)$ – набор особых точек функции $A(t)$ на комплексной плоскости переменной t, то функция $g(t)$ аналитична на плоскости без этих точек. Однако в отличие от $A(t)$ функция $g(t)$ может быть бесконечнозначной и иметь неалгебраические точки ветвления. Аналогично можно разобрать случай $g(F(x,y)) = g(x-a)\, g(y-a) + a$.

Отметим также, что если использовать преобразования M_h, порожденные дробно-линейными преобразованиями

$$h(u) = \frac{\alpha\, u + \beta\, u}{\gamma\, u + \delta\, u}, \quad \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0,$$

то, применяя их к $x+y$ и $x\,y$, мы получим два 3-параметрических семейства ассоциативных рациональных функций степени два

$$M_h \circ (x+y) = \frac{-2\,\alpha\,\delta\,\gamma\,xy + \beta\,\gamma^2 xy - \alpha\,\delta^2 x - \alpha\,\delta^2 y - \beta\,\delta^2}{\alpha\,\gamma^2 xy + \beta\,\gamma^2 x + \beta\,\gamma^2 y - \alpha\,\delta^2 + 2\,\beta\,\delta\,\gamma}$$

$$M_h \circ (x\,y) =$$

$$-\frac{-\alpha^2\delta\,xy + \beta\,\gamma^2 xy - \alpha\,\beta\,\delta\,x - \alpha\,\beta\,\delta\,y + \beta\,\delta\,\gamma\,x + \beta\,\delta\,\gamma\,y - \beta^2\delta + \beta\,\delta^2}{-\alpha^2\gamma\,xy + \alpha\,\gamma^2 xy - \alpha\,\beta\,\gamma\,x - \alpha\,\beta\,\gamma\,y + \alpha\,\delta\,\gamma\,x + \alpha\,\delta\,\gamma\,y + \alpha\,\delta^2 - \beta^2\gamma}.$$

Локально дистрибутивные пары

Пусть имеется две бинарные операции $x \oplus y$ и $x \lozenge y$. Рассмотрим два соотношения

$$\begin{aligned} (R) \quad & (x \oplus y) \lozenge z = (x \lozenge z) \oplus (y \lozenge z), \\ (L) \quad & z \lozenge (x \oplus y) = (z \lozenge x) \oplus (z \lozenge y). \end{aligned} \tag{9}$$

Принято говорить, что операция $\lozenge$ дистрибутивна по отношению к $\oplus$ справа, если выполнено первое соотношение, и слева – если второе. Причем если вторая операция коммутативна, то разница между правой и левой дистрибутивностью исчезает.

Запишем, далее, эти операции, пользуясь функциональными обозначениями, т.е. теперь $a \oplus b = F(a,b)$ и $a \lozenge b = G(a,b)$. Тогда (9) примет вид

$$\begin{aligned} (R) \quad & G\left(F\left(x,y\right),z\right) = F\left(G\left(x,z\right),G\left(y,z\right)\right), \\ (L) \quad & G\left(z,F\left(x,y\right)\right) = F\left(G\left(z,x\right),G\left(z,y\right)\right). \end{aligned}$$

Пусть в окрестности точки $(0,0)$ имеется пара голоморфных функций $F(x,y)$ и $G(x,y)$, причем $F(0,0) = G(0,0) = 0$.

Определение 12: Говорим, что G *локально дистрибутивна справа* по отношению к F, если имеет место (R) и *локально дистрибутивна слева* по отношению к F, если имеет место (L).

Группа $\mathcal{G}$ (см. (2)) действует на на пары (F,G):

$$(F,G) \to (M_g \circ F, M_g \circ G) = g \circ (F,G), \tag{10}$$

$$g \circ F(x,y) = g^{-1}(F(g(x),g(y))),\ g \circ G(x,y) = g^{-1}(G(g(x),g(y))),\ g \in \mathcal{G}.$$

Утверждение 13: Действие $\mathcal{G}$ на пары (10) сохраняет как правую, так и левую локальную дистрибутивность.

Проверяется непосредственно.

Пусть одна из функций пары, – скажем, F, – локально ассоциативна. Тогда при изучении локально дистрибутивных пар (F,G) можно, воспользовавшись теоремой 7, считать что F задана в локально каноническом виде. Подставляя в качестве F все пять локально ассоциативных функций в оба условия дистрибутивности, получаем десять условий на $G(x,y)$ (пять правых и пять левых):

$$
\begin{array}{lllll}
F_1 = 0, & (R_1) & G(0,z)=0, & (L_1) & G(z,0)=0, \\
F_2 = x, & (R_2) & 0=0, & (L_2) & 0=0, \\
F_3 = y, & (R_3) & 0=0, & (L_3) & 0=0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
F_4 = x+y, & \\
\quad (R_4) & G\left(x+y,z\right) = G\left(x,z\right) + G\left(y,z\right), \\
\quad (L_4) & G\left(z,x+y\right) = G\left(z,x\right) + G\left(z,y\right), \\
F_5 = x\,y, & \\
\quad (R_5) & G\left(xy,z\right) = G\left(x,z\right) G\left(y,z\right), \\
\quad (L_5) & G\left(z,xy\right) = G\left(z,x\right) G\left(z,y\right),
\end{array} \tag{11}
$$

Выписывая решения уравнений дистрибутивности, кроме условий правой и левой дистрибутивности будем отмечать также условие двусторонней дистрибутивности (RL).

Утверждение 14: Список решений уравнений (11) имеет вид:

$F=0,\ (R)\ G(x,y)=x\,r(x,y),\ (L)\ G(x,y)=y\,l(x,y),\ (RL)\ G(x,y)=k\,x\,y,$
$F=x$ или $y,\ (RL)\ G(x,y)$ – любая функция,
$F=x+y,\ (R)\ G(x,y)=x\,q(y),\ (L)\ G(x,y)=y\,p(x),\ (RL)\ G(x,y)=k\,x\,y,$
$F=x\,y,\ (R)\ G(x,y)=0$ или $x^n,\ (L)\ G(x,y)=0$ или $y^n,\ (RL)\ G(x,y)=0.$

Доказательство: Разберем случай $F=x+y$. Условие правой дистрибутивности имеют вид:

$$G\left(x+y,z\right) = G\left(x,z\right) + G\left(y,z\right)$$

В этом соотношении второе переменное z фигурирует в качестве параметра. Пусть $f(t)$ – это $G(t,z)$ при некотором фиксированном значении

z. Уравнение имеет вид $f\,(x+y)=f\,(x)+f\,(y)$. Применим к этому соотношению оператор $\left(\frac{\partial}{\partial\,x}-\frac{\partial}{\partial\,y}\right)$, получим $f'(x)=f'(y)$. Следовательно, f линейна и $G(x,y)=x\,q(y)$. Остальные случаи разбираются аналогично. Утверждение доказано.

Следствие 15: Список пар функций (F,G), где F локально ассоциативна, а G локально двусторонне дистрибутивна по отношению к F, имеет вид:

$$(F=0,\ G=k\,x\,y),\quad (F=x,\ G=f(x\,y)),\quad (F=y,\ G=f(x\,y)),$$
$$(F=x+y,\ G=k\,x\,y),\quad (F=xy,\ G=0),\quad k \text{ – произвольная постоянная.}$$

Отметим, что во всех случаях, кроме $F=x$ или y, соответствующая функция G также локально ассоциативна.

Отношение "быть дистрибутивным" не является симметричным, F и G входят в него неравноправно. Можно, пользуясь теоремой 7, выяснить, по отношению к каким функциям F локально дистрибутивны локально ассоциативные функции G. Для этого преобразованием M_g мы переведем G в одну из пяти канонических форм и найдем вид функции F, по отношению к которой G дистрибутивна. Несложные вычисления позволяют дать полный ответ. При этом во всех случаях, когда каноническая форма коммутативна, разница между правой и левой дистрибутивностью исчезает.

Теорема 16: Все пары (F,G), такие что функция G локально дистрибутивна по отношению к F, а G локально ассоциативна и записана в каноническом виде (см. теорему 7), содержатся в следующем списке:

$$(RL)\quad (F-\text{любая},\ G=0).$$
$$(R)\quad (F-\text{любая},\ G=x),\qquad (L)\quad (F=x+f(x,y)\,(x-y),\ G=x),$$
$$(L)\quad (F-\text{любая},\ G=y),\qquad (L)\quad (F=y+f(x,y)\,(x-y),\ G=y),$$
$$(RL)\quad (F=x+\varphi(x-y),\ G=x+y),$$
$$(RL)\quad (F=\lambda x+\mu\,y,\ G=x\,y).$$

Отметим, что функции $x+\varphi(x-y)$ (пара для $(x+y)$) и $\lambda x+\mu\,y$ – (пара для $(x+y)$) являются ассоциативными лишь в исключительных случаях. Так, функция $F = x + \varphi(x-y)$ локально ассоциативна лишь в двух случаях: $F = x$ при $\varphi(t) = 0$ и $F = y$ при $\varphi(t) = -t$. А функция $\lambda x + \mu y$ – лишь в четырех: $0,\ x,\ y,\ x+y$.

В заключение отметим, что наше описание нелокально ассоциативных рациональных функций осталось неполным. Оно не охватывает рациональных функций $F(x,y)$, т.ч. $F(x,x) - x$ не имеет нулей. Это функции вида $F(x,y) = A + x + (x-y)f(x,y)$, где $A \neq 0$. Вопрос об описании таких рациональных функций открыт. За рамками наших рассмотрений остались, в частности, два вопроса: (a) существуют ли ассоциативные рациональные функции степени больше чем два, (b) существуют ли ассоциативные рациональные функции аналитической сложности больше, чем один?

Отметим также, что преобразование M_g, которое используется в данной работе, может быть рассмотрено как преобразование функций одного переменного, т.е. $M_g(f(x)) = g^{-1}(f(g(x)))$. Это тот вид эквивалентности ростков функций, голоморфных в начале координат, который является основным в вопросах голоморфной динамики [4], [5]. Было бы интересно понять, как устроена классификация ростков голоморфных функций двух переменных по отношению к действию M_g группы $\mathcal{G}$, которое играло ведущую роль в нашей работе.

Список литературы

[1] V.K.Beloshapka, Об алгебраических свойствах аналитических функций двух переменных,

[2] M.Hazewinkel, Formal groups and applications, Academic Press, 1978, 593 p.

[3] Ж.-П.Серр, Алгебры Ли и группы Ли, М.,Мир, 1969, 367 с.

[4] С. М. Воронин, “Аналитическая классификация ростков конформных отображений с тождественной линейной частью”, Функц. анализ и его прил., 15:1 (1981).

[5] Дж. Милнор, Голоморфная динамика: Вводные лекции., Регулярная и хаотическая динамика, 2000, 320 с.