Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(3), 319–3276

УДК 517.55

О гипергеометрических функциях двух переменных сложности один

Валерий К. Белошапка*

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова Воробьевы горы, 119991 Москва,

Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ.

Получена 18.05.2009, окончательный вариант 25.06.2009, принята к печати 10.07.2009

Для серии примеров систем Горна и системы Лауричеллы для функций двух переменных дано описание решений, имеющих аналитическую сложность один. Ставится ряд вопросов.

Ключевые слова: аналитическая сложность, гипергеометрические функции, система Горна, система Лауричеллы, дифференциальное кольцо

1. Введение

Класс гипергеометрических функций (HG-функций) нескольких переменных представляет значительный интерес. Он продолжает оставаться предметом внимательного изучения [1]. С другой стороны, имеется теория аналитической сложности, ориентированная на изучение вопросов представимости функций большего числа переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных. В частности, изучаются вопросы представимости функций двух переменных с помощью функций одного переменного [2]. В контексте этой теории простейшие функции двух переменных – это функции сложности один (функции одного переменного имеют сложность ноль). Это аналитические функции переменных (x, y), имеющие локальное представление вида $z(x, y) = c(a(x) + b(y))$ (a, b, c – непостоянные аналитические функции одного переменного). Такие функции представляют особый интерес. Во-первых, это функции которые имеют в калибровочной группе стабилизатор максимальной размерности (размерности три) [3]. Во-вторых, если считать, что $z(x, y)$ – это функция 3-ткани на плоскости, то такая ткань эквивалентна шестиугольной ткани тогда и только тогда, когда z имеет указанный вид [4].

Совокупность всех таких функций – это, за вычетом функций одного переменного, совокупность аналитических функций, обращающих в ноль некий дифференциальный полином третьего порядка. Этот полином – не что иное, как числитель следующей дифференциальной дроби: $\left(\ln(z'_x/z'_y)\right)''_{xy}$, т.е. условие, определяющее функции сложности, один имеет вид :

$$d_1(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z''_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0, \quad z'_x\, z'_y \neq 0. \tag{1}$$

Отметим, что в класс функций сложности один входят все четыре арифметических операции. Если убрать неравенство, исключающие функции одного переменного, то получаем $Cl^1 = \{d_1(z) = 0\}$ – класс функций сложности не выше чем один.

На наш взгляд, теория гипергеометрических функций нескольких (в частности, двух) переменных качественно отличается от теории гипергеометрических функций одного переменного тем, что гипергеометрических функций нескольких переменных в каком-то смысле

*vkb@strogino.ru

слишком много и возникает проблема выбора более узкого класса самых интересных HG-функций. Какие HG-функции представляют наибольший интерес? Несомненно, что на этот вопрос можно давать разные ответы. Для функций двух переменных мы предлагаем такой вариант ответа:

Хорошие HG-функции – это HG-функции сложности один.

Под HG-функцией двух переменных (примеры 1– 7) мы, следуя [1], понимаем некоторое решение системы Горна. Чтобы задать систему Горна для функций переменных (x, y), требуется четыре полинома от двух переменных P, Q, R, S. Пусть $X = x\,\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = y\,\frac{\partial}{\partial y}$ – операторы однородного частного дифференцирования. Тогда система Горна, соответствующая данной четверке полиномов, – это система из двух линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно одной функции $z(x, y)$ вида

$$G_x\,z = (x\,P(X,Y) - Q(X,Y))\,z = 0,$$
$$G_y\,z = (y\,R(X,Y) - S(X,Y))\,z = 0. \tag{2}$$

Что представляет собой совокупность решений этой системы сложности один? Цель данной работы – дать явное описание решений сложности один для некоторой серии примеров систем вида (2). Почти все примеры взяты из [1]. При росте степеней определяющих полиномов и числа свободных параметров задача явного описания пространства решений сталкивается с нарастающими вычислительными трудностями даже для полиномов степени не выше двух. Однако можно надеяться, что рассмотрение этих примеров позволит сформулировать вопросы для дальнейшего исследования (некоторые сформулированы в конце статьи).

В теории HG-функций имеется устоявшийся подход, в соответствии с которым важной характеристикой системы Горна является ее голономность. Голономность системы, в частности, гарантирует конечномерность пространства решений. В наших рассмотрениях мы голономности требовать не будем.

Поскольку система Горна – это система линейных уравнений, то совокупность ее решений – это линейное пространство. Уравнение (1) не является линейным. С геометрической точки зрения совокупность его решений – это бесконечномерный конус. Действительно, преобразование $(z(x, y) \to \lambda\, z(x, y))$ переводит решения в решения. Поэтому наш вопрос можно понимать как вопрос о построении пересечения конуса и линейного пространства.

Для дальнейшего нам потребуется следующее простое наблюдение. Пусть даны две непостоянные функции $a(x)$ и $b(y)$. Для того чтобы для функции $w(x, y)$ нашлась функция $c(t)$, т.ч. в окрестности точки общего положения имело бы место локальное представление вида $w = c(a(x) + b(y))$ необходимо и достаточно, чтобы

$$V(w) = \left(\frac{1}{a'(x)}\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{b'(y)}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(w) = 0. \tag{3}$$

Конкретные вычисления проводились с использованием системы Maple.

2. Серия примеров

ПРИМЕР 1. Положим

$$P = x^2, \quad Q = q_1\,x + q_2\,y, \quad R = y^2, \quad S = s_1\,x + s_2\,y, \quad q_1 q_2 s_1 s_2 \neq 0.$$

Тогда для функции $z = c(a(x) + b(y))$ система (2) примет вид (производные обозначаем нижними индексами):

$$G_x\,z = x^3 {a_1}^2 c_2 + x^3 a_2 c_1 + x^2 a_1 c_1 - q_1 x c_1 a_1 - q_2 y c_1 b_1 = 0,$$
$$G_y\,z = y^3 {b_1}^2 c_2 + y^3 b_2 c_1 - s_1 x c_1 a_1 + y^2 b_1 c_1 - s_2 y c_1 b_1 = 0.$$

Отношение c_2/c_1 можно выразить как из первого соотношения, так и из второго. Таким образом, исключая c, мы получаем два соотношения. Первое – условие того что два выражения для c_2/c_1 равны. Второе, что дифференцирование первого из них по V дает ноль (т.е. что это выражение есть функция от $(a(x) + b(y))$). Имеем:

$$e_1 = x^3 y^3 {a_1}^2 b_2 - x^3 y^3 a_2 {b_1}^2 - x^4 {a_1}^3 s_1 + x^3 y^2 {a_1}^2 b_1 - x^3 y {a_1}^2 b_1 s_2 - x^2 y^3 a_1 {b_1}^2 + x y^3 a_1 {b_1}^2 q_1 + y^4 {b_1}^3 q_2 = 0,$$
$$e_2 = -a_3 a_1 b_1 x^4 + 2\,{a_2}^2 b_1 x^4 + a_2 a_1 b_1 x^3 - a_2 a_1 b_1 x^2 q_1 - {a_1}^2 b_2 x y q_2 - 2\,a_2 {b_1}^2 x y q_2 + {a_1}^2 b_1 x^2 - 2\,{a_1}^2 b_1 x q_1 - {a_1}^2 b_1 x q_2 - 3\,a_1 {b_1}^2 y q_2 = 0.$$

Оба выражения, как e_1, так и e_2 линейны по b_2, причем коэффициенты при b_2 в ноль тождественно не обращаются. Выразим b_2 из обоих равенств. Получаем два условия. Первое – равенство этих выражений, второе – то, что они не зависят от x. Получаем:

$$e_3 = x^6 y^2 a_1 a_3 b_1 - 2\,x^6 y^2 {a_2}^2 b_1 - x^5 y^2 a_1 a_2 b_1 + x^4 y^2 a_1 a_2 b_1 q_1 + 3\,x^3 y^3 a_2 {b_1}^2 q_2 - x^4 y^2 {a_1}^2 b_1 + x^4 {a_1}^3 q_2 s_1 + 2\,x^3 y^2 {a_1}^2 b_1 q_1 + x^3 y {a_1}^2 b_1 q_2 s_2 + 4\,x^2 y^3 a_1 {b_1}^2 q_2 - x y^3 a_1 {b_1}^2 q_1 q_2 - y^4 {b_1}^3 {q_2}^2 = 0,$$
$$e_4 = a_3 a_1 {b_1}^2 x^4 y^3 - 2\,{a_2}^2 {b_1}^2 x^4 y^3 + a_2 {a_1}^3 x^5 s_1 - a_2 a_1 {b_1}^2 x^3 y^3 + a_2 a_1 {b_1}^2 x^2 y^3 q_1 + 2\,a_2 {b_1}^3 x y^4 q_2 + {a_1}^4 x^4 s_1 - {a_1}^2 {b_1}^2 x^2 y^3 + 2\,{a_1}^2 {b_1}^2 x y^3 q_1 + 3\,a_1 {b_1}^3 y^4 q_2 = 0.$$

Выражения e_3 и e_4 квадратичны по b_1. Необходимым условием разрешимости является условие равенства нулю результанта e_3 и e_4 по b_1. Вычисляя этот результант, получаем, что он имеет вид

$$x^{11} y^{11} {a_1}^4 {q_2}^2 s_1\, r(x, y, a_1, a_2, a_3),$$

т.е. $r = 0$. Причем r – это полином степени четыре по y. Коэффициент в r при y^4 равен

$$-x^2 {a_1}^5 {q_2}^3 {s_2}^3 \left(x a_2 + a_1\right) \left(2\,x a_2 + 3\,a_1\right)^2.$$

Таким образом, нам достаточно рассмотреть два случая:
первый – $(2\,x a_2 + 3\,a_1) = 0$, и второй – $(x a_2 + a_1) = 0$. В обоих случаях уравнения нетрудно решить. В первом случае $a_1 = k/x^{3/2}$, а во втором $a_1 = k/x$. Подставляя первое значение a_1 в r нетрудно убедиться, что коэффициенты r при всех степенях y, меньших четырех, нулю не равны. Таким образом, этот случай отпадает. Подставляя в r второе значение для a_1, получаем обращение в ноль коэффициентов при всех степенях y, кроме первой. Коэффициент при первой степени равен

$$-\frac{k^8 {q_2}^3 s_1 \left(q_1 s_2 - q_2 s_1\right)}{x^7},$$

т.е. для обращения в ноль требуется условие коллинеарности векторов (q_1, q_2) и (s_1, s_2). Подставляя это значение a_1 в e_3, получаем $yb_1q_2 + kq_1 = 0$. Таким образом, в этом случае

$$a(x) + b(y) = k\,\ln(x) - k\,\frac{q_1}{q_2}\,\ln(y) + const.$$

Значит, z имеет вид $z = c(y/x^{\alpha})$, где $\alpha = q_2/q_1 = s_2/s_1$. Подставляя такую функцию z в соотношения $G_x\,z = G_y\,z = 0$, получаем:
$c''(t)\,t + c'(t) = 0$, откуда $c(t) = \lambda\,\ln(t) + \mu$.

Итак, нами доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Решения сложности один (т.е. вида $z = c(a(x) + b(y))$, где $a, b, c,$ – непостоянны) системы Горна для примера 1 существуют, только если параметры пропорциональны, т.е. $q_2/q_1 = s_2/s_1 = \alpha$. При этом решения имеют вид*

$$z = \lambda\,\ln(\frac{y}{x^{\alpha}}) + \mu, \quad \alpha \neq 0,\ \lambda \neq 0.$$

ПРИМЕР 2. Положим

$$P = x + 1, \quad Q = 1, \quad R = y + 1, \quad S = 1.$$

Тогда для функции $z = c(a(x) + b(y))$ система (2) примет вид

$$G_x\,z = x^2 a_1 c_1 + x c_0 - c_0 = 0, \quad G_y\,z = y^2 b_1 c_1 + y c_0 - c_0 = 0.$$

Откуда получаем

$$\frac{c_1}{c_0} = -\frac{x-1}{x^2 a_1} = -\frac{y-1}{y^2 b_1} = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом,

$$a_1 = -\frac{(x-1)\,\lambda}{x^2}, \quad b_1 = -\frac{(y-1)\,\lambda}{y^2}.$$

Подставляя полученные значения для a_1 и b_1 в $G_x = 0$ и $G_y = 0$, получаем

$$-\,(x-1)\,(\lambda\,c_1 - c_0) = -\,(y-1)\,(\lambda\,c_1 - c_0) = 0.$$

Поэтому $c(t) = \exp(-t/\lambda)$ и $z = \mu\,(x\,y\,\exp(1/x + 1/y))^{-1}$.

Утверждение 2. *Решения сложности один системы Горна для примера 2 имеют вид*

$$z = \frac{\mu}{x\,y\,\exp(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}, \quad \mu \neq 0.$$

ПРИМЕР 3. Положим

$$P = 1, \quad Q = (x-1) \quad R = 1, \quad S = (y-1),$$

Тогда для функции $z = c(a(x) + b(y))$ система (2) примет вид

$$G_x\,z = -x c_1 a_1 + x c_0 + c_0 = 0, \quad G_y\,z = -y c_1 b_1 + y c_0 + c_0 = 0.$$

Исключая c, получаем

$$-xa_1y + yb_1x - xa_1 + yb_1 = 0, \quad a_2x^2 + a_2x + a_1 = 0.$$

Откуда следует, что

$$a(x) = \frac{\lambda}{x} + \lambda\ln(x) + \ln(\alpha)\,,\ b(y) = \lambda\ln(y) + \frac{\lambda}{y} + \ln(\beta)\,,\ \lambda \neq 0.$$

Далее вычисляем c, в итоге получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. *Решения сложности один системы Горна для примера 3 имеют вид*

$$z = \mu\, xy\, \mathrm{e}^{(x+y)}, \quad \mu \neq 0.$$

ПРИМЕР 4. Положим

$$P = x^2y + 1, \quad Q = 1 \quad R = y + 1, \quad S = 1.$$

Тогда для функции $z = c(a(x) + b(y))$ система (2) примет вид

$$G_x\, z = x^3ya_1{}^2b_1c_3 + x^3ya_2b_1c_2 + x^2ya_1b_1c_2 + xc_0 - c_0 = 0,$$
$$G_y\, z = y^2b_1c_1 + yc_0 - c_0 = 0.$$

Из второго соотношения получаем $c_1 = (-b_2y^2 - yb_1 + b_2y + 2\,b_1)\,c_0$. Дифференцируя это равенство по x, получаем такие же выражения для c_2 и c_3. Подставляя их в $G_xz = 0$, получаем:

$$l = x^3y^4a_2b_1 - x^3y^3a_1{}^2 - 2\,x^3y^3a_2b_1 + x^2y^4a_1b_1 + xy^5b_1{}^2 + 3\,x^3y^2a_1{}^2 + x^3a_2y^2b_1 - 2\,x^2y^3a_1b_1 - y^5b_1{}^2 - 3\,x^3ya_1{}^2 + x^2a_1y^2b_1 + x^3a_1{}^2 = 0.$$

Записывая, что $V(c_1/c_0) = 0$, получаем $e = -b_2y^2 - yb_1 + b_2y + 2\,b_1 = 0$. Дифференцируя l по y, получаем:

$$(l)'_y = x^3y^4a_2b_2 + 4\,x^3y^3a_2b_1 - 2\,x^3y^3a_2b_2 + x^2y^4a_1b_2 + 2\,xy^5b_1b_2 - 3\,x^3y^2a_1{}^2 - 6\,x^3a_2y^2b_1 + x^3a_2y^2b_2 + 4\,x^2y^3a_1b_1 - 2\,x^2y^3a_1b_2 + 5\,xy^4b_1{}^2 - 2\,y^5b_1b_2 + 6\,x^3ya_1{}^2 + 2\,x^3a_2yb_1 - 6\,x^2a_1y^2b_1 + x^2a_1y^2b_2 - 5\,y^4b_1{}^2 - 3\,x^3a_1{}^2 + 2\,x^2a_1yb_1 = 0.$$

Вычисляя результант $(l)'_y$ и e по b_2, получаем

$$r_1 = 3\,x^3y^4a_2b_1 - 3\,x^3y^3a_1{}^2 - 6\,x^3y^3a_2b_1 + 3\,x^2y^4a_1b_1 + 3\,xy^5b_1{}^2 + 9\,x^3y^2a_1{}^2 + 3\,x^3a_2y^2b_1 - 6\,x^2y^3a_1b_1 - xy^4b_1{}^2 - 3\,y^5b_1{}^2 - 9\,x^3ya_1{}^2 + 3\,x^2a_1y^2b_1 + y^4b_1{}^2 + 3\,x^3a_1{}^2 = 0.$$

Вычисляя результант r_1 и l по b_1, получаем

$$r_2 = x^6y^8a_1{}^4\,(y-1)^6\,(x-1)^2 = 0.$$

Но тождественное обращение r_2 в ноль невозможно. Итак:

Утверждение 4. *Решений сложности один системы Горна для примера 4 не существует.*

ПРИМЕР 5. Положим

$$P = x + y - p, \quad Q = x + q, \quad R = x + y - p, \quad S = y + s.$$

Случай $p = 0$.

$$G_x\, z = x^2 a_1 c_1 + xy b_1 c_1 - x a_1 c_1 - q c_0 = 0,$$
$$G_y\, z = xy a_1 c_1 + y^2 b_1 c_1 - y b_1 c_1 - s c_0 = 0.$$

Поскольку c_1 не есть тождественный ноль, то $q \neq 0$ и $s \neq 0$. Исключая c, получаем

$$e_1 = qxya_1 + qy^2 b_1 - sx^2 a_1 - sxyb_1 - qyb_1 + sxa_1 = 0,$$
$$e_2 = -x^2 a_2 b_1 + xya_1 b_2 - xa_1 b_1 + xa_2 b_1 - y{b_1}^2 + a_1 b_1 = 0.$$

Из $e_1 = 0$ выражаем b_1. Записывая, что b_1 не зависит от x, получаем

$$e_3 = -a_2 q^2 xy^2 + 2\, a_2 qsx^2 y - a_2 s^2 x^3 + a_2 q^2 xy - a_1 q^2 y^2 - a_2 qsx^2 + 2\, a_1 qsxy -$$
$$a_2 qsxy - a_1 s^2 x^2 + a_2 s^2 x^2 + a_1 q^2 y - 2\, a_1 qsx + a_2 qsx - a_1 qsy + a_1 qs = 0.$$

Это выражение квадратично зависит от y. Приравнивая к нулю коэффициент при y^2, получаем $q^2\,(xa_2 + a_1) = 0$. Откуда $a(x) = \lambda\, \ln(x) + \alpha$ и, далее, $s = -q$, $b(y) = -\lambda\, \ln(y) + \beta$. В результате получаем $z = \mu\,(y/x)^q$.

Случай $p \neq 0$.
Имеем

$$G_x\, z = x^2 a_1 c_1 + xy b_1 c_1 - px c_0 - x c_1 a_1 - q c_0 = 0,$$
$$G_y\, z = xy a_1 c_1 + y^2 b_1 c_1 - py c_0 - y c_1 b_1 - s c_0 = 0.$$

Исключая c, получаем

$$e_1 = pxya_1 - pxyb_1 + qxya_1 + qy^2 b_1 - sx^2 a_1 - sxyb_1 - qyb_1 + sxa_1 = 0,$$
$$e_2 = -a_2 b_1 px^3 + a_1 b_2 px^2 y + a_2 b_1 px^2 - a_2 b_1 qx^2 + a_1 b_2 qxy - a_1 b_1 qx + a_2 b_1 qx -$$
$${b_1}^2 qy + a_1 b_1 q = 0.$$

Из $e_2 = 0$ выражаем b_2, из $e_1 = 0$ выражаем b_1. Записывая, что b_1 не зависит от x и то, что производная b_1 равна b_2, получаем два соотношения. После удаления множителей, которые не обращаются в ноль, оказывается, что эти два условия совпадают и имеют вид

$$e_3 = a_2 p^2 x^2 y + a_2 pqx^2 y - a_2 pqxy^2 - a_2 psx^3 + a_2 psx^2 y - a_2 q^2 xy^2 + 2\, a_2 qsx^2 y -$$
$$a_2 s^2 x^3 + a_2 pqxy - a_1 pqy^2 - a_1 psx^2 + a_2 psx^2 + a_2 q^2 xy - a_1 q^2 y^2 - a_2 qsx^2 +$$
$$2\, a_1 qsxy - a_2 qsxy - a_1 s^2 x^2 + a_2 s^2 x^2 + a_1 pqy + a_1 q^2 y - 2\, a_1 qsx +$$
$$a_2 qsx - a_1 qsy + a_1 qs = 0.$$

Это выражение квадратично зависит от y. Приравнивая к нулю коэффициент при y^2, получаем:

$$q\,(xa_2 + a_1)\,(p + q) = 0.$$

Случай $p \neq 0,\ q = 0.$

Тогда e_3 принимает вид $x^2\,(p+s)\,(pya_2 - sxa_2 - sa_1 + sa_2)$. Имеется две возможности обратить это выражение в ноль: либо $s = -p$, либо $a_2 = s = 0$. Первый случай невозможен, т.к. при этом $e_1 = pxa_1\,(x+y-1)$. Во втором получаем $a(x) = \lambda\,x + \alpha,\ b(y) = \lambda\,y + \beta$. В итоге получаем:

$$z = \mu\,(1-(x+y))^p,\ q = s = 0,\ p \neq 0.$$

Случай $p \neq 0,\ q = -p,\ q \neq 0$. Тогда e_3 делится на s. Но обращение s в ноль несовместимо с условием $e_1 = 0$. Далее получаем $s = -p$. В итоге:

$$z = \mu\,\left(\frac{(x-1)(y-1)}{xy} - 1\right), \quad s = q = -p.$$

Случай $p \neq 0,\ q \neq 0, (p+q) \neq 0\ \ (xa_2 + a_1) = 0$. Тогда $a(x) = \lambda\,\ln(x) + \alpha$. При этом из $e_2 = 0$ получаем, что $s = -(p+q)$, а из $e_1 = 0$ что $b_1 = -\lambda(p+q)/(qy)$ и $b(y) = -\lambda(p+q)/q\,\ln(y) + \beta$. В итоге:

$$z = \mu\,\frac{y^{p+q}}{x^q}, \quad s = -(p+q),\ q \neq 0, (p+q) \neq 0.$$

Утверждение 5. *Решения сложности один системы Горна для примера 5 существуют только в следующих случаях:*

$$\begin{aligned}
(a)\ p = 0,\ s = -q \neq 0, \quad z = \mu\,(\frac{y}{x})^q,\\
(b)\ p \neq 0,\ s = q = 0, \quad z = \mu\,\left(1-(x+y)\right)^p,\\
(c)\ s = q = -p \neq 0,\ z = \mu\,\left(\frac{(x-1)(y-1)}{x\,y} - 1\right),\\
(d)\ p \neq 0,\ q \neq 0,\ p+q \neq 0,\ s = -(p+q), \quad z = \frac{\mu}{x^q\,y^s}.
\end{aligned}$$

ПРИМЕР 6. Положим

$$P = x(x+y), \quad Q = x^2, \quad R = y(x+y), \quad S = y^2.$$

Тогда система принимает вид:

$$\begin{aligned}
G_x\,z = x^2{a_1}^2c_2 + xya_1b_1c_2 + x^2a_2c_1 - xc_2{a_1}^2 + xa_1c_1 - xc_1a_2 - c_1a_1 = 0,\\
G_y\,z = xya_1b_1c_2 + y^2{b_1}^2c_2 + y^2b_2c_1 - yc_2{b_1}^2 + yb_1c_1 - yc_1b_2 - c_1b_1 = 0.
\end{aligned}$$

Исключая c, получаем

$$\begin{aligned}
e_1 = -x^3ya_1a_2b_1 + x^2y^2{a_1}^2b_2 - x^2y^2a_2{b_1}^2 + xy^3a_1b_1b_2 - x^2y{a_1}^2b_2 +\\
x^2ya_1a_2b_1 + x^2ya_2{b_1}^2 - xy^2{a_1}^2b_2 - xy^2a_1b_1b_2 + xy^2a_2{b_1}^2 - x^2{a_1}^2b_1 +\\
xy{a_1}^2b_2 - xya_2{b_1}^2 + y^2a_1{b_1}^2 + x{a_1}^2b_1 - ya_1{b_1}^2 = 0,\\
e_2 = -a_3{a_1}^2b_1x^4 + 2\,{a_2}^2a_1b_1x^4 - a_2{a_1}^2b_2x^3y - a_3a_1{b_1}^2x^3y + {a_2}^2{b_1}^2x^3y +\\
2\,a_3{a_1}^2b_1x^3 - 4\,{a_2}^2a_1b_1x^3 - {a_1}^3b_2x^2y + a_2{a_1}^2b_2x^2y - a_2a_1{b_1}^2x^2y + a_3a_1{b_1}^2x^2y -\\
{a_2}^2{b_1}^2x^2y - a_2{a_1}^2b_1x^2 - a_3{a_1}^2b_1x^2 + 2\,{a_2}^2a_1b_1x^2 + {a_1}^3b_2xy -\\
{a_1}^3b_1x + a_2{a_1}^2b_1x - {a_1}^2{b_1}^2y + {a_1}^3b_1 = 0.
\end{aligned}$$

Получаем два выражения для b_2. Записываем то, что они равны и то, что эти выражения не зависят от x, получаем $e_3(a_1,a_2,a_3,b_1) = e_4(a_1,a_2,a_3,b_1) = 0$ (в e_3 – 43 монома, в e_4 – 45). Вычисляя r – результант e_3 и e_4 относительно b_1, получаем:

$$r = y^2{a_1}^4\,(y-1)\,(x-1)^2\,(x+y-1)^2\; r_1^2\, r_2\, r_3, \text{ где}$$

$$r_1 = (xa_2+a_1)\,,\; r_2 = x^3a_1a_3 - x^3{a_2}^2 + x^2a_1a_2 - x^2a_1a_3 + x^2{a_2}^2 + {a_1}^2,$$

$$r_3 = r_{30} + y\,r_{31}, \qquad \text{причем}$$

$$\begin{aligned} r_{30} = {} & x^7{a_1}^2{a_3}^2 - 4\,x^7a_1{a_2}^2a_3 + 4\,x^7{a_2}^4 - 2\,x^6{a_1}^2a_2a_3 - 3\,x^6{a_1}^2{a_3}^2 + 4\,x^6a_1{a_2}^3 + \\ & 12\,x^6a_1{a_2}^2a_3 - 12\,x^6{a_2}^4 - 2\,x^5{a_1}^3a_3 + 5\,x^5{a_1}^2{a_2}^2 + 6\,x^5{a_1}^2a_2a_3 + 3\,x^5{a_1}^2{a_3}^2 - \\ & 12\,x^5a_1{a_2}^3 - 12\,x^5a_1{a_2}^2a_3 + 12\,x^5{a_2}^4 + 2\,x^4{a_1}^3a_2 + 6\,x^4{a_1}^3a_3 - 15\,x^4{a_1}^2{a_2}^2 - \\ & 6\,x^4{a_1}^2a_2a_3 - x^4{a_1}^2{a_3}^2 + 12\,x^4a_1{a_2}^3 + 4\,x^4a_1{a_2}^2a_3 - 4\,x^4{a_2}^4 + x^3{a_1}^4 - 6\,x^3{a_1}^3a_2 \\ & -6\,x^3{a_1}^3a_3 + 15\,x^3{a_1}^2{a_2}^2 + 2\,x^3{a_1}^2a_2a_3 - 4\,x^3a_1{a_2}^3 - 3\,x^2{a_1}^4 + 6\,x^2{a_1}^3a_2 + \\ & 2\,x^2{a_1}^3a_3 - 5\,x^2{a_1}^2{a_2}^2 + 3\,x{a_1}^4 - 2\,x{a_1}^3a_2 - {a_1}^4, \\ r_{31} = {} & 4\,x^7a_1{a_2}^2a_3 - 4\,x^7{a_2}^4 + 8\,x^6{a_1}^2a_2a_3 + x^6{a_1}^2{a_3}^2 - 4\,x^6a_1{a_2}^3 - 12\,x^6a_1{a_2}^2a_3 + \\ & 12\,x^6{a_2}^4 + 4\,x^5{a_1}^3a_3 + 4\,x^5{a_1}^2{a_2}^2 - 16\,x^5{a_1}^2a_2a_3 - 2\,x^5{a_1}^2{a_3}^2 + 12\,x^5a_1{a_2}^3 + \\ & 12\,x^5a_1{a_2}^2a_3 - 12\,x^5{a_2}^4 + 4\,x^4{a_1}^3a_2 - 8\,x^4{a_1}^3a_3 + 3\,x^4{a_1}^2{a_2}^2 + 10\,x^4{a_1}^2a_2a_3 + \\ & x^4{a_1}^2{a_3}^2 - 12\,x^4a_1{a_2}^3 - 4\,x^4a_1{a_2}^2a_3 + 4\,x^4{a_2}^4 + 2\,x^3{a_1}^3a_2 + 6\,x^3{a_1}^3a_3 - \\ & 11\,x^3{a_1}^2{a_2}^2 - 2\,x^3{a_1}^2a_2a_3 + 4\,x^3a_1{a_2}^3 + 3\,x^2{a_1}^4 - 6\,x^2{a_1}^3a_2 - 2\,x^2{a_1}^3a_3 + \\ & 5\,x^2{a_1}^2{a_2}^2 - 3\,x{a_1}^4 + 2\,x{a_1}^3a_2 + {a_1}^4 \end{aligned}$$

Таким образом, следует рассмотреть три случая:
Случай $r_1 = 0$. В этом случае сразу получаем, что $a(x) = \lambda\ln(x) + \alpha$. Подставляя это значение a в e_1, получаем

$$e_1 = \lambda\,(y-1)\,(yb_2+b_1)\,(xyb_1+\lambda\,x-\lambda) = 0,$$

откуда следует, что $(yb_2+b_1) = 0$, т.е. $b(y) = \mu\,\ln(y) + \beta$. Далее получаем, что $c_2 = 0$, т.е. окончательно

$$z = \lambda\,\ln(x) + \mu\,\ln(y) + \nu, \quad \lambda\,\mu \neq 0.$$

Случай $r_2 = 0,\ r_1 \neq 0$. Выражая a_3 из $r_2 = 0$ и подставляя это соотношения в $e_2 = 0$, получаем:

$$\frac{b_2}{b_1}\,y = \frac{a_2}{a_1}\,(x-1) = \lambda = const.$$

Получая отсюда a и b и подставляя их в $e_1 = 0$, приходим к противоречию.

Случай $r_3 = 0,\ r_1 \neq 0,\ r_2 \neq 0$. Равенство $r_3 = 0$ означает, что $r_{30} = r_{31} = 0$. Вычисляя результант r_{30} и r_{31} относительно a_3, получаем:

$$(x-1)^6\,(xa_2+a_1)^4\,x^{10}{a_1}^4\left(2\,x^2a_2 + 2\,a_1x - 2\,xa_2 - a_1\right)^8 = 0.$$

Решая уравнение $\left(2\,x^2a_2 + 2\,a_1x - 2\,xa_2 - a_1\right) = 0$, получаем

$$a_2 = -1/2\,\frac{a_1\,(2\,x-1)}{x\,(x-1)},\; a_3 = 1/4\,\frac{a_1\left(8\,x^2 - 8\,x + 3\right)}{x^2\,(x-1)^2}.$$

Подставляя это в e_2, получаем $2\,xya_1b_2 - 2\,yb_1{}^2 + a_1b_1 = 0$. Откуда $a_1 = 2\,\frac{yb_1{}^2}{2\,xyb_2+b_1}$. Тогда, подставляя эти значения для a_1, a_2, a_3 в e_1 и приравнивая к нулю член, свободный от x, получаем $b_1{}^2\,(y-1) = 0$. Противоречие. Таких решений нет. Таким образом, ответ, полученный в первом случае, окончательный:

Утверждение 6. *Решения сложности один системы Горна для примера 6 имеют вид*

$$z = \lambda\,\ln(x) + \mu\,\ln(y) + \nu, \quad \lambda\,\mu \neq 0.$$

Отметим, что в [1] этот пример фигурирует под номером 8.1.9. (стр. 304) и там приведен базис 4-мерного пространства решений. Наш результат, конечно, мог бы быть получен из этого явного описания. Отметим, что совокупность решений представляет собой линейное подпространство коразмерности один в пространстве всех решений данной системы Горна.

ПРИМЕР 7. Положим

$$P = (x + 2y + p), \quad Q = (x + y - q),$$
$$R = (x + 2y + p)(x + y + p + 1),\ S = (x + y - q)(y - s).$$

Система принимает вид:

$$\begin{aligned} G_x\,z &= x^2a_1c_1 + 2\,xyb_1c_1 + pxc_0 + xc_1a_1 + yc_1b_1 - qc_0 = 0,\\ G_y\,z &= x^2ya_1{}^2c_2 + xy^2a_1b_1c_2 + pxya_1c_1 + x^2ya_2c_1 + xya_1b_1c_2 + y^2b_1{}^2c_2 +\\ &\quad pxa_1c_1 + 3\,pyb_1c_1 + qyb_1c_1 + sxa_1c_1 + syb_1c_1 + 2\,xya_1c_1 +\\ &\quad y^2b_2c_1 + p^2c_0 - qsc_0 + 3\,yc_1b_1 + pc_0 = 0. \end{aligned}$$

Введем обозначение: через $f^{(n)}$ будем обозначать совокупность производных функции f одного переменного до порядка n включительно. Исключая c, получаем два соотношения

$$\begin{aligned} e_1(a^{(2)}, b^{(2)}) &= a_2b_1px^3 - 2\,a_1b_2px^2y - a_1b_1px^2 + a_2b_1px^2 - a_1b_2pxy - a_2b_1qx^2 +\\ &\quad 2\,a_1b_2qxy - b_1a_1px - b_1{}^2py - a_2b_1qx + a_1b_2qy - 2\,b_1{}^2qy = 0,\\ e_2(a^{(2)}, b^{(2)}) &= 0 \quad \text{– сумма 79 мономов.} \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем два выражения для b_2, т.е. $b_2 = B_{21}(a^{(2)}, b_1)$ и $b_2 = B_{22}(a^{(2)}, b_1)$. Записывая, что $B_{21} = B_{22}$ и что $(B_{21})'_x = 0$, получаем два соотношения: $e_3(a^{(3)}, b_1) = 0$ (41 моном) и $e_4(a^{(3)}, b_1) = 0$ (98 мономов). Причем e_3 линейно по b_1, а e_4 – квадратично. Выражаем b_1 из $e_3 = 0$, получаем $b_1 = B_1(a^{(3)})$. Записываем условие $(B_1)'_x = 0$, получаем $(p\,x - q)\,e_5(a^{(4)}) = 0$ (e_5 – это сумма 55 мономов).

Дальнейшее вычисление представляет собой рассмотрение дерева случаев, которые мы будем в естественной кодировке обозначать явно.

Случай 1: $(px - q) \neq 0$, $e_5 = 0$. Подставляя в $e_4(a^{(3)}, b_1) = 0$ найденное значение для b_1, получаем $ee_4(a^{(3)}) = 0$. Причем ee_4 линейно зависит от y, т.е. $ee_4(a^{(3)}) = ee_{40}(a^{(3)}) + y\,ee_{41}(a^{(3)}) = 0$. Отметим, что ee_{40} – сумма 489 мономов, ee_{41} – сумма 215 мономов. Подставляя в $B_{21}(a^{(2)}, b_1)$ найденное значение для b_1, получаем $BB_{21}(a^{(3)})$. Теперь можно написать, что $(B_1)'_y = BB_2$, получаем $e_6 = e_{61}\, e_{62} = 0$, где

$$\begin{aligned} e_{61} &= x^2 a_3 + 4\, a_2 x + x a_3 + 2\, a_1 + 2\, a_2, \\ e_{62} &= 2\, p^2 x^5 a_1 a_3 - 2\, p^2 x^5 {a_2}^2 + 2\, p^2 x^4 a_1 a_2 + 3\, p^2 x^4 a_1 a_3 - 3\, p^2 x^4 {a_2}^2 - 4\, pq x^4 a_1 a_3 + \\ & 4\, pq x^4 {a_2}^2 + 2\, p^2 x^3 a_1 a_2 + p^2 x^3 a_1 a_3 - p^2 x^3 {a_2}^2 - 4\, pq x^3 a_1 a_2 - 6\, pq x^3 a_1 a_3 + \\ & 6\, pq x^3 {a_2}^2 + 2\, q^2 x^3 a_1 a_3 - 2\, q^2 x^3 {a_2}^2 + {a_1}^2 p^2 x^2 + p^2 x^2 a_1 a_2 + 2\, {a_1}^2 pq x^2 - \\ & 4\, pq x^2 a_1 a_2 - 2\, pq x^2 a_1 a_3 + 2\, pq x^2 {a_2}^2 + 2\, q^2 x^2 a_1 a_2 + 3\, q^2 x^2 a_1 a_3 - 3\, q^2 x^2 {a_2}^2 + \\ & 2\, pq x {a_1}^2 - 2\, pq x a_1 a_2 + 2\, q^2 x a_1 a_2 + q^2 x a_1 a_3 - q^2 x {a_2}^2 + pq {a_1}^2 + q^2 a_1 a_2. \end{aligned}$$

Случай 1.1: $e_{61} = 0$, тогда $a(x) = \lambda \ln(x+1) + \mu\, (\ln(x) - \ln(x+1)) + \nu$. Подставляя это значение для a в $e_3 = 0$, получаем

$$\left(2\, x^4 p\lambda + 4\, x^3 p\lambda + x^2 p\lambda - \lambda\, x^2 q + x^2 p\mu + 2\, \mu\, x^2 q + 2\, \mu\, xq + \mu\, q\right) \\ (py b_1 + 2\, qy b_1 + \lambda\, q + p\mu) = 0.$$

Набор коэффициентов первого сомножителя имеет вид:

$$\{\mu\, q, 2\, \lambda\, p, 4\, \lambda\, p, 2\, \mu\, q, \lambda\, p - \lambda\, q + p\mu + 2\, \mu\, q\}\,.$$

В рамках нашего случая все они обратиться в ноль не могут. Поэтому в ноль обращается второй сомножитель.

Случай 1.1.1: $p + 2q \neq 0$. Тогда из $(py b_1 + 2\, qy b_1 + \lambda\, q + p\mu) = 0$ получаем

$$b(y) = -\frac{\ln(y)\, \lambda\, q}{p + 2\, q} - \frac{\ln(y)\, p\mu}{p + 2\, q} + \beta.$$

Подставим полученные значения a и b в e_2, получим что ee_2 – полином степени два от (x, y), чьи коэффициенты зависят от (p, q, s, λ, μ). Один из коэффициентов равен $\lambda\, (p + q + 1)\, (\lambda - 2\, \mu)$.

Случай 1.1.1.1.: $(\lambda - 2\, \mu) = 0$. Анализ коэффициентов ee_2 показывает, что обращение ee_2 в ноль невозможно.

Случай 1.1.1.2.: $p + q + 1 = 0$.

Случай 1.1.1.2.1.: $\lambda = \mu$. Это решение для $ee_2 = 0$. Подставляя, получаем, что решение существует только при $p = -1$ и $q = 0$. Соответствующее решение имеет вид $z = \nu\, (y/x)$.

Случай 1.1.1.2.2.: $\lambda = -\mu\, p \neq 0$. Получаем $p = s = \lambda = 0,\ q = -1,\ \mu \neq 0$. При этом получаем решение $z = \nu(y/x^2)$.

Случай 1.1.2: $p = 2q \neq 0$. Специфика этого случая по сравнению со случаем 1.1.1. в том, что e_4 зависит от b_1 не квадратично, а линейно. Из $e_4 = 0$ получаем $b_1 = B_1(a^{(2)})$, подставляя это в B_{21} получаем BB_{21}. Записывая, что $(B_1)'_y = BB_{21}$, получаем $g_0(a^{(2)}) + y\, g_1(a^{(2)}) + y^2\, g_2(a^{(2)}) = 0$. Вычисляя r, результант $g_1(a^{(2)})$ и $g_2(a^{(2)})$ относительно a_2, получаем полином от x степени 11, чей свободный член равен $(q-1)^6$. Положим $q = 1$, тогда получаем, что

$$\forall s \qquad r = -2\, \left(2\, s x^2 + s x - 2\, x^2\right)^2 \left(-2\, x^2 - 2\, x\right)^3 x \neq 0.$$

Противоречие. Решений нет.

Случай 1.2: $e_{62} = 0$. Выразим a_3 из этого соотношения и подставим в $e_2 = 0$. Получим $ee_2 = ee_{20}(a^{(3)}) + y\, ee_{21}(a^{(3)}) = 0$, откуда

$$g_1 = \left(-psx - qsx + p^2 + qp + xp + p\right)\, g^3 = 0,$$
$$g_2 = \left(xp^2 + pqx + x^2p - qp + 2\,xp - q^2 - q\right)\, g^3 = 0,$$
$$\text{где}\ \ g = \left(2\,px^2a_2 + 4\,pxa_1 + pxa_2 - 2\,qxa_2 + pa_1 - 2\,qa_1 - qa_2\right).$$

Случай 1.2.1.: $g \neq 0$. Тогда все коэффициенты обоих множителей при g^3 должны обратиться в ноль. Вот эти коэффициенты:

$$\{p\,(p+q+1)\,, -ps - qs + p\}\,, \quad \{p, p\,(p+q+2)\,, -q\,(p+q+1)\}\,.$$

Видим, что $p = 0$ (при этом $q \neq 0$), далее $s = 0$ и $q = -1$. При этом получаем решение $z = \nu(y/x^2)$ (оно совпадает с тем, что мы получили в случае 1.1.1.2.2.).

Случай 1.2.2.: $g = 0$. Выражаем отсюда a_2 и подставляем в $e_{62} = 0$, получаем

$$2\,p^2x^3 + 4\,pqx^3 + 6\,pqx^2 + 6\,pqx + pq - q^2 = 0.$$

Вот коэффициенты этого полинома

$$\{q\,(p-q)\,, 6\,pq, 2\,p\,(p+2\,q)\}\,.$$

Видим, что их одновременное обращение в ноль невозможно (т.к. $px - q \neq 0$).

Случай 2: $p = q = 0$. Уравнение $G_x(z) = 0$ принимает вид:

$$G_x\, z = x^2a_1 + 2\,xyb_1 + xa_1 + yb_1 = 0.$$

Разделяя в этом соотношении переменные, получаем

$$a_1\, \frac{(x+1)}{(2\,x+1)} = \lambda = b_1\, y, \quad \lambda \neq 0 \text{ – постоянная.}$$

Откуда интегрированием получаем

$$a(x) = \lambda(2x - \ln(x)) + \alpha,\ b(y) = \lambda\, \ln(y) + \beta.$$

Далее, исключим c из соотношения

$$G_y\, z = x^2y{a_1}^2c_2 + xy^2a_1b_1c_2 + x^2ya_2c_1 + xya_1b_1c_2 + y^2{b_1}^2c_2 +$$
$$sxa_1c_1 + syb_1c_1 + 2\,xya_1c_1 + y^2b_2c_1 + 3\,yc_1b_1 = 0.$$

При наших a и b полученное условие принимает вид

$$8\,sx^3y - 12\,sx^2y - 8\,x^2y^2 + 2\,sxy + 4\,xy^2 - 10\,xy - y^2 + 4\,y - 2 = 0.$$

при всех (x, y). Но это невозможно ни при каких s. Противоречие. Резюмируем:

Утверждение 7. *Решения сложности один системы Горна для примера 7 существуют только в двух случаях:* **Утверждение 7:** Решения сложности один системы Горна для примера 7 существуют только в двух случаях:

$$(a)\ p = -1,\ q = 0, \quad z = \nu\, \frac{y}{x},$$
$$(b)\ p = s = 0,\ q = -1, \quad z = \nu\, \frac{y}{x^2}.$$

ПРИМЕР 8. Среди гипергеометрических функций нескольких переменных имеется подкласс – это функции Лауричеллы [5], [6]. Функции Лауричеллы представляют собой решения системы уравнений, которые являются естественным обобщением гипергеометрического уравнения Гаусса. Для случая двух переменных (x, y) – это система из двух линейных уравнений для функции $z(x, y)$:

$$L_x(z) = x\,(1-x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} z\,(x,y) + (1-x)\,y\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} z\,(x,y) +$$
$$(q - (1 + p_1 + \rho)\,x)\,\frac{\partial}{\partial x} z\,(x,y) - p_1 y \frac{\partial}{\partial y} z\,(x,y) - p_1 \rho\, z\,(x,y) = 0,$$
$$L_y(z) = y\,(1-y)\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} z\,(x,y) + (1-y)\,x\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} z\,(x,y) +$$
$$(q - (1 + p_2 + \rho)\,y)\,\frac{\partial}{\partial y} z\,(x,y) - p_2 x \frac{\partial}{\partial x} z\,(x,y) - p_2 \rho\, z\,(x,y) = 0.$$

Числовые параметры (p_1, p_2, ρ) принимают любые комплексные значения, $q \in \mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Наша цель – дать описание совокупности решений системы Лауричеллы, имеющих сложность один, т.е. вида $z = c(a(x) + b(y))$ с непостоянными (a, b, c). Причем далее, чтобы избежать вычислительных трудностей, будем предполагать, что $\rho = 0$, т.е. остается три параметра (p_1, p_2, q). Подставляя, получаем:

$$L_x(z) = -x^2 {a_1}^2 c_2 - y c_2 a_1 b_1 x - x^2 a_2 c_1 + x {a_1}^2 c_2 - x a_1 c_1 p_1 +$$
$$y c_2 a_1 b_1 - p_1 y c_1 b_1 + q a_1 c_1 - x a_1 c_1 + x a_2 c_1 = 0,$$
$$L_y(z) = -y c_2 a_1 b_1 x - y^2 {b_1}^2 c_2 + x c_2 a_1 b_1 - p_2 x c_1 a_1 - y^2 b_2 c_1 +$$
$$y {b_1}^2 c_2 - y b_1 c_1 p_2 + q b_1 c_1 - y b_1 c_1 + y b_2 c_1 = 0.$$

Случай 1. $x a_1 + y b_1 = 0$. В этом случае

$$a(x) = -\lambda \ln(x) + \alpha, \quad b(y) = \lambda \ln(y) + \beta, \quad \lambda \neq 0.$$

При этом уравнения принимают вид

$$-\frac{\lambda\, c_1\,(q-1)}{x} = \frac{\lambda\, c_1\,(q-1)}{y} = 0.$$

Условие разрешимости – равенство $q = 1$, при этом $z = c(y/x)$, где $c(t)$ – произвольная аналитическая функция.

Случай 2. $x a_1 + y b_1 \neq 0$. Из каждого соотношения можно выразить c_2/c_1. Получаем

$$c_2/c_1 = LC_{21}(a^{(2)}, b_1) = LC_{22}(a_1, b^{(2)}) = 0.$$

Для существования такого c необходимо и достаточно выполнения двух условий: $LC_{21} = LC_{22}$ и $V(LC_{21}) = 0$. Записывая эти соотношения, получаем $e_1(a^{(2)}, b^{(2)}) = 0$ (20 мономов) и $e_2(a^{(3)}, b^{(2)}) = 0$ (39 мономов).

Случай 2.1. $-x^2 a_2 + q a_1 - x a_1 + x a_2 = 0$. Тогда

$$a_1 = \frac{(x-1)^{q-1}}{x^q}, \quad b_1\, y = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^{q-1}$$

Откуда следует, что $q = 1$, $a_1 = 1/x$ и $b_1 = -1/y$ и, следовательно, $x a_1 + y b_1 = 0$. Что невозможно в рамках случая 2.

Случай 2.2. $-x^2a_2+qa_1-xa_1+xa_2\neq 0$. Оба соотношения $e_1=0$ и $e_2=0$ линейны по b_2. Выражаем b_2 двумя способами: $b_2=B_{21}(a^{(2)},b_1)=B_{22}(a^{(3)},b_1)$. Получаем два условия согласования: $B_{21}=B_{22}$ дает $e_3(a^{(3)},b_1)=0$ (79 мономов), $(B_{21})'_x=0$ дает $e_4(a^{(3)},b_1)=0$ (36 мономов). Зависимость e_3 от b_1 – кубическая, e_4 от b_1 – квадратичная. Делим e_3 на e_2 (как полиномы от b_1) с остатком. Получаем условие, что остаток равен нулю, имеем:

$$-yb_1-\frac{\left(x^2a_2+qa_1+xa_1-xa_2-a_1\right)a_1}{xa_2+a_1-a_2}=0.$$

Откуда следует, что

$$yb_1=\lambda=-\frac{\left(x^2a_2+qa_1+xa_1-xa_2-a_1\right)a_1}{xa_2+a_1-a_2}.$$

И, далее, получаем

$$b(y)=\lambda\ln(y)+\beta,\quad a_2=-\frac{a_1\left(qa_1+xa_1+\lambda-a_1\right)}{x^2a_1+\lambda\, x-xa_1-\lambda},\ \lambda\neq 0.$$

Подставляя полученные значения в $e_1=e_2=e_3=e_4=0$, получаем $ee_1(a_1)=ee_2(a_1=ee_3(a_1)=ee_4(a_1)=0$. Вычисляя результант ee_1 и ee_2 по a_1, получаем полином от (x,y), коэффициент которого при x^6y равен $(q-1)^4$, поэтому его обращение в ноль, возможно лишь при $q=1$. При таком значении q все четыре уравнения оказываются совместными, но остаток при делении e_3 на e_4 оказывается равным xa_1+yb_1 и обращение его в ноль в рамках случая 2 оказывается невозможным.

Утверждение 8. *Решения сложности один системы Лауричеллы примера 8 существуют только при $q=1$. При этом решение имеет вид:*

$$z=c\left(\frac{y}{x}\right),\quad \text{где } c(t)\quad \text{произвольная непостоянная аналитическая функция.}$$

Возможно, применив большие усилия, можно проанализировать систему Лауричеллы в полном объеме, т.е. без предположения $\rho=0$.

3. Заключение

Как система (2), так и соотношение (1) – это равенства нулю дифференциальных полиномов, которые являются элементами дифференциального кольца $\mathcal{R}$, кольца дифференциальных полиномов с комплексными коэффициентами с образующими $(x,y,z,\partial_x,\partial_y)$ (и очевидными соотношениями) [7], которому соответствует поле отношений $\mathcal{F}$. Кольцо $\mathcal{R}$ – это классический объект дифференциальной алгебры. На совместные нули системы дифференциально-полиномиальных соотношений, т.е. на решения этих уравнений, можно смотреть с двух разных точек зрения. С весьма абстрактной, алгебраической точки зрения – это элементы дифференциально-алгебраического замыкания поля $\mathcal{F}$. С аналитической – это аналитические функции, представляющие решения системы дифференциально-полиномиальных уравнений. В $\mathcal{R}$ имеется подкольцо $\mathbf{C}[x,y]$ – коммутативное кольцо полиномов от (x,y). Совокупность общих нулей системы полиномов – это аффинное алгебраическое подмногообразие двумерного пространства. Это сфера ответственности алгебраической геометрии. Если мы переходим от $\mathbf{C}[x,y]$ к $\mathcal{R}$, то возникает объект, вполне аналогичный алгебраическому многообразию: совокупность общих нулей системы – *дифференциально-алгебраическое многообразие* (DA-многообразие). Термин не устоялся, есть варианты: *диффеотоп*, *diffiety* [8]. С этой точки зрения разобранные нами примеры – это примеры DA-многообразий, которые заданы тремя дифференциальными полиномами (два – система Горна и третий – уравнение первого класса). Системы Горна с этой точки зрения не очень интересны, соответствующее DA-многообразие – это линейное пространство. Добавив уравнение класса, мы создали возможности для большего разнообразия. При изучении алгебраического многообразия принято обращать внимание на ряд естественных характеристик: неприводимые компоненты, стратификация точек многообразия по размерности касательного пространства и т.д. При изучении DA-многообразий эти характеристики также представляют интерес. Однако имеется своя специфика.

Например, размерность линейного пространства решений системы (2) может быть как конечной, так и бесконечной. В случае, если она бесконечна, возникает вопрос:

Вопрос 9: (a) При каком условии конечна размерность пересечения? (b) Если размерность конечна, то как ее оценить? (c) Как оценить число неприводимых компонент?

DA-многообразие, заданное уравнением $d_1(z) = 0$ – это конус, DA-многообразие, заданное системой Горна – это линейное пространство. Однако, когда мы говорим о конических сечениях, то имеется в виду, что секущая плоскость не обязана проходить через вершину конуса, как в наших примерах. От этого ограничения легко уйти. Пусть $z_0(x,y)$ – это некая аналитическая функция сложности один, которая является решением системы Горна, т.е. $G_x(z_0) = G_y(z_0) = 0$. Тогда мы можем рассмотреть аффинное подпространство, состоящее из функций вида $\{z = z_0 + \delta z\}$, где δz решение системы Горна, т.е. $G_x(\delta z) = G_y(\delta z) = 0$ и построить его пересечение с конусом Cl^1, которое заведомо не пусто (там лежит z_0).

Некоторые из разобранных здесь примеров систем Горна, представляют собой системы с параметрами. Эта особенность без труда интерпретируется средствами дифференциальной алгебры. При определении дифференциального кольца $\mathcal{R}$ эти параметры следует включить в поле констант.

Отметим, далее, что все наши рассмотрения можно перенести на функции бóльшего числа переменных. Функции сложности один от n переменных – это аналитические функции вида $z(x_1,\ldots,x_n) = c(a_1(x_1) + \cdots + a_n(x_n))$, где $(a_1,\ldots,a_n,c)$ – функции одного переменного. Класс таких функций, так же, как и в случае двух переменных, задается набором дифференциальных полиномов.

Рассмотрение примеров, в которых фигурируют параметры, позволяет отметить, что во всех разобранных ситуациях для существования решений сложности один необходимы ограничения на параметры. Т.е. решения существуют лишь для собственного алгебраического подмножества пространства параметров.

Вопрос 10: Существуют ли голономные системы Горна с параметрами, т.ч. решения сложности один имеются для всех их значений?

Пусть имеется некоторая система Горна с параметрами. И пусть решения этой системы сложности не выше некоторого фиксированного n существуют лишь при выполнении некоторых нетривиальных аналитических соотношений (для всех наткральных n). Тогда, как нетрудно показать, все решения для значения параметров общего положения (вне счетной системы соотношений) имеют бесконечную сложность. Если же предположить, что для некоторой системы Горна с параметрами при условии голономности все решения имеют конечную сложность, то существует значение N, т.ч. что *все* решения при *всех* значениях параметров имеют сложность не выше N.

Автор благодарен А.К.Циху и Т.М.Садыкову за участие в обсуждении этой работы.

Список литературы

[1] Т.М.Садыков, А.К.Цих, Гипергеометрические и алгебраические функции, *М."Наука*, (2014), 1-408.

[2] V.K.Beloshapka, Analytic Complexity of Functions of Two Variables, Russian Journal of Mathematical Physics, v. 14, no. 3 (2007), pp, 243-249.

[3] V.K.Beloshapka, Stabilizer of a Function in the Gauge Group, Russian Journal of Mathematical Physics, v. 24, no. 2 (2017), pp.1-10.

[4] Бляшке В., Введение в геометрию тканей, *М. Физматгиз*, (1959).

[5] G. Lauricella, Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili, *Rend. Circ. Mat.Palermo*, **7**(1893), 111-158.

[6] С. И. Безродных, Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана–Гильберта и некоторые приложения, УМН, 2018, том 73, выпуск 6, сс.3–94.

[7] J. Ritt, Differential Algebra, *American Mathematical Soc.*, (1950), 184 p.

[8] Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, (1988), **28** , 5–289.

On Hypergeometric Functions of Two Variables of Complexity One

Valerii K. Beloshapka

For a series of examples of Horn systems and the Lauricella system for functions of two variables the description of solution of complexity one is given. Several questions are formulated.

Keywords: analytical complexity,hypergeometric functions, Horn system, Lauricella system, differential ring