УДК 517.55

В. К .Белошапка

Геометрические конструкции в теории аналитической сложности

В работе в контексте теории аналитической сложности рассмотрены две геометрические конструкции. Первая: на совокупности аналитических функций построена метрика, инвариантная относительно действия калибровочной группы. Вторая: получено необходимое дифференциально-алгебраическое условие принадлежности функции касательному пространству к классу функций двух переменных аналитической сложности не выше чем два в точке $z_0 = x^3\,y^2 + xy$. Этот результат позволил привести простой пример полинома степени пять, чья аналитическая сложность равна трем. А именно $z = x^3\,y^2 + x\,y + \pi\,x^2\,y^3$.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: Аналитические функции, аналитическая сложность, метрическое пространство.

§ 1. Введение

Операция суперпозиции (подстановки) позволяет из функций меньшего числа переменных получать функции бо́льшего числа переменных. В этой тематике имеется ряд ярких достижений, но много вопросов остаются открытыми [1], [2], [3], [4], [5]. Чтобы придать рассмотрению определенность, следует уточнить класс функций и число переменных. Вопрос о возможности представления функций двух переменных с помощью функций одного переменного (проблема "$2 \to 1$"), как и другие похожие вопросы, таит немало интересных и нерешенных проблем. Данная работа примыкает к кругу публикаций ([6], [7] и др.), где этот вопрос обсуждается в контексте аналитических функций.

Иерархию классов Cl^n, $n = 0, 1, 2, \dots$, определяем индуктивно. При этом Cl^0 – это аналитические функции одного переменного (x или y), а класс Cl^{n+1} состоит из аналитических функций, имеющих локальное представление вида $z = c(A_n(x, y) + B_n(x, y))$, где A_n и B_n – это функции из Cl^n, а $c(t)$ – аналитическая функция одного переменного. Одна из основных характеристик $z(x, y)$, аналитической функции двух переменных, – это ее *сложность* $N(z)$. То, что $N(z) = n$, означает, что $z \in Cl^n \setminus Cl^{n-1}$, если же z не попала ни в один из классов, то пишем, что $N(z) = \infty$. При этом сложность элемента аналитической функции, вычисленная в одной точке, будет совпадать со сложностью в любой другой неособой точке. Множество особых точек для представления функции, голоморфной в области двумерного пространства суперпозицией минимальной сложности, – это собственное аналитическое подмножество этой области.

При построении иерархии можно базовую функцию $(x + y)$ заменить на произвольную аналитическую функцию двух переменных $\phi(x, y)$ и получить иерархию Cl^n_ϕ и, соответственно, относительную сложность $N_\phi(z)$. Зафиксируем некоторый росток функции двух переменных $\varphi(x, y)$ с условием $\varphi'_x\, \varphi'_y \neq 0$. Тогда можно определить возрастающую последовательность классов функций. Положим $Cl^1_\varphi = [\varphi]$. Далее по индукции: Cl^{n+1}_φ – это совокупность функций, имеющих ростки, эквивалентные (под действием калибровочной группы, см. ниже) росткам функций вида $c(\varphi(A_n(x, y), B_n(x, y)))$, где $A_n(x, y)$, $B_n(x, y) \in Cl^n_\varphi$, $c(t)$ – аналитична.

Характеристики сложности, как $N(z)$, так и $N_\varphi(z)$, инвариантны относительно некоторого действия. Пусть f – росток аналитической функции двух переменных в начале координат и $f(0, 0) = 0$ (стандартный росток). Обозначим через G группу ростков голоморфных отображений вида $\{u \to \lambda\, u + o(u)\}$, $\lambda \neq 0$, обозначим $\mathcal{G} = G \times G \times G$. И если $g = (a(u), b(u), c(u)) \in \mathcal{G}$, то обозначим $\varphi(x, y) = c(f(a(x), b(y))$ через $g \circ f$. При этом будем говорить, что φ и f эквивалентны.

Если f – росток в (p, q), то $(f(x - p, y - q) - f(p, q))$ – *стандартный* росток. Отношение эквивалентности стандартных ростков порождает отношение эквивалентности произвольных ростков, голоморфных и полных аналитических функций. Пусть в окрестности D точки (x_0, y_0) имеется две голоморфные функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ (элементы аналитических функций). Пусть росток $\tilde{F}_1(x, y, x_0, y_0)$ эквивалентен ростку $\tilde{F}_2(x, y, x_0, y_0)$. Тогда утверждается, что для всех путей $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, выходящих из (x_0, y_0), в $D \setminus \sigma$ (σ – собственное аналитическое подмножество) существует непрерывное по t семейство ростков $g_t = (a_t(s), b_t(s), c_t(s)) \in \mathcal{G}$, т.ч. $\tilde{F}_2(x, y, x(t), y(t)) = g_t \circ \tilde{F}_1(x, y, x(t), y(t))$. Т.е. ростки F_1 и F_2 будут эквивалентны в каждой точке их общей области определения минус собственное аналитическое подмножество (дискриминантное подмножество). В этом смысле факт локальной эквивалентности ростков перестает быть локальным. Если f – росток, то класс полных аналитических функций, эквивалентных функции, порожденной этим ростком, мы будем обозначать $[f]$.

Совокупность всех аналитических функций двух комплексных переменных (x, y) обладает естественной структурой пучка ростков. С этой точки зрения полная аналитическая функция, порожденная некоторым конкретным ростком, представляет собой связную компоненту этого пучка, содержащую данный росток. Введенное выше отношение эквивалентности – это отношение эквивалентности на пучке ростков.

Отметим также, что с точностью до этой эквивалентности все аналитические функции одного переменного сводятся к следующим четырем классам: $z = 0,\ z = 1,\ z = x,\ z = y$.

§ 2. Аналитические функции как метрическое пространство

Наша ближайшая цель – превратить совокупность аналитических функций двух переменных $\mathcal{A}$ в метрическое пространство. При этом мы будем предполагать, что мы удалили из этой совокупности константы и функции одного переменного. Таким образом, $\mathcal{A}$ – это совокупность аналитических функций с тем условием, что $F'_x\,F'_y$ не есть тождественный ноль.

Для двух ростков аналитических функций двух переменных $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ введем следующую характеристику:

$$\rho([\varphi],[\psi]) = \log(\max\{N_{[\varphi]}([\psi]), N_{[\psi]}([\varphi])\}).$$

Теорема 1: Функция ρ определяет на $\mathcal{A}$ метрику.

Доказательство: Поскольку $N_{[\varphi]}([\psi]) \geqslant 1$, то $\rho([\varphi],[\psi]) \geqslant 0$. Равенство $\rho([\varphi],[\psi]) = 0$ равносильно тому, что $[\varphi] = [\psi]$. Симметричность функции ρ видна из определения. Осталось проверить неравенство треугольника.

В связи с этим отметим следующее свойство относительной сложности. Пусть имеются три аналитические функции $(\varphi,\ \psi,\ \chi)$. Причем $N_\varphi(\psi) \leqslant l$, $N_\psi(\chi) \leqslant m$, тогда $N_\varphi(\chi) \leqslant l\,m$. Отсюда сразу следует необходимое неравенство. А именно, что для любых трех классов $[\varphi]$, $[\psi]$, $[\chi]$ выполнено неравенство

$$\rho([\varphi],[\chi]) \leqslant \rho([\varphi],[\psi]) + \rho([\psi],[\chi]).$$

Теорема доказана.

Метрика ρ может принимать значение ∞, и такую метрику иногда называют квазиметрикой. При этом нетрудно превратить ее в метрику, принимающую только конечные значения. Действительно, если $h(s) = s/(1+s)$, то величина

$$\tilde{\rho}([\varphi],[\chi]) = h(\rho([\varphi],[\chi]))$$

также является метрикой на $\mathcal{A}$, но при этом $\tilde{\rho}([\varphi],[\chi]) \leqslant 1$ для любой пары функций.

В связи с тем, что ρ может принимать как конечные, так и бесконечные значения можно ввести на $\mathcal{A}$ еще одно отношение эквивалентности. А именно, отношение "*находиться на конечном расстоянии*". Вся совокупность $\mathcal{A}$ распадается в дизъюнктное объединение по "типам". Функции (классы), принадлежащие одному типу, находятся на конечном расстоянии, разным – на бесконечном.

Можно отметить, что мощность множества типов не может быть счетной.

Метрика, описанная выше, специализирована для сложности типа $(2 \to 1)$. Т.е. для изучения вопросов представимости функций двух переменных с помощью суперпозиции функций одного переменного. Но нетрудно распространить ее и на общий случай. Например, для функций трех переменных возможны два подхода: $(3 \to 1)$ и $(3 \to 2)$. Введение метрики возможно в обоих случаях. Действительно, единственное свойство метрики, которое нуждается в доказательстве – это неравенство треугольника. Это неравенство следует из мультипликативной оценки относительной сложности, которая имеет место в очень широком контексте.

§ 3. Классы сложности как подмногообразия в пространстве функций

Классам сложности Cl^n, введенным выше, можно сопоставить I^n – радикальный дифференциальный идеал, состоящий из дифференциальных полиномов с рациональными коэффициентами, которые аннулируют функции из $z \in Cl^n$ (см. [7]). По теореме Ритта-Роденбаша [8] каждый такой идеал имеет конечный базис $D_n = (d_1, \ldots, d_l)$. В силу инвариантности любого класса Cl^n относительно действия калибровочной группы $\mathcal{G}$ этот базис содержит только полиномы, не зависящие явно от переменных (x, y, z), а только от производных функции z с некоторыми условиями однородности.

Дифференциальный идеал I^1 имеет одну образующую.

$$d(z) = {z'_y}^2 z'_x z'''_{xxy} - {z'_y}^2 z''_{xy} z''_{xx} - z'_y {z'_x}^2 z'''_{xyy} + z''_{yy} {z'_x}^2 z''_{xy}.$$

Пользуясь тем, что $Cl^1 = \{z : d(z) = 0\}$ нетрудно показать, что сложность $z = x^2 + xy$ по отношению к $x + y$ равна двум.

Cl^2 состоит из функций вида

$$z = S(C(A(x) + B(y)) + R(P(x) + Q(y))). \tag{3.1}$$

Для вычисления образующих идеалов I^n имеются алгоритмы. Однако большой объем вычислений приводит к тому, что уже вычисление D_2 представляется недоступным [9].

Нетрудно показать, что все полиномы степени два не выходят за рамки Cl^2. Также нетрудно показать, что полином степени 11 общего положения имеет сложность выше, чем два. Вопрос о конкретном примере полинома сложности три – гораздо сложнее. В [10] были предложены примеры функций (в том числе полиномы) произвольной наперед заданной сложности. Однако даже если говорить только о полиномах сложности три – это полиномы астрономически высокой степени.

Ниже предлагается рассмотреть классы сложности как бесконечномерные подмногообразия некоторого функционального пространства. На этом пути удается конструктивно описать касательное пространство к Cl^2 в некоторой точке. Это, далее, позволяет явно предъявить полином степени три, имеющий аналитическую сложность три.

Перейдем к нашему построению.

Зафиксируем функцию $Z_0 = x^3\, y^2 + x\, y$ как точку Cl^2. Функцию Z_0 можно представить в виде (3.1), полагая

$$S_0(u) = u,\ C_0(u) = \exp(u),\ R_0(u) = \exp(u),\ A_0(u) = 3\,\ln(u),\ B_0(u) = 2\,\ln(u),$$
$$P_0(u) = \ln(u),\ Q_0(u) = \ln(u).$$

Теперь проварьируем этот набор из семи функций.

$$S(u) = u + t\,s(u),\ C(u) = \exp(u) + t\,c(u),\ R(u) = \exp(u) + t\,r(u),$$
$$A(u) = 3\,\ln(u) + t\,a(u),\ B(u) = 2\,\ln(u) + t\,b(u),$$
$$P(u) = \ln(u) + t\,p(u),\ Q(u) = \ln(u) + t\,q(u),$$

добавив к каждой из них возмущение, линейное по параметру t. Т.е. мы в пространстве семи функциональных параметров

$$(S(u), C(u), R(u), A(u), B(u), P(u), Q(u))$$

провели через точку $(u, \exp(u), \exp(u), 3\,\ln(u), 2\,\ln(u), \ln(u), \ln(u))$ прямую в направлении $(s(u), c(u), r(u), a(u), b(u), p(u), q(u))$, где функции (s, c, r, a, b, p, q) – аналитичны и композиция имеет непустую область определения. В возмущенном выражении $Z(x, y, t) = (x^3\,y^2 + x\,y) + t\,z(x, y) + o(t)$ выделим линейное по t слагаемое. Получим параметрическое описание $T\,Cl^2_{(x^3\,y^2+x\,y)}$ – касательного пространства к Cl^2 в точке $Z_0 = (x^3\,y^2 + x\,y)$

$$z(x, y) = s(x^3\,y^2+xy)+c(x^3\,y^2)+x^3\,y^2\,(a(x)+b(y))+r(x\,y)+(p(x)+q(y))xy. \quad (3.2)$$

Наша ближайшая цель – перейти от параметрического описания касательного пространства к определяющим его соотношениям. Для этого мы должны исключить из соотношения (3.2) функциональные параметры
(s, c, a, b, p, q, r). В дальнейшем будем обозначать производные нижними индексами, т.е. как a_p, b_q, $z_{m,n}$ и т.д. Причем всю совокупность производных функции z порядков до n включительно будем обозначать $z^{(n)}$, аналогично $a^{(n)}$ и т.д.

Положим

$$\triangle_s = \frac{\frac{\partial}{\partial\,x}}{3x^2y^2 + y} - \frac{\frac{\partial}{\partial\,y}}{2x^3y + x}, \quad \triangle_c = \frac{\frac{\partial}{\partial\,x}}{3x^2y^2} - \frac{\frac{\partial}{\partial\,y}}{2x^3y}, \quad \triangle_r = \frac{\frac{\partial}{\partial\,x}}{y} - \frac{\frac{\partial}{\partial\,y}}{x}.$$

Ядро $\triangle_s$ – это функции вида $s(x^3y^2+xy)$, ядро $\triangle_c$ – это функции вида $c(x^3y^2)$, ядро $\triangle_r$ – это функции вида $r(xy)$. Применим к (3.2) дифференциальный оператор $\triangle_s$. Получаем

$$\begin{gathered} e_1(a^{(1)}, b^{(1)}, c_1, p_1, q^{(1)}, r^{(1)}, z^{(1)}) = 2\,a_1x^6y^3 - 3\,b_1x^5y^4 + a_1x^4y^2 + \\ 2\,p_1x^4y^2 - b_1x^3y^3 - 3\,q_1x^3y^3 + a_0x^3y^2 + b_0x^3y^2 + c_1x^3y^2 - p_0x^3y^2 - \\ q_0x^3y^2 - r_1x^3y^2 - 2\,z_{1,0}x^3y + 3\,z_{0,1}x^2y^2 + p_1x^2y - q_1xy^2 - z_{1,0}x + z_{0,1}y = 0. \end{gathered} \quad (3.3)$$

Далее, выражая из (3.3) функцию c_1 и применяя $\triangle_c$, получаем

$$\begin{gathered} e_2(a^{(2)}, b^{(2)}, p^{(2)}, q^{(2)}, z^{(2)}) = 2\,z_{1,0}x + 3\,z_{0,1}y - 2\,p_2x^3y - 3\,q_2xy^3 - \\ 5\,z_{1,1}xy - 4\,a_2x^7y^3 - 9\,b_2x^5y^5 - 4\,p_2x^5y^2 - 2\,a_2x^5y^2 - 9\,q_2x^3y^4 - \\ 3\,b_2x^3y^4 - 12\,z_{1,1}x^3y^2 + 4\,z_{2,0}x^4y + 9\,z_{0,2}x^2y^3 - r_2\,x^4y^3 + 2\,z_{2,0}x^2 + 2\,p_1x^4y^2 - \\ 12\,q_1x^3y^3 + 3\,z_{0,2}y^2 - 6\,a_1x^6y^3 - 6\,b_1x^5y^4 - 4\,a_1x^4y^2 - \\ 6\,z_{1,0}x^3y + 6\,z_{0,1}x^2y^2 - p_1x^2y - 4\,q_1xy^2 = 0 \end{gathered} \quad (3.4)$$

Выражая из (3.4) функцию r_2 и применяя к полученному равенству $\triangle_r$, получаем,

$$\begin{gathered} e_3(a^{(3)},b^{(3)},p^{(3)},q^{(3)},z^{(3)}) = -6\,z_{0,1}y - 4\,a_3x^8y^3 - 2\,a_3x^6y^2 - 4\,p3x^6y^2 + \\ 4\,z_{3,0}x^5y - 16\,z_{2,1}x^4y^2 + 21\,z_{1,2}x^3y^3 - 2\,p_3x^4y - 7\,z_{2,1}x^2y + 8\,xz_{1,2}y^2 + \\ 9\,x^5y^6b_3 + 3\,x^3y^5b_3 + 9\,x^3y^5q_3 - 9\,x^2y^4z_{0,3} + 3\,xy^4q_3 + 2\,z_{3,0}x^3 - 3\,y^3z_{0,3} - \\ 3\,p_2x^3y + 13\,q_2xy^3 + 6\,z_{1,1}xy - 18\,a_2x^7y^3 + 15\,b_2x^5y^5 - 10\,p_2x^5y^2 - \\ 8\,a_2x^5y^2 + 30\,q_2x^3y^4 + 6\,b_2x^3y^4 + 14\,z_{2,0}x^4y - 24\,z_{0,2}x^2y^3 + 4\,z_{2,0}x^2 - 12\,z_{0,2}y^2 - \\ 12\,a_1x^6y^3 - 4\,a_1x^4y^2 - 2\,p_1x^4y^2 + 12\,q_1x^3y^3 + 6\,z_{1,0}x^3y - 6\,z_{0,1}x^2y^2 + 8\,q_1xy^2 = 0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Итак, мы получили дифференциальный полином третьего порядка, который не зависит от $(s(x^3\,y^2+x\,y),\ c(x^3\,y^2),\ r(x\,y))$, а зависит только от $(a(x),b(y),p(x),q(y))$ и функции $z(x,y)$. Наша цель состоит в том, чтобы, используя соотношение (3.5) и его дифференциальные следствия, получить какое-либо соотношение только на функцию z. Т.е. мы будем последовательно исключать функции $(q(y),b(y),p(x),a(x))$ (именно в таком порядке). Вычисления осуществлялись с помощью системы Maple. Текст программы для Maple, которая осуществляет описанные выше вычисления, доступен на <http://vkb.strogino.ru/> (раздел "другое" п.3).

Объемы (число мономов) и дифференциальные порядки промежуточных дифференциальных следствий в процессе вычислений будут возрастать. Здесь мы не будем выписывать их явно, но будем следить за схемой вычисления, а также отмечать дифференциальные порядки полиномов и число содержащихся в них мономов.

Выразим из соотношения (3.5) функцию q_3, получаем $q_3 = Q_3(a^{(3)},b^{(3)},p^{(3)},q^{(2)},z^{(3)})$ и записывая условие того, что она не зависит от x, получаем соотношение $e_4(a^{(4)},b^{(3)},p^{(4)},q^{(2)},z^{(4)}) = 0$ (68 мономов).

Выражая из $e_4 = 0$ функцию q_2 , получаем $q_2 = Q_2(a^{(4)},b^{(3)},p^{(4)},q_1,z^{(4)})$ и записывая условие того, что она не зависит от x, получаем соотношение $e_5(a^{(5)},b^{(3)},p^{(5)},z^{(5)}) = 0$ (52 монома, от q не зависит). Записывая соотношение $(Q_2)'_x = Q_3$, получаем $e_6(a^{(4)},b^{(4)},p^{(4)},z^{(5)}) = 0$ (75 мономов).

Переходим к исключению b. Выражая из $e_5 = 0$ функцию b_3 , получаем $b_3 = B_3(a^{(5)},b_2,p^{(5)},z^{(4)})$ и записывая условие того, что она не зависит от x, получаем соотношение $e_7(a^{(6)},p^{(6)},z^{(6)}) = 0$ (61 моном, от b не зависит). Выражая из $e_6 = 0$ функцию b_4 , получаем $b_4 = B_4(a^{(5)},b_2,p^{(5)},z^{(6)})$ и записывая условие того, что она не зависит от x, получаем соотношение $e_7(a^{(6)},p^{(6)},z^{(6)}) = 0$ (61 моном, от b не зависит). Записывая соотношение $(B_3)'_y = B_4$, получаем $e_8(a^{(5)},b_2,p^{(5)},z^{(6)}) = 0$ (131 моном). Выражая из $e_8 = 0$ функцию b_2 , получаем $b_2 = B_4(a^{(5)},p^{(5)},z^{(6)})$ и записывая условие того, что она не зависит от x, получаем соотношение $e_9(a^{(6)},p^{(6)},z^{(7)}) = 0$ (148 мономов). Соотношение $(B_2)'_y = B_3$ дает $e_{10}(a^{(5)},p^{(5)},z^{(7)}) = 0$ (134 монома).

Переходим к исключению p. Выражая из $e_{10} = 0$ функцию p_5 , получаем $p_5 = P_5(a^{(5)},p^{(4)},z^{(7)})$ и записывая условие того, что она не зависит от y, получаем соотношение $e_{11}(a^{(5)},p^{(4)},z^{(8)}) = 0$ (247 мономов). Подставляя в e_7 вместо

p_6 выражение $(P_5)'_x$, получаем $ee_7(a^{(6)}, p^{(4)}, z^{(8)}) = 0$ (336 мономов). Аналогично, подставляя в e_9 выражения для p_5 и p_6, получаем $ee_9(a^{(6)}, p^{(4)}, z^{(8)}) = 0$ (404 монома). Выразим из $e_{11} = 0$ функцию p_4 и подставим полученное выражение в $ee7 = 0$ и в $ee9 = 0$. Получим $eee_7(a^{(6)}, z^{(8)}) = 0$ (354 монома, от p не зависит) и $eee_9(a^{(6)}, z^{(8)}) = 0$ (418 мономов, от p также не зависит).

Переходим к исключению a из двух последних соотношений. Выразим a_6 из $eee_7 = 0$, получим $a_6 = A_{61}(a^{(5)}, z^{(8)})$ и из $eee_9 = 0$, получим $a_6 = A_{62}(a^{(5)}, z^{(8)})$. Записывая, что $A_{61} = A_{62}$, получим $e_{12}(a^{(5)}, z^{(8)}) = 0$ (266 мономов). Из $e_{12} = 0$ получаем $a_5 = A_5(a^{(4)}, z^{(8)})$. Дифференцируя A_5 получаем еще одно выражение для a_6, а именно – $a_6 = A_{63}(a^{(4)}, z^{(9)})$. Записывая, что $A_{63} = A_{61}$, получим $e_{13}(a^{(4)}, z^{(9)}) = 0$ (533 монома). Из $e_{13} = 0$ получаем $a_4 = A_4(a^{(3)}, z^{(9)})$. Дифференцируя A_4 получаем еще одно выражение для a_5, а именно – $a_5 = AA_5(a^{(3)}, z^{(10)})$. Записывая, что $A_5 = AA_5$, получим $e_{14}(z^{(10)}) = 0$ (705 мономов, от a не зависит).

Полином 10-го порядка e_{14} – это и есть итог наших вычислений. Это выражение линейно по производным функции z от первого до десятого порядка.

В итоге мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 2:
(a) $T\,Cl^2_{(x^3\,y^2+x\,y)}$, касательное пространство к Cl^2 в точке $Z_0 = (x^3\,y^2 + x\,y)$, состоит из аналитических функций $z(x, y)$ вида

$$z(x,y) = s(x^3\,y^2 + xy) + c(x^3\,y^2) + x^3\,y^2\,(a(x) + b(y)) + r(x\,y) + (p(x) + q(y))xy,$$

где (a, b, c, p, q, r, s) – аналитические функции одного переменного, т.ч. сумма определена в некоторой непустой области.
(b) Соотношение $e_{14}(z^{(10)}) = 0$ – это необходимое условие того, что $z(x, y)$ имеет представление вида (a).
(c) Полином $e_{14}(z^{(10)})$ (705 мономов) – это линейное выражение от производных функции z порядков не выше десятого (65 производных), коэффициенты – это полиномы от (x, y) с целыми коэффициентами, расположенными на отрезке $[-306021888, 306021888]$, чьи степени не превосходят 52-х.

Располагая необходимым условием принадлежности функции касательному пространству, нетрудно привести примеры простых выражений, которые ему не принадлежат. Например, если подставить $z = x^2\,y^3$ в e_{14} , то получаем

$$\frac{e_{14}(z)}{-120\,x^2y^3} = 32256\,x^{28}y^{14} + 486432\,x^{26}y^{13} + 414672\,x^{24}y^{12} + 693120\,x^{22}y^{11} - 142140\,x^{20}y^{10} - 107594\,x^{18}y^9 + 295122\,x^{16}y^8 + 127164\,x^{14}y^7 - 49287\,x^{12}y^6 - 28929\,x^{10}y^5 + 21606\,x^8y^4 + 5541\,x^6y^3 + 501\,x^4y^2 - 54\,x^2y + 40 \neq 0.$$

Пусть $a \in \mathbf{C}^{21}$ – пространство коэффициентов общего многочлена от (x, y) степени не выше пяти и $p(x, y, a)$ – полином, чьи коэффициенты равны a. Пусть $\sigma_2 = \{a \in \mathbf{C}^{21} : N(p(x, y, a)) \leqslant 2\}$.

Теорема 3:
(a) Сложность многочлена

$$W = x^3\, y^2 + x\, y + \pi\, x^2\, y^3$$

относительно $(x+y)$ равна трем, т.е. $N(W) = 3$.
(b) σ_2 – собственное алгебраическое подмножество $\mathbf{C}^{21}$, причем σ_2 – множество общих нулей набора полиномов от a с целыми коэффициентами.
Доказательство: То, что сложность W не превосходит трех – очевидно. Поэтому достаточно показать, что $W \notin Cl^2$. Рассмотрим прямую l, проходящую через $(x^3\, y^2 + xy)$ в направлении $z = x^2\, y^3$, т.е. $l = \{Z(x,y,t) = ((x^3\, y^2 + xy) + t\, x^2\, y^3\}$. Если бы l целиком содержалась в Cl^2, то ее направляющий вектор был бы касательным. Но это не так и, следовательно, l в Cl^2 целиком не содержится. Рассмотрим $(d_1(Z(x,y)), \ldots, d_s(Z(x,y)))$ – дифференциальные полиномы, определяющие Cl^2, и их сужение на l. Мы получим набор полиномов $(P_1(t), \ldots, P_s(t))$ с целыми коэффициентами переменного t, причем не все из них тождественно равны нулю. Пусть $\tilde{P}(t)$ – такой полином. Т.е. если для некоторого t функция $Z(x,y,t) \in Cl^2$, то $\tilde{P}(t) = 0$. Нули этого полинома – это конечный набор алгебраических чисел (над полем $\mathbf{Q}$). Поскольку число π – неалгебраично, то $(x^3\, y^2 + x\, y + \pi\, x^2\, y^3) \notin Cl^2$. Это доказывает (a).

Рассмотрим результат подстановки общего полинома пятой степени $Z = p(x,y,a)$ в $(d_1, \ldots, d_s)$. Получим набор полиномиальных соотношений на $a \in \mathbf{C}^{21}$ с целыми коэффициентами. Поскольку у нас есть полином степени пять $p(x,y,a_0)$, который не попал в Cl^2, то эти соотношения задают собственное алгебраическое подмножество $\mathbf{C}^{21}$. Это доказывает (b).

Хотя дифференциальные полиномы, задающие второй класс, не даны нам явно, однако имеется алгоритм их построения. Анализ этого алгоритма позволяет написать оценки сверху на дифференциальный порядок, число мономов и величину коэффициентов (это целые числа). Используя такие оценки, нетрудно получить оценку сверху модулей корней полинома $P(t)$ из доказательства теоремы 3. Это позволяет заменить в полиноме W неалгебраический коэффициент π на очень большое (или очень маленькое) рациональное число. После чего мы получим пример многочлена степени пять сложности три с целыми коэффициентами.

Список литературы

[1] D. Hilbert, "Mathematische Probleme", *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1900, 253–297.

[2] A. Ostrowski, "Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen (англ.перевод https://arxiv.org/abs/2211.02088)", *Math.Z.*, **8** (1920), 241-298.

[3] В. И. Арнольд, "О функциях трех переменных", *Докл. АН СССР*, **114**:4 (1957), 679–681.

[4] А. Н. Колмогоров, "О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций одного переменного и сложения", *Докл. АН СССР*, **114**:5 (1957), 953–956.

[5] А. Г. Витушкин, "13-я проблема Гильберта и смежные вопросы", *УМН*, **59**:1(355) (2004), 11–24.

[6] V. K. Beloshapka, “Analytical Complexity: Development of the Topic”, *Russian Journ. of Math. Physics*, **19**:4 (2012), 13–22.

[7] V. K. Beloshapka, “Decomposition of functions of finite analytical complexity”, *Журн. СФУ. Сер. Мат. и физ*, **11**:6 (2018), 680–685.

[8] И. Капланский, *Введение в дифференциальную алгебру*, М., 1959.

[9] В. К. Белошапка, “О сложности дифференциально-алгебраического описания классов аналитической сложности”, *Матем. заметки*, **105**:3 (2019), 323–331.

[10] М. А. Степанова, “О функциях конечной аналитической сложности”, *Труды ММО*, **83**:1 (2022), 1-16.

В. К .Белошапка (V. K. Beloshapka)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Московский центр фундаментальной и прикладной
математики МГУ
E-mail: vkb@strogino.ru

Поступило в редакцию
03.06.2023