Математические заметки

Том 115 выпуск 5 май 2024

УДК 517.55

Аналитическая сложность: функции с 1-мерным стабилизатором в калибровочной группе

В. К. Белошапка

Получено дифференциальное условие того, что аналитическая функция двух переменных имеет одномерный стабилизатор в калибровочной псевдогруппе. Дано мультипликативное представление таких функций (однородные функции). Получено уточнение теоремы о стабилизаторе и построены два важных примера. Поставлен ряд вопросов.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: суперпозиции, аналитическая сложность, дифференциальные полиномы.

DOI: https://doi.org/??

С помощью операции суперпозиции (подстановки) можно из функций меньшего числа переменных получать функции бо́льшего числа переменных. Есть ситуации, когда так можно представить любую функцию, но, как правило, это не так [1], [2]. Чтобы придать рассмотрению определенность, следует уточнить класс функций и число переменных. Вопрос о возможности представления функций двух переменных с помощью функций одного переменного (проблема “$2 \to 1$”) таит немало интересных и нерешенных проблем. Данная работа примыкает к кругу публикаций ([3], [4] и др.), где этот вопрос обсуждается в контексте аналитических функций. Под аналитической функцией мы понимаем аналитическую функцию в смысле Вейерштрасса, т.е. результат всевозможных аналитических продолжений некоторого стартового ростка.

Иерархию классов Cl^n, $n = 0, 1, 2, \dots$, определяем индуктивно. При этом Cl^0 – это аналитические функции одного переменного (x или y), а класс Cl^{n+1} состоит из аналитических функций, имеющих локальное представление вида $z = c(A_n(x, y) + B_n(x, y))$, где A_n и B_n – это функции из Cl^n, а $c(t)$ – аналитическая функция одного переменного. Одна из основных характеристик $z(x, y)$, аналитической функции двух переменных, – это ее *сложность* $N(z)$. То, что $N(z) = n$, означает, что $z \in Cl^n \setminus Cl^{n-1}$, если же z не попала ни в один из классов, то пишем, что $N(z) = \infty$. При этом сложность элемента аналитической функции, вычисленная в одной точке, будет совпадать со сложностью в любой другой неособой точке. Множество особых точек для представления функции суперпозицией минимальной сложности – это собственное аналитическое подмножество.

Полученные в этой области результаты и наблюдения позволяют сформулировать, некоторое общее и неформальное утверждение, которое уместно назвать принципом (DM-*принцип*, differential modelling principle). Причем речь идет не только о проблеме "$2 \to 1$", но и об общем случае "$m \to n$".

Любой вопрос о возможности представления аналитической функции суперпозицией специального вида имеет эквивалентную переформулировку в виде вопроса о принадлежности функции множеству нулей некоторого дифференциально-полиномиального идеала в соответствующем дифференциальном кольце. И, в этом смысле, становится дифференциально-алгебраическим.

Теорему 1 данной работы также можно рассматривать как иллюстрацию этого принципа.

Сложность, которая была определена выше, а также многие другие ее модификации, инвариантны относительно действия следующей псевдогруппы:

$$\mathcal{G} = \bigl\{x \to \alpha(x),\, y \to \beta(y),\, f \to \gamma(f)\bigr\},$$

где α, β, γ – непостоянные аналитические функции одного переменного. То есть если $g = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{G}$, то $g \circ (f(x,y)) = \gamma\bigl(f(\alpha(x), \beta(y))\bigr)$. В этом случае мы говорим, что f и $g \circ f$ *эквивалентны*.

Пусть $\mathrm{St}(f)$ – это псевдоподгруппа в псевдогруппе $\mathcal{G}$ преобразований, сохраняющих f, т.е. $\mathrm{St}(f) = \bigl\{g \in \mathcal{G} \colon g \circ (f(x,y)) = f(x,y)\bigr\}$.

В работе [3] было доказано, что для произвольной аналитической функции f от двух переменных (x,y), такой что $f'_x f'_y \neq 0$, имеет место следующая альтернатива (теорема о стабилизаторе):

(1) либо $\dim \mathrm{St}(f) = 3$, и это означает, что f эквивалентна $x + y$,

(2) либо $\dim \mathrm{St}(f) = 1$, и это означает, что f эквивалентна $r(x+y) + x$, где аналитическая функция r не обращает в тождественный нуль выражение $r'''((r')^2 - r') + (r'')^2(1 - 2r')$,

(3) во всех прочих случаях $\dim \mathrm{St}(f) = 0$.

Если размерность стабилизатора равна 3, 1, или 0 для какого-либо ростка функции f, то то же самое значение она будет иметь всюду вне собственного аналитического подмножества области D для всякого голоморфного элемента, представляющего f в D. В этом смысле размерность стабилизатора не зависит от точки.

Дифференциальный критерий 3-мерности стабилизатора функции, т.е. ее эквивалентности $(x + y)$, хорошо известен (см. [4]):

$$d_1(f) = {f'_y}^2 f'_x f'''_{xxy} - {f'_y}^2 f''_{xy} f''_{xx} - f'_y {f'_x}^2 f'''_{xyy} + f''_{yy} {f'_x}^2 f''_{xy} = 0, \qquad d_0(f) = f'_x f'_y \neq 0.$$

В данной работе мы получим аналогичный (правда, более сложный) критерий 1-мерности стабилизатора.

То, что f эквивалентна $r(x+y) + x$, означает, что

$$f(x,y) = c\bigl(r(a(x) + b(y)) + a(x)\bigr) \qquad (1)$$ {eq1}

для некоторых a, b, c. Класс аналитических функций, имеющих представления такого вида, мы обозначим через $Cl^{1+\iota}$. Очевидно, что мы имеем систему включений $Cl^0 \subset Cl^1 \subset Cl^{1+\iota} \subset Cl^2$. Ясно, что для некоторых (a, b, c, r) функция вида (1) может попасть в Cl^1. Этот вопрос мы обсудим ниже (см. утверждение 4). Задача получения критерия принадлежности $Cl^{1+\iota}$ – это задача исключения из соотношения (1) функций (a,b,c,r) и получения дифференциального соотношения только на функцию f, гарантирующего существование таких (a,b,c,r). Отметим, что алгоритм такого исключения описан в более общей ситуации в [5]. И наше последующее рассуждение вполне соответствует этому алгоритму.

Как было показано в [5], каждой схеме композиции S (т.е. схеме расстановки скобок, см. [5]) соответствует класс аналитических функций $Cl(S)$, состоящий из аналитических функций, имеющих представление со схемой S, а также радикальный идеал $\mathcal{I}(S)$ в соответствующем дифференциальном кольце с набором образующих $(P_1,\dots,P_l)$. Причем принадлежность функции f совокупности нулей идеала, т.е. условие $P_1(f)=\dots=P_l(f)=0$, – это критерий представимости f суперпозицией вида S в любой точке вне собственного аналитического подмножества (особое множество).

Из процедуры построения и инвариантности класса $Cl(S)$ относительно действия псевдогруппы $\mathcal{G}$ следует несколько свойств полиномов P_j:

(1) все полиномы зависят только от производных функции f, от первых до некоторого старшего порядка, т.е. явной зависимости от переменных нулевой струи (x,y,f) нет.

(2) все полиномы обладают свойством тройной однородности, а именно: пусть $f_{x^py^q}$ – это соответствующая производная, тогда если в полиноме P для каждой производной сделать замену $f_{x^py^q}\to t_1^pt_2^qt_3f_{x^py^q}$, то мы получим $t_1^\alpha t_2^\beta t_3^\gamma P$. При этом мы говорим, что степень однородности P равна (α,β,γ), где α – это x-степень, β – это y-степень, γ – это f-степень.

(3) все числовые коэффициенты полиномов P_j – целые числа.

Ниже мы будем иметь дело с весьма солидными дифференциальными полиномами. В связи с этим мы введем *паспорт* полинома $\operatorname{pass}(P)$, который представляет собой следующий набор данных: $\operatorname{pass}(P(f))=\bigl\{k/(\alpha,\beta,\gamma)/n/[m,M]\bigr\}$, где k – дифференциальный порядок полинома, (α,β,γ) – набор степеней, n – число мономов, m – значение минимального коэффициента, M – максимального.

С этой точки зрения $\operatorname{pass}(d_1(z))$, где d_1 – это определяющий полином для Cl^1, имеет вид $\operatorname{pass}(d_1(z))=\bigl\{3/(3,3,4)/4/[-1,1]\bigr\}$.

{th1}

Теорема 1. *Пусть $f(x,y)\notin Cl^0$ – аналитическая функция и $z(x,y)=f'_x/f'_y$.*

(a) *Критерий принадлежности f классу $Cl^{1+\iota}$ имеет вид*

$$P(z)=Q(z)=R(z)=0,$$

где дифференциальные полиномы (они будут получены в процессе доказательства) имеют следующие паспорта:

$$\begin{aligned}\operatorname{pass}(P(z))&=\bigl\{5/(7,7,12)/634/[-324,240]\bigr\},\\ \operatorname{pass}(Q(z))&=\bigl\{5/(7,4,8)/198/[-132,87]\bigr\},\\ \operatorname{pass}(R(z))&=\bigl\{4/(5,5,8)/128/[-18,36]\bigr\}.\end{aligned}$$

(b) $\dim\operatorname{St}(f)=1$ *тогда и только тогда, когда*

$$P(z)=Q(z)=R(z)=0,\qquad d_1(f)\neq0.$$

Отметим, что условие $d_1(f) \neq 0$ равносильно условию

$$\delta_1(z) = z''_{xy} z - z'_x z'_y \neq 0.$$

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Дифференцируя (1) по x и по y и исключая $c'(r(a(x)+b(y))+a(x))$, получаем соотношение

$$z(x,y) = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{a'(x)}{b'(y)}\left(\frac{r'(a(x)+b(y))+1}{r'(a(x)+b(y))}\right)$$

или

$$r'(a(x)+b(y)) = \frac{a'(x)}{b'(y)z(x,y)-a'(x)} = \varphi(x,y). \tag{2}$$

{eq2}

Условие существования такой $r(t)$ – это условие того, что правая часть (2) есть функция переменного $t = a(x)+b(y)$, т.е. $b'\varphi'_x - a'\varphi'_y = 0$. В дальнейшем будем обозначать производные нижними индексами, т.е. как a_p, b_q, $z_{m,n}$. Причем всю совокупность производных функции z порядков до n включительно будем обозначать $z^{(n)}$. В этих обозначениях наше условие принимает вид:

$$e(a_1, a_2, b_1, b_2, z^{(1)}) = b_1 a_1^2 z_{0,1} + z_{0,0} a_1^2 b_2 - b_1^2 a_1 z_{1,0} + b_1^2 a_2 z_{0,0} = 0$$

Получаем отсюда b_2 как рациональное выражение $B_2(a_1, a_2, b_1, z^{(1)})$:

$$B_2 = -\frac{b_1(a_1^2 z_{0,1} - a_1 b_1 z_{1,0} + a_2 b_1 z_{0,0})}{a_1^2 z_{0,0}}.$$

Условие существования b_2 – это условие независимости B_2 от x, т.е. $(B_2)'_x = 0$. Получаем

$$\begin{aligned} e_1(a_1, a_2, a_3, b_1, z^{(2)}) = (&-a_1^2 z_{0,0} z_{2,0} + a_1^2 z_{1,0}^2 + a_1 a_2 z_{0,0} z_{1,0} \\ &+ a_1 a_3 z_{0,0}^2 - 2a_2^2 z_{0,0}^2) b_1 + a_1^3 z_{1,1} z_{0,0} - a_1^3 z_{0,1} z_{1,0} = 0. \end{aligned}$$

Если выражение, стоящее множителем при b_1, обращается в тождественный нуль, то, учитывая, что $a_1 \neq 0$, получаем

$$\delta_1(z^{(2)}) = (z_{0,0} z_{1,1} - z_{0,1} z_{1,0}) = 0.$$

Но общим решением этого уравнения являются функции вида $z = \alpha(x)\beta(y)$. Откуда следует, что $f \in Cl^1$. Уточним, что здесь и далее запись вида $a_1 \neq 0$ мы будем понимать как утверждение, что некая аналитическая функция не равна нулю тождественно.

Итак, если $f \notin Cl^1$, то $\delta_1(z^{(2)})$ – не нуль и мы получаем $B_1(a_1, a_2, a_3, z^{(2)})$ – выражение для b_1:

$$(B_1)^{-1} = \frac{a_1^2 z_{0,0} z_{2,0} - a_1^2 z_{1,0}^2 - a_1 a_2 z_{0,0} z_{1,0} - a_1 a_3 z_{0,0}^2 + 2a_2^2 z_{0,0}^2}{a_1^3 \delta_1(z^{(2)})}.$$

Записываем условие независимости от x, получаем

$$
\begin{aligned}
e_2(a_1,a_2,a_3,a_4,z^{(3)}) &= a_1^3 z_{0,0}z_{3,0}z_{1,1} - a_1^3 z_{0,0}z_{2,1}z_{2,0} - a_1^3 z_{1,0}z_{0,1}z_{3,0}\\
&+ a_1^3 z_{0,1}z_{2,0}^2 + a_1^3 z_{1,0}^2 z_{2,1} - a_1^3 z_{1,0}z_{1,1}z_{2,0} + a_1^2 z_{0,0}a_2 z_{1,0}z_{2,1}\\
&- 2a_1^2 z_{0,0}a_2 z_{1,1}z_{2,0} + a_1^2 a_2 z_{1,0}z_{0,1}z_{2,0} + a_1^2 z_{0,0}^2 z_{2,1}a_3 - a_1^2 z_{0,0}z_{0,1}z_{2,0}a_3\\
&- 3a_1^2 z_{0,0}z_{1,0}z_{1,1}a_3 + 3a_1^2 z_{1,0}^2 z_{0,1}a_3 - a_1^2 z_{0,0}^2 a_4 z_{1,1} + a_1^2 z_{0,0}z_{1,0}z_{0,1}a_4\\
&- 2a_1 z_{0,0}^2 a_2^2 z_{2,1} + 2a_1 z_{0,0}a_2^2 z_{0,1}z_{2,0} + 6a_1 z_{0,0}a_2^2 z_{1,0}z_{1,1} - 6a_1 a_2^2 z_{1,0}^2 z_{0,1}\\
&+ 6a_1 z_{0,0}^2 a_2 z_{1,1}a_3 - 6a_1 z_{0,0}a_2 z_{1,0}z_{0,1}a_3 - 6z_{0,0}^2 a_2^3 z_{1,1} + 6z_{0,0}a_2^3 z_{1,0}z_{0,1} = 0. \qquad (3)
\end{aligned}
$$
{3}

Получаем отсюда выражение для a_4

$$
\begin{aligned}
A_4(a_1,a_2,a_3,z^{(3)}) &= \frac{1}{a_1^2 z_{0,0}\delta_1(z^{(2)})}\\
&\times (a_1^3 z_{0,0}z_{1,1}z_{3,0} - a_1^3 z_{0,0}z_{2,0}z_{2,1} - a_1^3 z_{0,1}z_{1,0}z_{3,0} + a_1^3 z_{0,1}z_{2,0}^2 + a_1^3 z_{1,0}^2 z_{2,1}\\
&- a_1^3 z_{1,0}z_{1,1}z_{2,0} + a_1^2 a_2 z_{0,0}z_{1,0}z_{2,1} - 2a_1^2 a_2 z_{0,0}z_{1,1}z_{2,0} + a_1^2 a_2 z_{0,1}z_{1,0}z_{2,0}\\
&+ a_1^2 a_3 z_{0,0}^2 z_{2,1} - a_1^2 a_3 z_{0,0}z_{0,1}z_{2,0} - 3a_1^2 a_3 z_{0,0}z_{1,0}z_{1,1} + 3a_1^2 a_3 z_{0,1}z_{1,0}^2\\
&- 2a_1 a_2^2 z_{0,0}^2 z_{2,1} + 2a_1 a_2^2 z_{0,0}z_{0,1}z_{2,0} + 6a_1 a_2^2 z_{0,0}z_{1,0}z_{1,1} - 6a_1 a_2^2 z_{0,1}z_{1,0}^2\\
&+ 6a_1 a_2 a_3 z_{0,0}^2 z_{1,1} - 6a_1 a_2 a_3 z_{0,0}z_{0,1}z_{1,0} - 6a_2^3 z_{0,0}^2 z_{1,1} + 6a_2^3 z_{0,0}z_{0,1}z_{1,0}). \qquad (4)
\end{aligned}
$$
{eq4}

Выражение в знаменателе не равно нулю.

У нас есть два соотношения для функции $b(y)$, а именно

$$
b_2 = B_2(a_1,a_2,b_1,z^{(1)}) \qquad \text{и} \qquad b_1 = B_1(a_1,a_2,a_3,z^{(2)}).
$$

Запишем, что $(B_1)'_y = B_2$, и подставим в полученное соотношение полученные выше выражения для b_2 и b_1. После деления на a_1^3 получаем

$$
\begin{aligned}
e_5(a_1,a_2,a_3,z^{(3)}) &= z_{1,1}z_{2,1}a_1^2 z_{0,0}^2 - z_{2,0}a_1^2 z_{0,0}^2 z_{1,2} - z_{1,0}z_{0,1}z_{2,1}a_1^2 z_{0,0}\\
&+ z_{1,0}z_{2,0}a_1^2 z_{0,0}z_{0,2} + z_{1,0}^2 a_1^2 z_{0,0}z_{1,2} - z_{1,0}z_{1,1}^2 a_1^2 z_{0,0} + z_{1,0}^2 z_{1,1}z_{0,1}a_1^2\\
&- z_{1,0}^3 a_1^2 z_{0,2} + z_{1,0}a_2 a_1 z_{0,0}^2 z_{1,2} - 2a_2 z_{1,1}^2 a_1 z_{0,0}^2 + 3z_{1,0}a_2 z_{1,1}z_{0,1}a_1 z_{0,0}\\
&- z_{1,0}^2 a_2 a_1 z_{0,0}z_{0,2} - z_{1,0}^2 a_2 z_{0,1}^2 a_1 + a_3 a_1 z_{0,0}^3 z_{1,2} - a_3 z_{1,1}z_{0,1}a_1 z_{0,0}^2\\
&- z_{1,0}a_3 a_1 z_{0,0}^2 z_{0,2} + z_{1,0}a_3 z_{0,1}^2 a_1 z_{0,0} - 2a_2^2 z_{0,0}^3 z_{1,2} + 2a_2^2 z_{1,1}z_{0,1}z_{0,0}^2\\
&+ 2z_{1,0}a_2^2 z_{0,0}^2 z_{0,2} - 2z_{1,0}a_2^2 z_{0,1}^2 z_{0,0} = 0.
\end{aligned}
$$

Пусть

$$
\delta_2(z^{(3)}) = (z_{0,0}^2 z_{1,2} - z_{0,0}z_{0,1}z_{1,1} - z_{0,0}z_{0,2}z_{1,0} + z_{0,1}^2 z_{1,0})
$$

не есть тождественный нуль. Тогда условие $e_5(a_1,a_2,a_3,z^{(3)}) = 0$ позволяет получить выражение для a_3, а именно

$$
\begin{aligned}
A_3(a_1,a_2,z^{(3)}) = (&-z_{1,1}z_{2,1}a_1^2 z_{0,0}^2 + z_{2,0}a_1^2 z_{0,0}^2 z_{1,2} + z_{1,0}z_{0,1}z_{2,1}a_1^2 z_{0,0}\\
&- z_{1,0}z_{2,0}a_1^2 z_{0,0}z_{0,2} - z_{1,0}^2 a_1^2 z_{0,0}z_{1,2} + z_{1,0}z_{1,1}^2 a_1^2 z_{0,0} - z_{1,0}^2 z_{1,1}z_{0,1}a_1^2\\
&+ z_{1,0}^3 a_1^2 z_{0,2} - z_{1,0}a_2 a_1 z_{0,0}^2 z_{1,2} + 2a_2 z_{1,1}^2 a_1 z_{0,0}^2 - 3z_{1,0}a_2 z_{1,1}z_{0,1}a_1 z_{0,0}\\
&+ z_{1,0}^2 a_2 a_1 z_{0,0}z_{0,2} + z_{1,0}^2 a_2 z_{0,1}^2 a_1 + 2a_2^2 z_{0,0}^3 z_{1,2} - 2a_2^2 z_{1,1}z_{0,1}z_{0,0}^2\\
&- 2z_{1,0}a_2^2 z_{0,0}^2 z_{0,2} + 2z_{1,0}a_2^2 z_{0,1}^2 z_{0,0})/(a_1 z_{0,0}\delta_2(z^{(3)})).
\end{aligned}
$$

Далее, условие независимости A_4 от y имеет вид

$$\begin{aligned}e_3(a_1,a_2,a_3,z^{(4)}) &= a_1^2 z_{0,0}^3 z_{1,1}^2 z_{3,1} - a_1^2 z_{0,0}^3 z_{1,1} z_{2,0} z_{2,2} - a_1^2 z_{0,0}^3 z_{1,1} z_{2,1}^2\\ &\quad + \langle\text{всего 62 монома}\rangle\\ &\quad - 18a_2^2 z_{0,0}^2 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1}^2 + 18a_2^2 z_{0,0} z_{0,1}^2 z_{1,0}^2 z_{1,1} - 6a_2^2 z_{0,1}^3 z_{1,0}^3 = 0.\end{aligned}$$

Это выражение линейно по a_3. Выражая оттуда a_3, получаем еще одно выражение $a_3 = A_3^+(a_1,a_2,z^{(4)})$, числитель – это 52 монома, а знаменатель имеет вид:

$$\begin{aligned}\delta_3(z^{(4)}) &= z_{0,0}^4 z_{1,1} z_{2,2} - z_{0,0}^4 z_{1,2} z_{2,1} - z_{0,0}^3 z_{0,1} z_{1,0} z_{2,2}\\ &\quad + z_{0,0}^3 z_{0,1} z_{1,2} z_{2,0} + z_{0,0}^3 z_{0,2} z_{1,0} z_{2,1} - z_{0,0}^3 z_{0,2} z_{1,1} z_{2,0}\\ &\quad - 3z_{0,0}^3 z_{1,1}^3 + 9z_{0,0}^2 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1}^2 - 9z_{0,0} z_{0,1}^2 z_{1,0}^2 z_{1,1} + 3z_{0,1}^3 z_{1,0}^3 \neq 0.\end{aligned}$$

Мы предполагаем, что $\delta_3(z^{(4)}) \neq 0$. Условие независимости A_3^+ от y – это дифференциально-полиномиальное соотношение вида

$$z_{0,0}\delta_1(z^{(2)})e_4(a_1,a_2,z^{(5)}) = 0,$$

где полином e_4 состоит из 380 мономов. Обращение в нуль первых двух сомножителей невозможно, т.е. условие сводится к тому, что $e_4(a_1,a_2,z^{(5)}) = 0$.

Приравнивая A_3 и A_3^+, получаем $\delta_1(z^{(2)})^2 e_6(a_1,a_2,z^{(4)}) = 0$. Поскольку первый множитель не равен нулю, то получаем

$$\begin{aligned}e_6(a_1,a_2,z^{(4)}) &= (a_1 z_{0,0}^4 z_{1,2} z_{3,1} - a_1 z_{0,0}^4 z_{2,1} z_{2,2} - a_1 z_{0,0}^3 z_{0,1} z_{1,1} z_{3,1}\\ &\quad + \langle\text{всего 52 монома}\rangle\\ &\quad - 12a_2 z_{0,0} z_{0,1}^2 z_{1,0}^2 z_{1,1} + 3a_2 z_{0,0} z_{0,1} z_{0,2} z_{1,0}^3 + 3a_2 z_{0,1}^3 z_{1,0}^3) = 0.\end{aligned}$$

Откуда получаем выражение для a_2 вида $a_2 = A_2(z^{(4)})a_1$. Выражение A_2 представляет собой дробь, в знаменателе которой стоит

$$\begin{aligned}\delta_4(z^{(4)}) &= 2z_{0,0}^4 z_{1,1} z_{2,2} - 3z_{0,0}^4 z_{1,2} z_{2,1} - 2z_{0,0}^3 z_{0,1} z_{1,0} z_{2,2}\\ &\quad + z_{0,0}^3 z_{0,1} z_{1,1} z_{2,1} + 3z_{0,0}^3 z_{0,1} z_{1,2} z_{2,0} + 3z_{0,0}^3 z_{0,2} z_{1,0} z_{2,1} - 2z_{0,0}^3 z_{0,2} z_{1,1} z_{2,0}\\ &\quad + 3z_{0,0}^3 z_{1,0} z_{1,1} z_{1,2} - 6z_{0,0}^3 z_{1,1}^3 - z_{0,0}^2 z_{0,1}^2 z_{1,0} z_{2,1} - z_{0,0}^2 z_{0,1}^2 z_{1,1} z_{2,0}\\ &\quad - z_{0,0}^2 z_{0,1} z_{0,2} z_{1,0} z_{2,0} - 3z_{0,0}^2 z_{0,1} z_{1,0}^2 z_{1,2} + 15z_{0,0}^2 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1}^2 - 3z_{0,0}^2 z_{0,2} z_{1,0}^2 z_{1,1}\\ &\quad + z_{0,0} z_{0,1}^3 z_{1,0} z_{2,0} - 12z_{0,0} z_{0,1}^2 z_{1,0}^2 z_{1,1} + 3z_{0,0} z_{0,1} z_{0,2} z_{1,0}^3 + 3z_{0,1}^3 z_{1,0}^3. \qquad (5)\end{aligned}$$

Мы предполагаем, что $\delta_3(z^{(4)}) \neq 0$. Записывая условие $(A_2(z^{(4)}))'_y = 0$, получаем

$$\begin{aligned}P(z^{(5)}) &= -2z_{3,2} z_{2,2} z_{1,1} z_{0,0}^8 z_{1,2} + 2z_{3,1} z_{2,3} z_{1,1} z_{0,0}^8 z_{1,2} - 2z_{2,2} z_{1,3} z_{3,1} z_{1,1} z_{0,0}^8\\ &\quad + \langle\text{всего 634 монома}\rangle\\ &\quad - 54z_{1,0}^6 z_{1,1} z_{0,1}^4 z_{0,2} - 9z_{0,3} z_{1,0}^7 z_{0,1}^4 + 27z_{1,0}^7 z_{0,1}^3 z_{0,2}^2 = 0.\end{aligned}$$

Паспорт полученного нами полинома $P(z)$ имеет следующий вид:

$$\operatorname{pass}(P(z)) = \bigl\{5/(7,7,12)/634/[-324,240]\bigr\}.$$

Далее записываем условие $(A_3^+)'_x = A_4$, подставляем в него выражения для a_2 и a_3. Получаем, что это условие выполнено тождественно. Далее записываем

$$(A_2(z^{(4)})a_1)'_x = A_3(a_1, A_2(z^{(4)})a_1, z^{(4)}),$$

делим полученное соотношение на $a_1 z_{0,0}\delta_2(z^{(3)})$ и получаем

$$\begin{aligned} Q(z^{(5)}) = {} & 2z_{0,0}^5 z_{1,1} z_{2,2} z_{4,1} - 2z_{0,0}^5 z_{1,1} z_{3,1} z_{3,2} - 3z_{0,0}^5 z_{1,2} z_{2,1} z_{4,1} \\ & + \langle\text{всего 198 мономов}\rangle \\ & + 24z_{0,1}^2 z_{1,0}^3 z_{1,1}^2 z_{2,0} + 36z_{0,1} z_{0,2} z_{1,0}^5 z_{2,1} - 36z_{0,1} z_{0,2} z_{1,0}^4 z_{1,1} z_{2,0} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

{eq6}

при этом

$$\operatorname{pass}(Q) = \bigl\{5/(7,4,8)/198/[-132,87]\bigr\}.$$

Теперь запишем условие того, что $(A_3^+)'_y = 0$, подставим в полученное соотношение $a_2 = A_2(z^{(4)})a_1$, поделим результат на $a_1 z_{0,0}\delta_1(z^{(2)})\delta_2(z^{(3)})$. Получаем

$$\begin{aligned} R(z^{(4)}) = {} & 2z_{0,0}^5 z_{1,1} z_{1,3} z_{3,1} - 2z_{0,0}^5 z_{1,1} z_{2,2}^2 - 3z_{0,0}^5 z_{1,2}^2 z_{3,1} + 6z_{0,0}^5 z_{1,2} z_{2,1} z_{2,2} \\ & + \langle\text{всего 128 мономов}\rangle \\ & + 6z_{0,1}^3 z_{1,0}^3 z_{1,1}^2 - 18z_{0,1}^2 z_{0,2} z_{1,0}^4 z_{1,1} - 3z_{0,1}^2 z_{0,3} z_{1,0}^5 + 9z_{0,1} z_{0,2}^2 z_{1,0}^5 = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

{eq7}

при этом

$$\operatorname{pass}(R) = \bigl\{4/(5,5,8)/128/[-18,36]\bigr\}.$$

Наше вычисление проведено для функций, удовлетворяющим четырем условиям типа неравенства $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4 \neq 0$. В итоге мы получили три условия типа равенства $P = Q = R = 0$, где $(P, Q, R, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ – непостоянные полиномы от координат 5-струи. Непосредственная подстановка с помощью системы символьных вычислений Maple показывает, что для ростка любой функции $z \in Cl^{1+\iota}$ значения явно вычисленных полиномов $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ от координат 5-струи тождественно равны нулю независимо от выполнения или невыполнения условия $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4 \neq 0$, Это доказывает п. (a). Утверждение п. (b) после этого становится очевидным. Теорема доказана.

В этом вычислении мы пользовались дискриминантным условием

$$\delta_1(z)\delta_2(z)\delta_3(z)\delta_4(z) \neq 0.$$

Как мы отмечали, при несоблюдении дискриминантного условия вычислительный алгоритм уходит на другую ветвь.

Например, если $\delta_1(z) = 0$, то это просто означает, что $f \in Cl^1$. Если же

$$\delta_1(z)\delta_3(z)\delta_4(z) \neq 0,$$

но $\delta_2(z) = 0$, то при построении декомпозиции функции f алгоритм уходит на особую ветвь. При этом процедура исключения функций b и a порождает новые условия разрешимости, которые представляют собой дифференциальные полиномы. При прохождении этой ветки кроме условия $\delta_2(z) = 0$ возникают еще четыре условия. Вот их паспорта:

$$\begin{aligned}
\text{pass}(P_1(z)) &= \{6/(13,9,16)/7686/[-15120, 17568]\},\\
\text{pass}(P_2(z)) &= \{6/(11,5,10)/1084/[-1740, 1740]\},\\
\text{pass}(P_3(z)) &= \{5/(10,7,11)/1200/[-288, 312]\},\\
\text{pass}(P_4(z)) &= \{5/(15,10,20)/12447/[-37296, 32475]\}.
\end{aligned}$$

При построении декомпозиции для более глубоких вырождений возникают еще более сложные дифференциальные полиномы.

Отметим, что вычисления производились с помощью системы Maple и они не потребовали сколько-нибудь значительного времени и ресурсов. С программой вычислений можно ознакомится здесь: <http://vkb.strogino.ru/>.

Теперь мы можем продемонстрировать различия между классами в цепочке включений $Cl^0 \subset Cl^1 \subset Cl^{1+\iota} \subset Cl^2$. приведя конкретные примеры. {st2}

Утверждение 2. *Имеем*
(a) $x \in Cl^0$, $(x+y) \in Cl^1 \setminus Cl^0$,
(b) $(x^2+xy) \in Cl^{1+\iota} \setminus Cl^1$,
(c) *любой полином степени два* $p_2(x,y)$ *содержится в* $Cl^{1+\iota}$,
(d) $(x+y+x^2y) \in Cl^2 \setminus Cl^{1+\iota}$.

Доказательство. Пункт (a) – очевиден. (b) следует из того, что $d_1(x^2+xy) = 2 \neq 0$ и у этой функции есть 1-мерный стабилизатор. Используя сдвиги вида $(x \to x+a,\ y \to y+b,\ z \to z+c)$, можно общий многочлен второй степени $z = p_2(x,y)$ сделать однородным, а у любой однородной функции есть нетривиальный стабилизатор. Это доказывает (c). Если $f = x+y+x^2y$, то $z = (2xy+1)/(x^2+1)$. Подставляя эту дробь в полином $R(z)$ получаем $R(z) = -192(x^2+1)^{-9} \neq 0$. Принадлежность Cl^2 – очевидна. Это доказывает (d). Утверждение доказано.

Основное содержание доказанной выше теоремы 1 – это дифференциальное условие принадлежности функции классу $Cl^{1+\iota}$. Этот результат был получен применением общего алгоритма, который был описан в [5] в качестве алгоритма построения дифференциального критерия принадлежности функции $Cl(S)$, где S – произвольная схема композиции (схема расстановки скобок). Однако в описании $Cl^{1+\iota}$ имеется деталь, которая не позволяет формально считать $Cl^{1+\iota} = Cl(S)$ для некоторой схемы S. Имеется некоторая схема, которая определяет класс, очень похожий на $Cl^{1+\iota}$. Речь идет о схеме вида $S = C(R(A(x)+B(y)) + D(x))$. Ясно, что $Cl^{1+\iota} \subset Cl(S)$. Чтобы сделать схему S полностью соответствующей определению $Cl^{1+\iota}$ необходимо наложить условие $A(x) = D(x)$. При обсуждении алгоритма исключения в [5] предполагалось, что все формальные функциональные переменные в определении схемы *независимы.* То есть в данной ситуации мы столкнулись со схемами нового типа: *схемы с соотношениями.* Отметим, что для схемы с соотношением, рассмотренной в данной работе, процедура исключения работает также хорошо, как и для старых схем с независимыми функциональными переменными. Однако нетрудно представить себе ситуацию, которая требует особого отношения. Рассмотрим, например, схему следующего вида:

$$S = C\big(F(A(x)+B(y)) + F(x)\big).$$

При переводе этой схемы на язык дифференциальной алгебры мы сталкиваемся со следующей проблемой. Если бы у нас была только величина $F(x)$, мы бы ввели дифференциальную переменную F, так что $F_{01} = 0$. Если бы у нас была только $F(A(x) + B(y))$ мы бы ввели дифференциальную переменную F, так что $B_1 F_{10} - A_1 F_{01} = 0$. Но у нас имеется и $F(x)$, и $F(A(x) + B(y))$. Таким образом, алгоритм декомпозиции для схем с соотношениями требует, вообще говоря, уточнения. Более того, вопрос о том, применим ли к таким схемам DM-принцип, сформулированный в начале статьи, открыт.

Как хорошо известно, функции $(x + y)$ и xy эквивалентны (аддитивное и мультипликативное представления функции сложности один). Это есть следствие соотношения $xy = \exp(\ln(x) + \ln(y))$. Аналогично функции из $Cl^{1+\iota}$ кроме аддитивного представления $r(x + y) + x$ имеют также мультипликативное представление в виде однородной функции.

Если $Z(x, y)$ – однородная функция степени k, то Z можно представить в виде $Z = S(y/x)x^k$. Все функции такого вида имеют нетривиальный стабилизатор,

$$(x \to \lambda x,\, y \to \lambda y,\, Z \to \lambda^{-k} Z) \in \mathrm{St}(Z)$$

и, тем самым, содержатся в $Cl^{1+\iota}$. {st3}

Утверждение 3. (a) *Пусть* $k \neq 0$ *и* $r(t) = -\ln(s(e^t))$, *тогда функции* $s(y/x)x$ *и* $r(x + y) + x$ *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $z = r(x + y) + x = -\ln(s(e^{(x+y)})) + x$, т.е. $e^{-z} = s(e^x e^y)e^{-x}$. Делаем замену

$$x \to -\ln(x), \qquad y \to \ln(y), \qquad z \to e^{-z}.$$

Получаем $z = s(y/x)x$. Утверждение доказано.

Таким образом, это два представления, аддитивное и мультипликативное, функций из $Cl^{1+\iota}$. Переход от мультипликативного к аддитивному и обратно осуществляют преобразования

$$s(t) \to r(t) = A(s)(t) = -\ln(s(e^t)), \qquad r(t) \to s(t) = M(r)(t) = e^{-r(\ln(t))}. \tag{8}$$ {eq8}

Отметим, что совокупность $s(y/x)x^k$ однородных функций фиксированной степени – это линейное пространство. Тогда как функции вида $r(x+y)+x$ – это аффинное пространство.

Если Z – однородная функция степени $k = 0$, то, как очевидно, $Z \in Cl^1$. Однако в Cl^1 имеются и другие однородные функции, чья степень не равна нулю (см. [7], а также утверждение 4 ниже). Отметим, что если степень однородности отлична от нуля, то калибровочным преобразованием можно поменять эту степень на любую ненулевую, в частности, можно сделать равной единице.

В теореме о стабилизаторе есть еще одна деталь, допускающая уточнение. Имеется дифференциальное неравенство на функцию $r(t)$, несоблюдение которого означает, что функция $f \in Cl^{1+\iota}$ принадлежит Cl^1 и, соответственно, $\dim \mathrm{St}(f) = 3$. Пусть это условие не выполнено, т.е.

$$r'''((r')^2 - r') + (r'')^2(1 - 2r') = 0. \tag{9}$$ {eq9}

Это уравнение можно решить в элементарных функциях.

{st4}

Утверждение 4. (a) *Функция вида $z = r(x+y) + x$ принадлежит Cl^1 тогда и только тогда, когда $r(t)$ имеет следующий вид*:

$$\textit{либо}\quad r_1 = \lambda t + \mu, \qquad \textit{либо}\quad r_2 = \frac{\ln(\mathrm{e}^{\lambda t} + \mu\lambda)}{\lambda} + \nu, \quad \textit{где}\quad \lambda \neq 0.$$

(b) *Однородные функции из Cl^1 степени 1 – это два семейства*

$$z_1 = \alpha x^{\beta} y^{(1-\beta)} \qquad \textit{и} \qquad z_2 = (\alpha x^{\gamma} + \beta y^{\gamma})^{1/\gamma}.$$

Доказательство. (a) Первый случай характеризуется условием $r'(t) = \mathrm{const}$. Пусть $r'(t)$ непостоянна. Тогда выберем $A = r'(t)$ в качестве независимой переменной, $P(A) = r''(t)$ в качестве неизвестной функции. Тогда $r'''(t) = P'(A)P(A)$. Отметим, что при этом $P(A)$ не есть тождественный нуль. Теперь мы можем записать уравнение (9) в виде

$$P'(A) + P(A)\frac{2A-1}{A(A-1)} = 0$$

откуда получаем $P(A) = \lambda A(A-1)$, $\lambda \neq 0$. Решая полученное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r(t) + \lambda\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t) - 1\right) = 0,$$

получаем

$$r(t) = \frac{\ln(\mathrm{e}^{\lambda t} + \mu)}{\lambda} + \nu.$$

Пункт (a) доказан. Пункт (b) получаем преобразованием (8). Утверждение доказано.

Пусть функция $z(x,y)$ – алгебраична. В [9] было дано явное описание всех алгебраических функций из Cl^1 (трехмерный стабилизатор). Обсуждаемый в данной работе класс $Cl^{1+\iota}$ также имеет естественное определяющее свойство (одномерный стабилизатор), и уместно поставить следующий вопрос.

Вопрос: как устроены алгебраические функции из $Cl^{1+\iota}$? Требуется дать явное описание.

Все функции, не попавшие в $Cl^{1+\iota}$, не могут иметь стабилизатора положительной размерности. Однако это не мешает этим функциям иметь дискретный нетривиальный стабилизатор. Рассмотрим, например, полином $z = (x + y + x^2 y)$ из утверждения 2. В его стабилизаторе имеется инволюция

$$x \to -x, \qquad y \to -y, \qquad z \to -z.$$

Ясно, что если заменить произвольную функцию $z(x,y)$ на эквивалентную ей $Z = z(x^2, y)$, то в стабилизаторе Z появится нетривиальное преобразование $x \to -x$, $y \to$, $z \to z$. В этом смысле дискретный стабилизатор есть у всех функций. Однако можно различать функции, так что среди эквивалентных им имеются функции без автоморфизмов, и те, у которых *все* функции, эквивалентные им, имеют нетривиальные дискретные автоморфизмы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Ostrowski, "Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen", *Math.Z.*, **8** (1920), 241–298.

[2] А. Г. Витушкин, "13-я проблема Гильберта и смежные вопросы", *УМН*, **59**:1 (355) (2004), 11–24.

[3] V. K. Beloshapka, "Decomposition of functions of finite analytical complexity", *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, **11**:6 (2018), 680–685.

[4] В. К. Белошапка, "О сложности дифференциально-алгебраического описания классов аналитической сложности", *Матем. заметки*, **105**:3 (2019), 323–331.

[5] V. K. Beloshapka, "Stabilizer of a function in the Gage group", *Russ. J. Math. Phys.*, **24**:2 (2017), 148–152.

[6] В. А. Красиков, Т. М. Садыков, "Об аналитической сложности дискриминантов", *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Труды МИАН, **279**, Наука, М., 2012, 86–101.

[7] V. K. Beloshapka, "Analytical complexity: development of the topic", *Russ. J. Math. Phys.*, **19**:4 (2012), 428–439.

[8] V. K. Beloshapka, "Algebraic functions of complexity one, a Weierstrass theorem, and three arithmetic operations", *Russ. J. Math. Phys.*, **23**:3 (2016), 343–347.

[9] V. K. Beloshapka, "Algebraic functions of complexity one, a Weierstrass theorem, and three arithmetic operations", *Russ. J. Math. Phys.*, **23**:3 (2016), 343–347.

В. К. Белошапка
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Московский центр
фундаментальной и прикладной математики
E-mail: vkb@strogino.ru

Поступило
28.04.2023
После доработки
16.12.2023
Принято к публикации
18.12.2023