Об алгебраических свойствах аналитических функций двух переменных

В.К.Белошапка

30.10.2023

Аннотация

Изучение аналитических функций двух переменных с точностью до действия функциями одного переменного (калибровочная псевдогруппа) естественно приводит к обсуждению арифметических свойств функций двух переменных (бинарных операций) с точностью до такого действия. В данной заметке обсуждаются свойства коммутативности и ассоциативности.

1

1. Введение

Все непрерывные функции двух переменных $f(x, y)$, определенные на квадрате $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, имеют представление вида

$$f(x,y) = c_1(a_1(x) + b_1(y)) + c_2(a_2(x) + b_2(y)) + c_3(a_3(x) + b_3(y)) + \\ c_4(a_4(x) + b_4(y)) + c_5(a_5(x) + b_5(y)),$$

где $(a_j, b_j, c_j),\ j = 1, 2, 3, 4, 5,$ – непрерывны [1].

Для гладких, а тем более аналитических функций, ситуация меняется коренным образом [2], [3], [4]. Для понимания того, в каком смысле

[1]Механико-математический факультет Московского университета им.Ломоносова, Воробьевы горы, 119991 Москва, Россия, vkb@strogino.ru.
Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ им.М.В.Ломоносова,
vkb@strogino.ru

аналитические функции двух переменных сложнее тех, которые могут быть представлены в виде суперпозиции аналитических функций одного переменного и сложения, уместно ввести в рассмотрение возрастающую иерархию классов сложности Cl^n [5]. Класс Cl^n состоит из функций, которые допускают представление глубины не более чем n. Другими словами, имеет место следующее индуктивное определение. Класс Cl^0 – это все функции, зависящие лишь от одной переменной (x или y). Далее,

$$Cl^{n+1} = \{z : \ z(x,y) = c(A_n(x,y) + B_n(x,y)), \ A_n, \ B_n \in Cl^n, \ c \in Cl^0\}.$$

Пишем $N(z) = n$ (порядок сложности), если $z \in Cl^n \setminus Cl^{n-1}$. Значения $N(z)$ меняются от нуля до бесконечности. Функция имеет порядок равный бесконечности, если она не попала ни в один из классов Cl^n.

Если в индуктивном определении классов заменить сложение на произвольную (фиксированную) функцию $\varphi(x,y)$ двух переменных, то мы получим другую иерархию классов Cl^n_φ и другие порядки сложности $N_\varphi(z)$.

Рассмотрим псевдогруппу $\mathcal{G}$ преобразований, состоящую из преобразований вида

$$x \to \alpha(x), \ y \to \beta(y), \ z \to \gamma(z),$$

(α, β, γ) – непостоянные аналитические функции одного переменного, т.е.

$$z(x,y) \to \gamma^{-1}(z(\alpha(x), \beta(y))).$$

Роль псевдогруппы $\mathcal{G}$ в той теории сложности, о которой идет речь, определяется тем, что при любом выборе базовой функции φ все классы и порядки сложности инвариантны относительно действия этой псевдогруппы.

В действии псевдогруппы $\mathcal{G}$ можно выделить правое действие $z(x,y) \to z(a(x), b(y))$ (действие в прообразе) и левое действие $z(x,y) \to c(z(x,y))$ (действие в образе). Соответственно, в $\mathcal{G}$ имеется две псевдоподгруппы $\mathcal{G}_{xy} = \{g = (c,a,b) \in \mathcal{G} : c = Id\}$ (правое действие) и $\mathcal{G}_z = \{g = (c,a,b) \in \mathcal{G} : a = b = Id\}$ (левое действие). Очевидно, $\mathcal{G}$ есть прямое произведение $\mathcal{G}_{xy}$ и $\mathcal{G}_z$.

Действие $\mathcal{G}$ порождает на функциях двух переменных отношение эквивалентности. Соответственно, можно говорить о правой и левой эквивалентности, имея в виду действие $\mathcal{G}_{xy}$ и $\mathcal{G}_z$.

Среди функций двух переменных есть всем известные четыре арифметических действия: сложение, умножение, вычитание и деление. Ясно, что по отношению к нашему отношению эквивалентности

$$(x+y) \sim (x-y) \sim (x\,y) \sim \left(\frac{x}{y}\right).$$

Класс Cl^1, в который попали все арифметические действия, обладает любопытным уникальным свойством. Если $z(x,y)$ – аналитическая функция двух переменных (т.е. $z'_x\,z'_y$ не есть тождественный ноль), мы можем рассмотреть стабилизатор в $\mathcal{G}$:

$$St(z) = \{g = (a,b,c) \in \mathcal{G} : g \cdot z = z\}.$$

Это некоторая псевдоподгруппа в $\mathcal{G}$. Мы можем также рассмотреть соответствующую алгебру Ли векторных полей и говорить о ее размерности, которую обозначим через $d(z)$. Оказывается, что $[(x+y)]$ – класс эквивалентности, в который попали все арифметические операции, – уникален в следующем смысле [6].

$$\text{Если } [z] = [(x+y)], \text{ то } d(z) = 3, \text{ иначе } d(z) \leq 1.$$

В алгебре на арифметические действия принято смотреть как на бинарные операции. Причем имеется некий набор свойств, которым бинарные операции могут удовлетворять (или не удовлетворять). Мы говорим об их коммутативности, ассоциативности и пр.

2. Коммутативность.

Уместно поставить вопрос о коммутативности бинарной операции (т.е. аналитической функции двух переменных) с точностью до действия калибровочных преобразований. Например, полином $2\,x^2-3\,y^2+4\,x+5\,y-7$, очевидно, не выдерживает перестановки переменных. Но с помощью аффинного преобразования из $\mathcal{G}$ его нетрудно привести к виду x^2+y^2, а эта функция уже коммутативна.

Определение 1: Говорим, что функция $\varphi(x,y)$ *квазикоммутативна*, если найдутся три непостоянных аналитических функции одного переменного $g = (a,b,c) \in \mathcal{G}$, т.ч. $\psi(x,y) = g \cdot \varphi(x,y) = c(\varphi(a(x), b(y)))$ – коммутативна, т.е.

$$\psi(y,x) = c(\varphi(a(y), b(x))) = c(\varphi(a(x), b(y))) = \psi(x,y). \tag{1}$$

Отметим, что для того чтобы обе части равенства одновременно имели смысл, нужно оговорить, что у нас имеется голоморфный элемент функции φ в окрестности точки на диагонали $x = y$.

Приведем некоторые формулировки, эквивалентные определению 1. Обозначим через T – это оператор перестановки переменных $T(x,y) = (y,x)$, т.е. $\varphi \circ T(x,y) = \varphi(y,x)$.

Утверждение 2: Следующие утверждения относительно функции $\varphi(x,y)$ эквивалентны ее квазикоммутативности.
(i) Найдется непостоянная функция α, т.ч. $\varphi(\alpha(x), \alpha^{-1}(y)) = \varphi(y,x)$.
(ii) Функция $\varphi(y,x) = \varphi \circ T(x,y)$ правоэквивалентна $\varphi(x,y)$ (т.е. $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентна).
(iii) Найдется непостоянная функция α, т.ч. $\varphi(\alpha(x), y) = \varphi \circ T(x, \alpha(y))$.
(iv) Найдется коммутативная функция $\chi(x,y)$ и непостоянная функция d, т.ч.

$$\varphi(x,y) = \chi(d(x), y) = \chi(x, d(y)).$$

Доказательство: Рассмотрим соотношение (1) в окрестности такой точки (x_0, y_0), где определены обе части соотношения и при этом все производные $a'(x_0)$, $b'(y_0)$, $c'(\varphi(a(x_0), b(y_0)))$, $c'(\varphi(a(y_0), b(x_0)))$ отличны от нуля (т.е. определены все обратные a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}). Применяя к обеим частям (1) c^{-1}, получаем $\varphi(a(x), b(y)) = \varphi(a(y), b(x))$. Далее, в этом соотношении вместо x подставим $b^{-1}(x)$, а вместо y подставим $a^{-1}(y)$. Получим $\varphi(a(b^{-1}(x)), b(a^{-1}(y))) = \varphi(y,x)$. Заметим, что $a \circ b^{-1}$ и $b \circ a^{-1}$ взаимно обратны. Заменим первую функцию на α, а вторую на α^{-1}, получим соотношение

$$\varphi(\alpha(x), \alpha^{-1}(y)) = \varphi(y,x) = \varphi \circ T(x,y). \tag{2}$$

Это доказывает (i). Также мы получаем, что из квазикоммутативности следует $\varphi(y,x) = \varphi \circ T(x,y)$ правоэквивалентна $\varphi(x,y)$. Наши преобразования обратимы, поэтому справедлива обратная импликация. В соотношении (2) вместо y подставим $\alpha(y)$. Получим $\varphi(\alpha(x), y) = \varphi(\alpha(y), x)$, т.е. получаем (iii). Положим $\chi(x,y) = \varphi(\alpha(x), y) = \varphi(\alpha(y), x)$. Ясно, что $\chi(x,y) = \chi(y,x)$. Полагая $d = \alpha^{-1}$, получаем (iv). Утверждение доказано.

Учитывая утверждение 2, мы можем сказать, что семейство квазикоммутативных функций – это $\mathcal{G}_{xy}$-орбита подпространства коммутативных функций.

Любая ли функция двух переменных квазикоммутативна? Ответ отрицательный.

Утверждение 3: Функция $x^2+x\,y$ не является квазикоммутативной. *Доказательство:* Запишем условие квазикоммутативности в форме (ii). Получаем

$$(\alpha(x))^2+\alpha(x)\,y=(\alpha(y))^2+\alpha(y)\,x. \tag{3}$$

Если в этом соотношении зафиксировать значение переменной y, то мы получаем квадратное уравнение относительно $\alpha(x)$, все решения которого имеют вид $\alpha(x)=p\sqrt{x+q}+r,\ p\neq 0$. Подставляя это значение для α в (3), видим, что таких (p,q,r) не существует. Утверждение доказано.

Для того чтобы написать условие квазикоммутативности произвольной функции, рассмотрим более общую задачу о $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности голоморфного элемента функции $\varphi(X,Y)$ в окрестности (X_0,Y_0) и элемента $\psi(x,y)$ в окрестности (x_0,y_0). Пусть

$$\varphi(a(x),b(y))=\psi(x,y). \tag{4}$$

Положим

$$\begin{aligned}
&\varphi(X,Y_0)=f_\varphi^{Y_0}(X)=f_\varphi(X),\quad \psi(x,y_0)=f_\psi^{y_0}(x)=f_\psi(x),\\
&\varphi(X_0,Y)=g_\varphi^{X_0}(Y)=g_\varphi(Y),\quad \psi(x_0,y)=g_\psi^{x_0}(y)=g_\psi(y),\\
&\qquad X_0=a(x_0),\ Y_0=b(y_0),
\end{aligned}$$

т.е., фиксируя одно из переменных, мы получаем из функции двух переменных функцию одного переменного. Пусть точка (x_0,y_0) выбрана так, что φ'_X и φ'_Y не равны нулю в (X_0,Y_0), т.е. $f_\varphi(X)$ и $g_\varphi(Y)$ – локально обратимы. Подставляя в (4) сначала $y=y_0$, а потом $x=x_0$, получаем $f_\varphi(a(x))=f_\psi(x),\ \ g_\varphi(b(y))=g_\psi(y)$, т.е.

$$a(x)=(f_\varphi)^{-1}\circ f_\psi(x),\quad b(y)=(g_\varphi)^{-1}\circ g_\psi(y).$$

Таким образом получаем, что критерием $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности $\varphi(X,Y)$ и $\psi(x,y)$ является соотношение

$$\varphi\left((f_\varphi)^{-1}\circ f_\psi(x),(g_\varphi)^{-1}\circ g_\psi(y)\right)=\psi(x,y). \tag{5}$$

Применяя полученный критерий в окрестности точки диагонали $(x=y)$ для пары функций $\varphi(X,Y)$ и $\psi=\varphi(y,x)$, получаем следующее утверждение

Утверждение 4: Критерием квазикоммутативности функции $\varphi(x, y)$ является следующее соотношение

$$\varphi\left((f_\varphi)^{-1} \circ f_\varphi(x), (g_\varphi)^{-1} \circ g_\varphi(y)\right) = \varphi(y, x).$$

Пусть функция $r(x, y)$, которую мы тестируем на квазикоммутативность, рациональна. Тогда на задачи исключения неизвестных функций, которые мы рассматривали, можно смотреть как на задачи исключения неизвестных и решать их с помощью другой алгебраической техники – техники результантов.

Как было показано выше, вопрос о квазикоммутативности сводится к проверке того, что функция $r(y, x)$ является $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентной функции $r(x, y)$. Рассмотрим более общий вопрос, вопрос о проверке $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности двух рациональных функций $r(x, y)$ и $R(x, y)$. Это по определению вопрос о существовании таких аналитических функций a и b, что $r(x, y) = R(a(x), b(y))$. Нетрудно проверить, что следующее дифференциально-рациональное выражение

$$J(z)(x, y) = \frac{z''_{xy}(x, y)}{z'_x(x, y)\, z'_y(x, y)}$$

является дифференциальным ковариантом $\mathcal{G}_{xy}$-действия. А именно, если $g = (a, b) \in \mathcal{G}_{xy}$, то $J(g \circ z)(x, y) = g \circ J(z)(x, y) = J(z)(a(x), b(y))$, т.е. при $\mathcal{G}_{xy}$-действии J преобразуется не как дифференциальное выражение, а как функциональное. К этому можно добавить, что два дифференциальных оператора

$$D_x(\chi(z)) = \frac{1}{z'_x}\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad D_y(\chi(z)) = \frac{1}{z'_y}\frac{\partial \chi}{\partial y}$$

– это операторы ковариантного дифференцирования, т.е. они переводят ковариантные дифференциальные выражения $\chi(z)$ в ковариантные.

Ясно, что если r – рациональный ковариант, то

$$J(r),\ D_x(J(r))\ D_y(J(r)), \ldots$$

также рациональные коварианты. Положим

$$p = J(r),\ q_x = D_x(J(r)),\ q_y = D_y(J(r)),\ P = J(R),$$
$$Q_x = D_x(J(R)),\ Q_y = D_y(J(R)),\ X = a(x),\ Y = b(y).$$

В этих обозначениях из $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности $r(x,y)$ и $R(x,y)$ следует, что

$$\begin{gathered} R(X,Y)=r(x,y), \quad P(X,Y)=p(x,y), \\ Q_x(X,Y)=q_x(x,y), \quad Q_y(X,Y)=q_y(x,y). \end{gathered} \tag{6}$$

Эти четыре рациональных соотношения, избавляясь от знаменателей, можно записать как четыре полиномиальных соотношения

$$F_1(X,Y,x,y)=F_2(X,Y,x,y)=F_3(X,Y,x,y)=F_4(X,Y,x,y)=0.$$

Пусть $H_1(X,x,y)$, $H_2(X,x,y)$, $H_3(X,x,y)$ – это результанты (F_1,F_2), (F_1,F_3), (F_1,F_4) соответственно относительно переменной Y. Пусть, далее, $H_x(x,y)$ и $H_y(x,y)$– это результанты (H_1,H_2) и (H_1,H_3) относительно переменной X. Тогда соотношения $H_x(x,y)=H_y(x,y)=0$ – это необходимые условия $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности $r(x,y)$ и $R(x,y)$. Если положить $R(x,y)=r(y,x)$, то полученные условия – это условия квазикоммутативности функции r.

Пример 5. Пусть

$$r=\frac{kx^2+y}{1+y}+x, \quad R=\frac{kY^2+X}{1+X}+Y.$$

Вычисляя $H_1(X,x,y)$, получаем

$$\begin{gathered} 4\,k^4\,(1+y)^3\,\big(kx^2-1\big)^2\,(1+X)^2\,(X-y)\times \\ \big(Xkx^2+Xxy+kx^2+Xx+yx+x+y+1\big)=0. \end{gathered}$$

Следовательно, при $k\neq 0$ функция r не является квазикоммутативной. С другой стороны, очевидно, что при $k=0$ она квазикоммутативной является.

На этом пути можно показать, что если рациональная функция зависит (рационально) от каких-либо параметров, то подмножество значений этих параметров, для которых функция квазикоммутативна, – полуалгебраично (определяется полиномиальными равенствами и неравенствами).

3. Ассоциативность

Пусть $F(x, y)$ – функция, голоморфная в некоторой области пространства $\mathbf{C}^2$. Если посмотреть на F как на бинарную операцию, то ее ассоциативность означает, что в некоторой области пространства в $\mathbf{C}^3$ выполнено соотношение

$$F(F(x,y),z) = F(x, F(y,z)). \tag{7}$$

Абсолютно так же как на коммутативность мы можем посмотреть на другое важное свойство бинарных операций – ассоциативность.

Определение 6: Говорим, что функция $\varphi(x, y)$ *квазиассоциативна*, если найдутся три непостоянных аналитических функции одного переменного $g = (a, b, c) \in \mathcal{G}$, т.ч. $\psi(x, y) = g \cdot \varphi(x, y) = c(\varphi(a(x), b(y)))$ – ассоциативна, т.е. $\psi(\psi(x, y), z) = \psi(x, \psi(y, z)$ или

$$c(\varphi(a(c(\varphi(a(x), b(y)))), b(z))) = c(\varphi(a(x), b(c(\varphi(a(y), b(z)))))). \tag{8}$$

где (x, y, z) – три независимые переменные.

Для проверки того, что некая функция является квазикоммутативной, в соответствии с определением 1 надо найти три неизвестные функции (соотношение (1)). Но утверждение 2 показывает, что задача сводится к поиску одной функции. Аналогично для проверки квазиассоциативности требуется найти три функции (соотношение (8)). Покажем, что достаточно двух.

Утверждение 7: Функция $\varphi(x, y)$ квазиассоциативна тогда и только тогда, когда найдется пара непостоянных функций одного переменного (p, q), т.ч. $\psi(x, y) = p(\varphi(q(x), y))$ – ассоциативна, т.е.

$$\begin{aligned}\psi(\psi(x,y),z) = p \circ \varphi[q \circ p \circ \varphi(q(x),y),z] = \\ p \circ \varphi[q(x), p \circ \varphi(q(y),z)] = \psi(x, \psi(y,z)).\end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство: Подставим в соотношении (8) $b^{-1}(x)$ вместо x, $b^{-1}(y)$ вместо y, $b^{-1}(z)$ вместо z. А также положим $p = b \circ c$ и $q = a \circ b^{-1}$. Получим соотношение (9).

Соотношение (9), очевидно, эквивалентно соотношению

$$\varphi[q \circ p \circ \varphi(q(x),y),z] = \varphi[q(x), p \circ \varphi(q(y),z)].$$

Если теперь заменить x на $q^{-1}(x)$, то получим

$$\varphi[q\circ p\circ\varphi(x,y),z]=\varphi[x,p\circ\varphi(q(y),z)]. \tag{10}$$

Количество неизвестных функций в соотношении (10) можно сократить еще на одну. Положим в (10) $y=y_0,\ z=z_0$. Будем использовать обозначения, введенные выше: $f_\varphi^{y_0}(x)=f^{y_0}(x)=\varphi(x,y_0)$. Получим $f^{z_0}\circ q\circ p\circ f^{y_0}(x)=f^{\zeta_0}(x)$ где $\zeta_0=p(\varphi(y_0,z_0))$. Откуда следует, что $p=(q)^{-1}\circ(f^{z_0})^{-1}\circ f^{\zeta_0}\circ(f^{y_0})^{-1}$. В результате выражаем p через q.

Утверждение 8: Функция $x^2+x\,y$ не является квазиассоциативной. *Доказательство:* Запишем условие квазиассоциативности в форме (10). Получаем

$$\left(q\left(p\left(x^2+xy\right)\right)\right)^2+q\left(p\left(x^2+xy\right)\right)z-x^2-xp\left(\left(q\left(y\right)\right)^2+q\left(y\right)z\right)=0. \tag{11}$$

Учитывая, что $q(y)$ не есть тождественный ноль, обозначим $X=x^2+x\,y,\ Z=q(y)^2+q(y)\,z$, тогда

$$x=(\sqrt{y^2+4\,X}-y)/2,\qquad z=-\frac{\left(q\left(y\right)\right)^2-Z}{q\left(y\right)}.$$

Т.е. мы от независимых переменных (x,y,z) переходим к независимым переменным (X,y,Z), и (11) примет вид

$$\left(q\left(p\left(X\right)\right)\right)^2-\frac{q\left(p\left(X\right)\right)\left(\left(q\left(y\right)\right)^2-Z\right)}{q\left(y\right)}-$$
$$\left(-y/2+1/2\,\sqrt{y^2+4\,X}\right)^2-\left(-y/2+1/2\,\sqrt{y^2+4\,X}\right)p\left(Z\right)=0.$$

Продифференцируем полученное выражение по Z, получаем

$$-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}p\left(Z\right)\right)q\left(y\right)\sqrt{y^2+4\,X}+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}p\left(Z\right)\right)q\left(y\right)y+2\,q\left(p\left(X\right)\right)=0$$

или

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}p\left(Z\right)\right)\,q\left(y\right)}{2\,q\left(p\left(X\right)\right)}=\frac{1}{\left(-y+\sqrt{y^2+4\,X}\right)}$$

Возьмем от обеих частей равенства логарифм и продифференцируем по X и по y, получим $0 = -\left(y^2 + 4\,X\right)^{-3/2}$. Противоречие, т.е. таких p и q не существует. Утверждение доказано.

4. Об ассоциативных аналитических функциях

В соответствии с нашими определениями семейство квазикоммутативных функций – это $\mathcal{G}$-орбита семейства коммутативных функций, а семейство квазиассоциативных функций – это $\mathcal{G}$-орбита семейства ассоциативных функций.

Нетрудно дать описание совокупности коммутативных функций. В алгебре $\mathbf{C}[x, y]$ сходящихся степенных рядов от (x, y) ряды, инвариантные относительно транспозиции T представляют собой подалгебру и, в частности, линейное подпространство. Всякий ряд из $\mathbf{C}[x, y]$ можно представить в виде суммы коммутативной и антикоммутативной компоненты.

$$z(x, y) = z^+(x, y) + z^-(x, y) = \frac{z(x, y) + Tz(x, y)}{2} + \frac{z(x, y) - Tz(x, y)}{2}.$$

Соответственно, $P^+ = (Id{+}T)/2,\ P^- = (Id{-}T)/2$ – это проекторы $\mathbf{C}[x, y]$ на $\mathbf{C}[x, y]^+$ и на $\mathbf{C}[x, y]^-$, подпространства коммутативных и антикоммутативных функций. В частности, $\mathbf{C}[x, y]^+$, совокупность коммутативных степенных рядов, – это бесконечномерное линейное пространство.

А что нам известно о строении совокупности ассоциативных аналитических функций, т.е. функций, удовлетворяющих условию (7)?

Очевидно, что это не линейное пространство и не конус.

Утверждение 9. (a) Все ассоциативные полиномы $P(x, y)$ степени не выше чем два присутствуют в следующем списке:
$P_1 = p + pq(x + y) + q\,(pq - 1)\ xy,\ P_2 = (x + y) + qxy,\ P_3 = x,\ P_4 = y.$
(b) Все полиномы из этого списка содержатся в Cl^1.
Доказательство: Подставляем общий полином степени не выше двух в (7), решаем полученную систему уравнений на коэффициенты и получаем приведенный выше набор решений. Это доказывает (a). Полиномы P_3 и P_4 содержатся в Cl^0. Подставляя полиномы P_1 и P_2 в уравнение, определяющее Cl^1, убеждаемся, что оно выполнено. Это доказывает (b).

И.В. Маресин заметил, что если в соотношении $w = F(x, y)$ сделать произвольную локально обратимую замену

$$x \to \alpha(x), \quad y \to \alpha(y), \quad w \to \alpha(w), \quad \text{т.е.}$$
$$F(x,y) \to (\alpha)^{-1}(F(\alpha(x),\alpha(y)) = M_\alpha(F(x,y)), \tag{12}$$

то свойство (7) ассоциативности функции F сохранится. Преобразования вида (12) – это некоторая псевдоподгруппа в $\mathcal{G}$, которую мы обозначим $\mathcal{M}$.

Утверждение 10. Действие $\mathcal{M}$ сохраняет как ассоциативность, так и сложность.
Доказательство: Непосредственная проверка.

Утверждение 11.
(a) Полиномы P_1 и P_2 из утверждения 8 принадлежат $\mathcal{M}$-орбите $(x+y)$ или 0.
(b) Полный список ассоциативных полиномов степени не выше чем два по модулю $\mathcal{M}$-действия имеет следующий вид: $0, \quad x, \quad y, \quad (x+y)$.
Доказательство: Пусть $q \neq 0$, применяя к P_2 преобразование M_α при $\alpha(t) = t\,q^{-1}$, получаем $x+y+x\,y$. Полагая $\alpha(t) = t-1$ и применяя к $x+y+x\,y$ преобразование M_α, получаем $x\,y$. Полагая $\alpha(u) = \exp(u)$, получаем $M_{\exp}(x\,y) = x+y$.

Теперь рассмотрим P_1. Пусть $p\,q = 1$, т.е. $P_1 = p+x+y$. Применяя преобразование M_α при $\alpha(t) = t-p$, получаем $x+y$. Если $p\,q \neq 1$, то применяя M_α при $\alpha(t) = t+p/(1-pq)$, получаем $q\,(pq-1)\,xy$. Если $q = 0$, то $F_1 = 0$, в противном случае полагая $\alpha(t) = t\,(q(pq-1))^{-1}$, получаем $x\,y$ и, далее, $x+y$.

Утверждение 12. Пусть аналитическая функция $F(x,y)$ ассоциативна (т.е. удовлетворяет (7)). Тогда
(a) $N(F) = 0 \;\Leftrightarrow$ либо $F(x,y) = const$, либо $F = x$, либо $F = y$,
(b) $N(F) = 1 \;\Leftrightarrow F(x,y) = \alpha^{-1}(\alpha(x)+\alpha(y))$, где $\alpha(t) \neq const$.
Доказательство: Пусть $N(F) = 0$. Если $F = const$, то соотношение (7), очевидно, выполнено. Пусть $F = F(x)$, где F – непостоянна, тогда (7) принимает вид $F(F(x)) = F(x)$. Для непостоянной функции это означает, что $F(x) = x$. Аналогично, если $F = F(y)$, то (7) принимает вид $F(z) = F(F(z))$, откуда следует, что $F(y) = y$. Это доказывает (a).

Пусть $N(F) = 1$, т.е $F(x,y) = c(a(x)+b(y))$, где все три функции одного переменного непостоянны. Применим преобразование $M_{b^{-1}}$ к $c(a(x)+b(y))$ и сменим обозначения. А именно, $a(b^{-1})$ на a и $b(c)$ на c.

Тогда функция примет вид $F = c(a(x)+y)$. Записывая для нее соотношение (7), получим

$$E = c\left(a\left(x\right) + c\left(a\left(y\right) + z\right)\right) - c\left(a\left(c\left(a\left(x\right) + y\right)\right) + z\right) = 0 \qquad (13)$$

Применим к этому соотношению дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial x} - a'(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

После сокращения на ненулевой множитель $c'(a(x) + c(a(y) + z))\, a'(x)$ получим $c'(a\,(y) + z)\, a'(y) = 1$. Откуда сразу получаем, что c' и a' – постоянны, т.е $a(x) = \lambda\, x + \mu,\ c(u) = u/\lambda + \nu$. Подставляя эти a и c в (7), получим

$$E = \frac{(-\lambda+1)\, z - \lambda^2\nu - \mu\lambda + \nu\lambda + \mu}{\lambda^2} = 0.$$

Откуда следует, что $\lambda = 1$ и мы получаем $F(x,y) = (x+y)+p$. Применяя преобразование M_α при $\alpha(t) = t-p$, получаем $x+y$. Это доказывает (b).

В заключение – вопрос.

Вопрос 13. Существуют ли ассоциативные функции сложности выше чем один?

Если нет, то полученное нами описание ассоциативных функций двух переменных является полным.

Список литературы

[1] А. Н. Колмогоров, “О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения”, Докл. АН СССР, 114:5 (1957), 953–956.

[2] А. Г. Витушкин, О многомерных вариациях. — М.: ГТТИ, 1955.

[3] В.И.Арнольд, Некоторые вопросы приближения и представления функций (1958), В сборнике "К 60-летию В.И.Арнольда М.Фазис, 770 с, 1997.

[4] А. Г. Витушкин, “13-я проблема Гильберта и смежные вопросы”, УМН, 59:1(355) (2004), 11–24; Russian Math. Surveys, 59:1 (2004), 11–25.

[5] V.K.Beloshapka, “Analytic complexity of functions of two variables”, Russian Journal of Mathematical Physics, 14:3 (2007), 243–249.

[6] V.K.Beloshapka, Stabilizer of a Function in the Gage Group, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 24, No. 2, 2017, 1–10.