Орбиты действия калибровочной группы

В.К.Белошапка

03.01.2023

Аннотация

Построены дифференциально-алгебраические описания орбит действия калибровочной группы для некоторых дифференциально-алгебраических множеств и функций. Во всех рассмотренных случаях показано, что что орбита представляет собой дифференциально-алгебраическое множество. Даны применения построенных критериев.

[1]

1. Введение.

Вопрос представимости аналитических функций суперпозициями функций меньшего числа переменных обсуждался в ряде работ [1], [2]. В этом контексте представляет интерес иерархия классов $Cl^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$, которая определяется индуктивно. При этом Cl^0 – это аналитические функции одного переменного (x или y), а класс Cl^{n+1} состоит из аналитических функций, имеющих локальное представление вида $z = c(A_n(x, y)+ B_n(x, y))$, где A_n и B_n – это функции из Cl^n, а $c(t)$ – аналитическая функция одного переменного. Одна из основных характеристик $z(x, y)$, аналитической функции двух переменных, – это ее *сложность* $N(z)$. То, что $N(z) = n$, означает, что $z \in Cl^n \setminus Cl^{n-1}$, если же z не попала ни

[1]Механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, Воробьевы горы, 119991 Москва, Россия, vkb@strogino.ru
Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ

в один из классов, то пишем, что $N(z)=\infty$. При этом сложность элемента аналитической функции, вычисленная в одной точке, будет совпадать со сложностью в любой другой неособой точке. Множество особых точек для представления функции, голоморфной в области двумерного пространства суперпозицией минимальной сложности, – это собственное аналитическое подмножество этой области.

Сложность $N(z)$ инвариантна относительно некоторого действия. Пусть f – росток аналитической функции двух переменных в начале координат и $f(0,0)=0$ (стандартный росток). Обозначим через G группу ростков голоморфных отображений вида $\{u \to \lambda u + o(u)\}$, $\lambda \neq 0$, обозначим $\mathcal{G} = G \times G \times G$. И если $g = (a(u), b(u), c(u)) \in \mathcal{G}$, то обозначим $\varphi(x,y) = c(f(a(x), b(y))$ через $g \circ f$. При этом будем говорить, что φ и f эквивалентны.

Пусть $z^{(k)}$ – это вектор, составленный из аналитической функции $z(x,y)$ и ее частных производных порядка не выше k. Пусть имеется набор дифференциальных полиномов $P = \{P_j(x,y,w^{(k)})\}$ с комплексными коэффициентами. Этот набор порождает радикальный дифференциальный идеал $I(P)$ в соответствующем дифференциальном кольце. По теореме Ритта-Роденбаша этот идеал имеет конечный базис [5]. Пусть $V(P) = \{z(x,y) : P_j(x,y,z^{(k)}) = 0\}$ – совокупность аналитических решений системы $P=0$. В таком случае мы говорим, что совокупность аналитических функций $V(P)$ – это дифференциально-алгебраическое множество, $P=0$ – это определяющие его соотношения, а функции $z(x,y)$, которые удовлетворяют таким соотношениям, – это дифференциально-алгебраические функции. Имеет место теорема Ритта [5], аналогичная теореме Гильберта о нулях. Широкий класс аналитических функций, которые не являются дифференциально-алгебраическими описан в [1].

Пусть A – некая совокупность аналитических функций. $Orb(A)$ – это орбита действия $\mathcal{G}$ на A, т.е.

$$Orb(A) = \{z(x,y) : \exists\, g \in \mathcal{G},\ w(x,y) \in A,\ \text{т.ч. } z(x,y) = g \circ w(x,y)\}.$$

Если $Orb(A) = A$, мы говорим, что множество A инвариантно относительно действия $\mathcal{G}$.

Все классы аналитической сложности Cl^n – это инвариантные дифференциально-алгебраические множества. В частности,

$$Cl^0 = V(d_0), \quad \text{где} \quad d_0(z^{(1)}) = z'_z\, z'_y, \quad Cl^1 = V(d_1), \ \text{где}$$
$$d_1(z^{(3)}) = {z'_y}^2 z'_x z'''_{xxy} - {z'_y}^2 z''_{xy} z''_{xx} - z'_y {z'_x}^2 z'''_{xyy} + z''_{yy} {z'_x}^2 z''_{xy} = 0.$$

2. Орбита многообразия решений уравнения Хопфа.

Пусть
$$hp(w^{(1)}) = w'_y - w\,w'_x = 0$$
– уравнение Хопфа и $V(hp)$ – совокупность его аналитических решений. Как известно, общее решение уравнения $hp(z^{(1)}) = 0$ удовлетворяет неявному соотношению вида $\Phi(z, y - xz) = 0$. Откуда видно, что $V(hp)$ не инвариантно относительно действия $\mathcal{G}$. Наша цель – дать описание $Orb(V(hp))$ как дифференциально-алгебраического множества.

Итак, $z \in Orb(V(hp))$, если найдется $g \in \mathcal{G}$, т.ч. $w(x,y) = g \circ z(x,y) = \gamma(z(\alpha(x), \beta(y)))$ удовлетворяет уравнению Хопфа. Подставляя, получаем
$$z'_y(\alpha(x), \beta(y))\,\beta'(y) = \gamma(z(\alpha(x), \beta(y)))\,z'_x(\alpha(x), \beta(y))\,\alpha'(x).$$
Заменим x на $\alpha^{-1}(x)$ и y на $\beta^{-1}(y)$, получим
$$z'_y(x,y)\,b(y) = \gamma(z(x,y))\,z'_x(x,y)\,a(x), \quad \text{где } a(x) = \alpha'(\alpha^{-1}(x)),\ b(y) = \beta'(\beta^{-1}(y)).$$
При фиксированных непостоянных $a(x)$ и $b(y)$ мы, решая обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем $\alpha(x)$ и $\beta(y)$. Для того чтобы решить это уравнение относительно γ, необходимо и достаточно выполнения условия
$$\Delta_z\left(\frac{z'_y(x,y)\,b(y)}{z'_x(x,y)\,a(x)}\right) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta_z = z'_y(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} - z'_x(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{1}$$

В дальнейшем будем обозначать производные нижними индексами, т.е. как a_p, b_q, $z_{m,n}$. Причем всю совокупность производных функции f порядков до n включительно будем обозначать $f^{(n)}$. В этих обозначениях наше условие принимает вид:
$$e(a^{(1)}, b^{(1)}, z^{(2)}) = -a\,b\,{z_{0,1}}^2 z_{2,0} + 2\,ab z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - ab z_{0,2} {z_{1,0}}^2 -$$
$$a b_1 z_{0,1} {z_{1,0}}^2 - a_1 b {z_{0,1}}^2 z_{1,0} = 0. \tag{2}$$
Выражая b_1/b из (2) и записывая условие независимости этого выражения от x, получаем
$$e_1(a^{(2)}, z^{(3)}) = -a^2 z_{0,1}{}^3 z_{1,0} z_{3,0} + 2\,a^2 {z_{0,1}}^3 {z_{2,0}}^2 + 2\,a^2 {z_{0,1}}^2 {z_{1,0}}^2 z_{2,1} -$$
$$3\,a^2 {z_{0,1}}^2 z_{1,0} z_{1,1} z_{2,0} - a^2 z_{0,1} {z_{1,0}}^3 z_{1,2} + a^2 z_{0,2} {z_{1,0}}^3 z_{1,1} + a\,a_1 {z_{0,1}}^3 z_{1,0} z_{2,0} -$$
$$a\,a_1 {z_{0,1}}^2 {z_{1,0}}^2 z_{1,1} - a\,a_2 {z_{0,1}}^3 {z_{1,0}}^2 + {a_1}^2 {z_{0,1}}^3 {z_{1,0}}^2 = 0. \tag{3}$$

Выражая a_2 из (3), получаем $a_2 = A_2(a^{(1)}, z^{(3)})$. Записывая условие независимости этого выражения от y, получаем $e_2(a^{(1)}, z^{(4)}) = 0$. Выражая отсюда a_1, получаем $a_1 = A_1(a^{(0)}, z^{(4)})$. Записывая условие, что производная A_1 по x равна AA_2 (т.е. A_2 после подстановки A_1), получаем $P_1(z^{(5)}) = 0$. Записывая условие, что производная A_1 по y равна нулю, получаем $P_2(z^{(5)}) = 0$.

В $\mathcal{G}$ имеется подгруппа, состоящая из линейных преобразований

$$(\ x \to t_1\, x, \quad y \to t_2\, y, \quad z \to t_3\, z \ ).$$

В силу этого полученные полиномы обладают свойством тройной однородности, которая характеризуется векторным показателем однородности (m_x, m_y, m_z). Т.е. при подсчете веса монома $z_{p_1\, q_1}^{r_1} \ldots z_{p_n\, q_n}^{r_n}$ мы получаем

$$m_x = \sum p_j\, r_j, \quad m_y = \sum q_j\, r_j, \quad m_z = \sum r_j.$$

В качестве еще одной особенности наших полиномов следует отметить то, что все их коэффициенты – целые числа. Чтобы охарактеризовать такой дифференциальный полином P мы будем использовать следующий набор данных (паспорт): $pass(P) = \{k, (m_x, m_y, m_z), Nm, [M_-, M_+]\}$, где k – дифференциальный порядок, (m_x, m_y, m_z) – показатель однородности, Nm – число мономов, M_- и M_+ – минимальный и максимальный коэффициенты.

Вычисления выполнены с помощью программы Maple. С деталями вычисления и явным видом полиномов (P_1, P_2) можно ознакомиться здесь: <http://vkb.strogino.ru/> (файл <Hull-Hopf.mw>).

Итак, нами доказана следующая теорема:

Теорема 1: Пусть $hp(z^{(1)}) = z'_y - z\, z'_x$ и $V(hp)$ – совокупность аналитических решений $hp(z^{(1)}) = 0$. Тогда орбита действия $\mathcal{G}$ на $V(Hp)$ имеет вид

$$Orb(V(hp)) = V(P_1, P_2),$$

где (P_1, P_2) – два дифференциальных полинома, чьи паспорта имеют вид

$$pass(P_1) = \{5, (9, 10, 13), 109, [-22, 18]\}, \quad pass(P_2) = \{5, (10, 9, 13), 109, [-22, 18]\}.$$

В частности, орбита $V(hp)$ является дифференциально-алгебраическим множеством.

3. Орбита функции $(x^2 + x\,y)$.

С точки зрения теории аналитической сложности функция $w = x^2 + x\,y$ – это функция аналитической сложности два, т.е. $w \in Cl^2 \setminus Cl^1$. Эта функция принадлежит $Cl^{1+\iota}$, узкому подклассу Cl^2, состоящему из функций, имеющих в калибровочной группе 1-мерный стабилизатор. Наша ближайшая цель – написать систему дифференциальных полиномов, задающих $Orb(w)$ – орбиту функции w.

Итак, $z \in Orb(w)$ если найдется $g \in \mathcal{G}$, т.ч. $z(x,y) = g \circ (x^2 + x\,y) = \gamma(a(x)^2 + a(x)\,b(y))$. Запишем дифференциальное условие того, что $z(x,y)$ есть функция от $(a(x)^2 + a(x)\,b(y))$, получаем:

$$e(z^{(1)}, a^{(1)}, b^{(1)}) = z_{1,0}a_0b_1 - z_{0,1}a_1\,(2\,a_0 + b_0) = 0.$$

Выражая отсюда функцию b_1 и записывая условие ее независимости от x, получаем

$$\begin{aligned} e_1(z^{(2)}, a^{(2)}, b_0) = -2\,z_{0,1}a_1z_{2,0}{a_0}^2 + 2\,z_{1,1}a_1z_{1,0}{a_0}^2 + 2\,z_{0,1}a_2z_{1,0}{a_0}^2 - \\ z_{0,1}a_1z_{2,0}a_0b_0 + z_{1,1}a_1z_{1,0}a_0b_0 + z_{0,1}a_2z_{1,0}a_0b_0 - z_{0,1}{a_1}^2z_{1,0}b_0 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Теперь из (4) мы выражаем b_0. Далее, записывая условие независимости этого выражения от x и условие согласованности b_0 и b_1, получаем еще два условия

$$\begin{aligned} e_2(z^{(3)}, a^{(3)}) = z_{3,0}{a_1}^2a_0{z_{0,1}}^2 - z_{2,1}{a_1}^2a_0z_{1,0}z_{0,1} - \\ 2\,z_{1,1}{a_1}^2a_0z_{0,1}z_{2,0} + 2\,{z_{1,1}}^2{a_1}^2a_0z_{1,0} - 3\,a_1a_0{z_{0,1}}^2a_2z_{2,0} + \\ 3\,z_{1,1}a_1a_0z_{1,0}z_{0,1}a_2 - a_3a_1a_0z_{1,0}{z_{0,1}}^2 + 3\,a_0z_{1,0}{z_{0,1}}^2{a_2}^2 + \\ 2\,{a_1}^3{z_{0,1}}^2z_{2,0} - 2\,z_{1,1}{a_1}^3z_{1,0}z_{0,1} - 2\,{a_1}^2z_{1,0}{z_{0,1}}^2a_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3(z^{(3)}, a^{(2)}) = z_{2,1}{a_0}^2z_{1,0}{z_{0,1}}^2 - z_{1,1}{a_0}^2{z_{0,1}}^2z_{2,0} - \\ z_{1,2}{a_0}^2{z_{1,0}}^2z_{0,1} + z_{0,2}z_{1,1}{a_0}^2{z_{1,0}}^2 + a_1a_0{z_{0,1}}^3z_{2,0} - \\ z_{1,1}a_1a_0z_{1,0}{z_{0,1}}^2 - a_0z_{1,0}{z_{0,1}}^3a_2 + {a_1}^2z_{1,0}{z_{0,1}}^3 = 0. \end{aligned}$$

Из соотношения $e_2(z^{(3)}, a^{(2)}) = 0$ получаем $a_2 = A_2(z^{(3)}, a^{(1)})$, из соотношения $e_3(z^{(3)}, a^{(3)}) = 0$ получаем $a_3 = A_3(z^{(3)}, a^{(2)})$. Записывая условия независимости A_3 и A_2 от y, получаем $e_4(z^{(4)}, a^{(2)}) = 0$ и $e_5(z^{(4)}, a^{(1)}) = 0$. Соотношение $e_4(z^{(4)}, a^{(2)}) = 0$ позволяет получить еще одно выражение $a_2 = AA_2(z^{(3)}, a^{(1)})$. Можем написать $e_6(z^{(4)}, a^{(1)}) = AA_2(z^{(3)}, a^{(1)}) -$

$A_2(z^{(3)}, a^{(1)}) = 0$. Далее отсюда получаем, что $a_1 = LA_1(z^{(4)})\, a_0$, откуда, записывая условие независимости $LA_1(z^{(4)})$ от y, получаем $e_7(^{(5)}) = 0$. Теперь мы можем записать еще два условия. Условие согласования для a_1 и a_2 и условие согласования для a_2 и a_3. Получаем соответственно $e_9(z^{(5)}) = 0$ и $e_{10}(z^{(5)}) = 0$. При этом, однако, оказывается, что $e_{10} = e_8$. Итак, совокупность трех дифференциально-полиномиальных условий

$$Q_1(z^{(5)}) = e_7(z^{(5)}) = 0, \quad Q_2(z^{(4)}) = e_8(z^{(4)}) = 0, \quad Q_3(z^{(5)}) = e_9(z^{(5)}) = 0,$$

– это условие, необходимое для попадания $z(x,y)$ в орбиту $w = x^2 + x\,y$. Однако для любой функции z, которая не попала в Cl^1 наше вычисление можно обратить, т.е. найти три непостоянные аналитические функции (a, b, γ), т.ч. z есть результат действия соответствующего элемента $\mathcal{G}$ на $x^2 + x\,y$. Отметим, что полученное представление $z(x,y)$ в виде $g \circ w(x,y)$ продолжается по *почти всем* путям, по которым продолжается z. Т.е. по любым путям в области, где имеется голоморфный элемент z минус собственное аналитическое подмножество. Таким образом, обращение в ноль трех полиномов (Q_1, Q_2, Q_3) – это критерий попадания z в орбиту w. Итак, проведенное рассуждение доказывает следующую теорему:

Теорема 2: Пусть $z(x,y)$ – аналитическая функция, т.ч. $z(x,y) \notin Cl^1$, т.е. $d_1(z^{(3)}) \neq 0$. Тогда z принадлежит $\mathcal{G}$-орбите функции $w = x^2 + x\,y$ в том и только том случае, когда $Q_1(z^{(5)}) = Q_2(z^{(4)}) = Q_3(z^{(5)}) = 0$. Причем

$$pass(Q_1) = \{5, (6, 10, 10), 80, [-12, 12]\},$$
$$pass(Q_2) = \{4, (8, 10, 12), 90, [-21, 21]\},$$
$$pass(Q_3) = \{5, (8, 10, 12), 117, [-33, 39]\}.$$

Сами полиномы и несложная процедура их вычисления представлена здесь: <http://vkb.strogino.ru/> (файл <Hull-XY.mw>). Отметим, что аналитическая сложность любой функции из $Orb(w)$ равна сложности $x^2 + x\,y$, т.е. двум.

С другой стороны, полученные уравнения – это уравнения Cl^1_w, т.е. первого класса для иерархии, построенной на базовой функции $w = x^2 + x\,y$ вместо $(x + y)$, как при стандартном подходе.

Имея критерий, легко проверить что, например, функция $z = x^2 + x\,y + y^2$ не эквивалентна $w = x^2 + x\,y$. Действительно, при этом

$$Q_1(z) = 720\,x^4 - 288\,x^3 y - 1728\,x^2 y^2 - 288\,xy^3 + 288\,y^4.$$

В нашем рассмотрении мы полагаем, что (x, y) – это независимые переменные, а w – зависимая. Но действие калибровочной группы на переменные (x, y, w) не зависит от этого предположения. Точка зрения на калибровочную группу, при которой нет нужды делить переменные на зависимую и независимые, – это взгляд на эту группу как на группу автоморфизмов плоской 3-ткани [6]. Поменяем наш выбор, объявив зависимой переменной x. Тогда неявное соотношение $x^2 + x\,y - w = 0$ определит функцию $x(y, w) = (\sqrt{y^2 + 4\,w} - y)/2$. Полученный нами критерий принадлежности орбите можно использовать и при такой постановке. Для этого нужно помнить, что полиномы Q_1, Q_2, Q_3 – это полиномы от производных z по x и y. Любое соотношение вида $x = f(y, z)$ позволяет, как неявное уравнение, вычислять производные z по x и y. Результат можно подставлять в наш критерий.

Меняя в нашем последнем результате точку зрения (зависимая не $z(x, y)$, а $x(y, z)$), получаем, что функция $(\sqrt{z - 3\,y^2} - y)/2$ не принадлежит орбите $(\sqrt{y^2 + 4\,w} - y)/2$.

4. Орбита неявной функции.

Пусть теперь $U(x, y, w) = w^6 + x\,w^2 + y\,w + 1 = 0$ – универсальное уравнение 6-й степени. Его универсальность в том, что любое уравнение 6-й степени может быть сведено к этому. Т.е. корни произвольного уравнения 6-й степени могут быть выражены через его коэффициенты в виде композиции этой функции $w(x, y)$, операции извлечения корней и арифметических действий. Нетрудно убедиться в том, что из $U(x, y, w) = 0$ следует, что $hp(w^{(1)}) = 0$. Т.е. эта алгебраическая функция попадает в число аналитических решений уравнения Хопфа $w(x, y) \in V(hp)$. Неинвариантность уравнения $U(x, y, w) = 0$ и самой функции $w(x, y)$ относительно действия $\mathcal{G}$ очевидна.

Воспользуемся соображением, которое мы обсудили в конце предыдущего пункта. Поменяем обозначения переменных и запишем уравнение в виде $V(x, y, w) = x^6 + y\,x^2 + w\,x + 1 = 0$, подразумевая, что нас интересует зависимость $w(x, y)$. Ясно, что $w = -(x^6 + x^2\,y + 1)/x$. То, что функция $z(x, y)$ принадлежит орбите w, означает, что найдутся непостоянные аналитические функции (a, b, c), т.ч. $c(z) = -(a(x)^6 + a(x)^2\,b(y) + 1)/a(x)$. Дифференциальное условие того, что z есть функция от $(a(x)^6 + a(x)^2\,b(y) + 1)/a(x)$ имеет вид (переходим на индексные обозначения как в предыдущем разделе):

$$e(z^{(1)},a^{(1)},b^{(1)}) = 5\,z_{0,1}{a_0}^6a_1 - z_{1,0}{a_0}^3b_1 + z_{0,1}{a_0}^2a_1b_0 - z_{0,1}a_1 = 0.$$

Выражая отсюда функцию b_1 и записывая условие ее независимости от x, получаем

$$\begin{gathered}e_1(z^{(1)},a^{(1)},b_0) = -5\,{a_0}^7a_1z_{0,1}z_{2,0} + 5\,{a_0}^7a_1z_{1,0}z_{1,1} + 5\,a_2z_{0,1}{a_0}^7z_{1,0} + \quad (5)\\ 15\,{a_0}^6{a_1}^2z_{0,1}z_{1,0} - z_{0,1}{a_0}^3b_0a_1z_{2,0} + {a_0}^3b_0z_{1,0}a_1z_{1,1} + a_2z_{0,1}{a_0}^3b_0z_{1,0} -\\ z_{0,1}{a_0}^2b_0z_{1,0}{a_1}^2 + a_0a_1z_{0,1}z_{2,0} - a_0a_1z_{1,0}z_{1,1} - a_2z_{0,1}a_0z_{1,0} + 3\,{a_1}^2z_{0,1}z_{1,0} = 0.\end{gathered}$$

Теперь из (5) мы выражаем b_0, записываем условие независимости этого выражения от x и условие согласованности b_0 и b_1, получаем еще два условия

$$\begin{gathered}e_2(z^{(3)},a^{(3)}) = 10\,z_{3,0}{z_{0,1}}^2{a_0}^8{a_1}^2 - 10\,z_{2,1}z_{0,1}{a_0}^8z_{1,0}{a_1}^2 - 20\,z_{0,1}{a_0}^8{a_1}^2z_{1,1}z_{2,0} +\\ 20\,{a_0}^8z_{1,0}{a_1}^2{z_{1,1}}^2 - 30\,a_2{z_{0,1}}^2{a_0}^8a_1z_{2,0} + 30\,a_2z_{0,1}{a_0}^8z_{1,0}a_1z_{1,1} - 10\,a_3{z_{0,1}}^2{a_0}^8z_{1,0}a_1 +\\ 30\,{a_2}^2{z_{0,1}}^2{a_0}^8z_{1,0} - 10\,{z_{0,1}}^2{a_0}^7{a_1}^3z_{2,0} + 10\,z_{0,1}{a_0}^7z_{1,0}{a_1}^3z_{1,1} + 10\,a_2{z_{0,1}}^2{a_0}^7z_{1,0}{a_1}^2 -\\ 30\,{z_{0,1}}^2{a_0}^6z_{1,0}{a_1}^4 + z_{3,0}{z_{0,1}}^2{a_0}^2{a_1}^2 - z_{2,1}z_{0,1}{a_0}^2z_{1,0}{a_1}^2 - 2\,z_{0,1}{a_0}^2{a_1}^2z_{1,1}z_{2,0} +\\ 2\,{a_0}^2z_{1,0}{a_1}^2{z_{1,1}}^2 - 3\,a_2{z_{0,1}}^2{a_0}^2a_1z_{2,0} + 3\,a_2z_{0,1}{a_0}^2z_{1,0}a_1z_{1,1} - a_3{z_{0,1}}^2{a_0}^2z_{1,0}a_1 +\\ 3\,{a_2}^2{z_{0,1}}^2{a_0}^2z_{1,0} + 5\,{z_{0,1}}^2a_0{a_1}^3z_{2,0} - 5\,z_{0,1}a_0z_{1,0}{a_1}^3z_{1,1} - 5\,a_2{z_{0,1}}^2a_0z_{1,0}{a_1}^2 + 3\,{z_{0,1}}^2z_{1,0}{a_1}^4 = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}e_3(z^{(3)},a^{(2)}) = z_{2,1}{z_{0,1}}^2{a_0}^2z_{1,0} - {z_{0,1}}^2{a_0}^2z_{1,1}z_{2,0} - z_{1,2}z_{0,1}{a_0}^2{z_{1,0}}^2 +\\ z_{0,2}{a_0}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1} + {z_{0,1}}^3a_0a_1z_{2,0} - {z_{0,1}}^2a_0z_{1,0}a_1z_{1,1} - a_2{z_{0,1}}^3a_0z_{1,0} + {z_{0,1}}^3z_{1,0}{a_1}^2 = 0.\end{gathered}$$

Из соотношения $e_2(z^{(3)},a^{(3)}) = 0$ получаем $a_3 = A_3(z^{(3)},a^{(2)})$, из соотношения $e_3(z^{(3)},a^{(2)}) = 0$ получаем $a_2 = A_2(z^{(3)},a^{(1)})$. Подставляя $a_2 = A_2(z^{(3)},a^{(1)})$ в $A_3(z^{(3)},a^{(2)})$, получаем $a_3 = AA_3(z^{(3)},a^{(1)})$. Записывая условия независимости A_2 от y и того, что $(A_2)'_x = AA_3$, получаем $e_4(z^{(4)},a^{(1)}) = 0$ и $e_5(z^{(4)},a^{(1)}) = 0$. Отметим, что e_4 – это сумма 16 мономов, тогда как e_5 – это сумма 52 мономов. Соотношение $e_4(z^{(4)},a^{(1)}) = 0$ позволяет получить выражение $a_1 = A_1(z^{(4)})\,a_0$. Записывая условие $(A_1)'_y = 0$, получаем $e_6(z^{(5)}) = 0$. Подставляя это выражение для a_1 в e_5 и удаляя ненулевой множитель a_0^2, получаем $ee_5(z^{(4)},a_0) = 0$. Это выражение – полином от a_0, который содержит только 6-ю и 0-ю степени a_0. Поэтому получаем выражение $a_0^6 = A_{06}(z^{(4)})$. Записывая условие $(A_{06})'_y = 0$, получаем $e_7(z^{(5)}) = 0$. Запишем условие согласования $a_0^6 = A_{06}$ и $a_1 = A_1\,a_0$. Получаем $e_8(z^{(5)}) = 0$.

Отметим также, что e_7 и e_8 имеют общий множитель

$$R(z^{(4)}) = {z_{0,1}}^3{z_{1,0}}^2z_{2,2} - {z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{1,1}z_{2,1} - {z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{1,2}z_{2,0} + {z_{0,1}}^3{z_{1,1}}^2z_{2,0} - {z_{0,1}}^2z_{0,2}{z_{1,0}}^2z_{2,1} + {z_{0,1}}^2z_{0,2}z_{1,0}z_{1,1}z_{2,0} - {z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^3z_{1,3} - {z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1}z_{1,2} + 3\,z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^3z_{1,2} + z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^2{z_{1,1}}^2 + z_{0,1}z_{0,3}{z_{1,0}}^3z_{1,1} - 3\,{z_{0,2}}^2{z_{1,0}}^3z_{1,1}.$$

Итак, выполнение трех дифференциально-полиномиальных условий $R_1(z^{(5)}) = e_6(z^{(5)}) = 0$, $R(z^{(4)})\,R_2(z^{(5)}) = e_7(z^{(5)}) = 0$, $R(z^{(4)})\,R_3(z^{(5)}) = e_8(z^{(5)}) = 0$ необходимо для попадания $z(x,y)$ в орбиту $w = -(x^6 + x^2\,y + 1)/x$. В силу обратимости нашего вычисления для функции, не принадлежащей Cl^1 эти три соотношения являются критерием попадания в орбиту.

С деталями проведенных в Maple вычислений можно ознакомиться здесь: <http://vkb.strogino.ru/>, файл Hull-H6.mw.

Итак, проведенное рассуждение доказывает следующую теорему (характеристики полиномов приводим в форме паспорта того же формата, что и в предыдущем разделе):

Теорема 3: Пусть w – решение уравнения $U(x,y,w) = x^6 + y\,x^2 + w\,x + 1 = 0$, а $z(x,y) \notin Cl^1$ – некая аналитическая функция Тогда z принадлежит $\mathcal{G}$-орбите функции w в том и только том случае, когда

$$R_1(z^{(5)}) = R(z^{(4)})\,R_2(z^{(4)}) = R(z^{(4)})\,R_3(z^{(5)}) = 0, \quad \text{причем}$$

$$\begin{aligned} pass(R_1) &= \{5,(6,10,10),80,[-12,12]\}, \\ pass(R_2) &= \{5,(12,16,18),1208,[-810,828]\}, \\ pass(R_3) &= \{5,(16,20,24),2960,[-6048,4212]\} \\ pass(R) &= \{4,(4,4,6),12,[-3,3]\}. \end{aligned}$$

Бросается в глаза совпадение паспортов R_1 и Q_1 (из предыдущего раздела). Проверка показывает, что $R_1 = Q_1$.

Полученный результат удобно применять для демонстрации неэквивалентности функций. Пусть $w_1 = x^2 + x\,y$, $w_2 = x^2 + x\,y + y^2$, $w_3 = -(x^6 + x^2\,y + 1)/x$. Неэквивалентность w_1 и w_2 была показана выше.

Неэквивалентность w_1 и w_3 следует из того, что $R(w_1)\,R_3(w_1) = 864\,x^{15}$. Неэквивалентность w_2 и w_3 следует из того, что

$$R_1(w_2) = Q_1(w_2) = 720\,x^4 - 288\,x^3y - 1728\,x^2y^2 - 288\,xy^3 + 288\,y^4.$$

5. Заключительные замечания

Вернемся к исходной постановке предыдущего пункта. Пусть нас интересует условие на функцию $z = f(x, y)$, которое гарантирует, что она попала в орбиту функции $w(x, y)$, т.ч. $U(x, y, w) = w^6 + x\,w^2 + y\,w + 1 = 0$. Устраиваем циклическую перестановку переменных. В результате уравнение на w превращается в $V(x, y, w) = x^6 + y\,x^2 + w\,x + 1 = 0$, а f дает связь переменных вида $T = x - f(y, z) = 0$. Вычисляя из неявного соотношения $T = 0$ производные z до порядка пять по (x, y) и подставляя результат в дифференциальные полиномы R_1, R_2, R_3, получаем три соотношения $p_1(x, y, z) = p_2(x, y, z) = p_3(x, y, z) = 0$. Далее осуществляем обратную перестановку переменных и получаем $r_j(x, y) = p_j(z, x, y) = p_j(f(x, y), x, y) = 0,\ j = 1, 2, 3$. Таким образом, $z = f(x, y)$ попадает в орбиту w в том и только том случае, если выполнено условие $r_1(x, y) = r_2(x, y) = r_3(x, y) = 0$.

К задаче построения дифференциального критерия принадлежности орбите некоторой аналитической функции можно подойти с других позиций. В [3] были выписаны два дифференциальных инварианта J_+ и J_+. Каждый из них имеет дифференциальный порядок четыре и представляет собой отношение двух однородных форм степени тринадцать. А также выписаны два оператора инвариантного дифференцирования D_x и D_y, которые порождают поле инвариантов соответствующем дифференциальном поле. Значения этих инвариантов в соответствующих точках равны. Однако написав два таких соотношения мы еще не получаем критерия, т.к. в этих соотношениях присутствует неопределенность в выботе соответствующих точек. Похожая проблема возникает при рассмотрении вопроса об эквивалентности G-структур с помощью редукции ее к e-структуре, т.е. к вопросу о возможности перевести один репер (или корепер) в другой такой репер локальным диффеоморфизмом. Эта проблема подробно обсуждается в [7]. Можно применить предложенный там подход к нашей ситуации. Добавим к паре основных инвариантов $I_1 = J_+$ и $I_2 = J_+$ еще один инвариант пятого порядка, например, $I_3 = D_y(J_+)$. Это три функции переменных x и y. Ясно, что между ними имеется дифференциально-полиномиальное соотношение вида $\mathcal{P}(I_1, I_2, I_3) = 0$. Вычислив $\mathcal{P}$ для набора $(I_1(w), I_2(w), I_3(w))$ мы получаем необходимое условие $\mathcal{P}(I_1(z), I_2(z), I_3(z)) = 0$, которому должна удовлетворять любая функция $z(x, y)$, $\mathcal{G}$-эквивалентная функции $w(x, y)$. Полный набор таких условий – это критерий. К сожалению, автору (с помощью ноутбука и Maple) не удалось преодолеть вычислительные сложности. На этом пути не удалось выписать ни одного необходимого условия.

По аналогии с определением алгебраического множества будем называть *дифференциально-алгебраическим* множеством совокупность ростков аналитических функций, которые обращают в ноль конечную совокупность дифференциальных полиномов. Во всех случаях, которые мы рассмотрели выше, исходным объектом было некоторое дифференциально-алгебраическое множество. И, как показали наши вычисления, орбита по отношению к действию калибровочной группы также является дифференциально-алгебраической. По-видимому, это можно рассматривать как подтверждение того, что при некоторых предположениях орбита дифференциально-алгебраического множества под действием дифференциально-алгебраической группы является дифференциально-алгебраическим множеством. Отметим, что в контексте функций двух переменных множество функций одного переменного (а именно ими действует $\mathcal{G}$) дифференциально-алгебраично.

Список литературы

[1] A.Ostrowski, Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, Math.Z.,1920, 8, P.241-298 (английский перевод: https://arxiv.org/abs/2211.02088).

[2] А. Г. Витушкин, “13-я проблема Гильберта и смежные вопросы”, УМН, 59:1 (355) (2004), 11–24.

[3] В. К. Белошапка, “Аналитическая сложность: калибровочная псевдогруппа, ее орбиты и дифференциальные инварианты”, Труды МИАН, 298, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2017, 58–66

[4] В. К. Белошапка, Геометрические конструкции в теории аналитической сложности, принято к печати в Известия РАН, сер.мат., 2023

[5] Ritt J. F.,Differential algebra, N. Y.,1950

[6] W. Blaschke, Einführung in die Geometrie der Waben, Birkhäuser, Basel–Stuttgart, 1955.

[7] P.Olver, Equivalence, Invariants, Symmetry, Cambrige Univ.Press, 1995, 525 p.