УДК 517.55

В. К .Белошапка

Геометрические конструкции в теории аналитической сложности

В работе в контексте теории аналитической сложности рассмотрены две геометрические конструкции. Первая: на совокупности аналитических функций построена метрика, инвариантная относительно действия калибровочной группы. Вторая: дано дифференциально-алгебраическое описание касательного пространства к классу функций двух переменных аналитической сложности не выше чем два в точке $z_0 = x^2 + xy$. Этот результат позволил привести простой пример кубического полинома, чья аналитическая сложность равна трем.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: Аналитические функции, аналитическая сложность, метрическое пространство.

§ 1. Введение

Операция суперпозиции (подстановки) позволяет из функций меньшего числа переменных получать функции бо́льшего числа переменных. В этой тематике имеется ряд ярких достижений, но много вопросов остаются открытыми [1], [2], [3], [4], [5]. Чтобы придать рассмотрению определенность, следует уточнить класс функций и число переменных. Вопрос о возможности представления функций двух переменных с помощью функций одного переменного (проблема "$2 \to 1$"), как и другие похожие вопросы, таит немало интересных и нерешенных проблем. Данная работа примыкает к кругу публикаций ([6], [7] и др.), где этот вопрос обсуждается в контексте аналитических функций.

Иерархию классов Cl^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, определяем индуктивно. При этом Cl^0 – это аналитические функции одного переменного (x или y), а класс Cl^{n+1} состоит из аналитических функций, имеющих локальное представление вида $z = c(A_n(x, y) + B_n(x, y))$, где A_n и B_n – это функции из Cl^n, а $c(t)$ – аналитическая функция одного переменного. Одна из основных характеристик $z(x, y)$, аналитической функции двух переменных, – это ее *сложность* $N(z)$. То, что $N(z) = n$, означает, что $z \in Cl^n \setminus Cl^{n-1}$, если же z не попала ни в один из классов, то пишем, что $N(z) = \infty$. При этом сложность элемента аналитической функции, вычисленная в одной точке, будет совпадать со сложностью в любой другой неособой точке. Множество особых точек для представления функции, голоморфной в области двумерного пространства суперпозицией минимальной сложности, – это собственное аналитическое подмножество этой области.

При построении иерархии можно базовую функцию $(x + y)$ заменить на произвольную аналитическую функцию двух переменных $\phi(x, y)$ и получить иерархию Cl^n_ϕ и, соответственно, относительную сложность $N_\phi(z)$. Зафиксируем некоторый росток функции двух переменных $\varphi(x,y)$ с условием $\varphi'_x\,\varphi'_y \neq 0$. Тогда можно определить возрастающую последовательность классов функций. Положим $Cl^1_\varphi = [\varphi]$. Далее по индукции: Cl^{n+1}_φ – это совокупность функций, имеющих ростки, эквивалентные (под действием калибровочной группы, см. ниже) росткам функций вида $c(\varphi(A_n(x,y), B_n(x,y)))$, где $A_n(x,y)$, $B_n(x,y) \in Cl^n_\varphi$, $c(t)$ – аналитична.

Характеристики сложности, как $N(z)$, так и $N_\varphi(z)$, инвариантны относительно некоторого действия. Пусть f – росток аналитической функции двух переменных в начале координат и $f(0,0)=0$ (стандартный росток). Обозначим через G группу ростков голоморфных отображений вида $\{u \to \lambda\, u + o(u)\}$, $\lambda \neq 0$, обозначим $\mathcal{G} = G \times G \times G$. И если $g = (a(u), b(u), c(u)) \in \mathcal{G}$, то обозначим $\varphi(x,y) = c(f(a(x), b(y))$ через $g \circ f$. При этом будем говорить, что φ и f эквивалентны.

Если f – росток в (p,q), то $(f(x-p, y-q) - f(p,q))$ – *стандартный* росток. Отношение эквивалентности стандартных ростков порождает отношение эквивалентности произвольных ростков, голоморфных и полных аналитических функций. Пусть в окрестности D точки (x_0,y_0) имеется две голоморфные функции $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ (элементы аналитических функций). Пусть росток $\tilde{F}_1(x,y,x_0,y_0)$ эквивалентен ростку $\tilde{F}_2(x,y,x_0,y_0)$. Тогда утверждается, что для всех путей $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, выходящих из (x_0,y_0), в $D \setminus \sigma$ (σ – собственное аналитическое подмножество) существует непрерывное по t семейство ростков $g_t = (a_t(s), b_t(s), c_t(s)) \in \mathcal{G}$, т.ч. $\tilde{F}_2(x,y,x(t),y(t)) = g_t \circ \tilde{F}_1(x,y,x(t),y(t))$. Т.е. ростки F_1 и F_2 будут эквивалентны в каждой точке их общей области определения минус собственное аналитическое подмножество (дискриминантное подмножество). В этом смысле факт локальной эквивалентности ростков перестает быть локальным. Если f – росток, то класс полных аналитических функций, эквивалентных функции, порожденной этим ростком, мы будем обозначать $[f]$.

Совокупность всех аналитических функций двух комплексных переменных (x,y) обладает естественной структурой пучка ростков. С этой точки зрения полная аналитическая функция, порожденная некоторым конкретным ростком, представляет собой связную компоненту этого пучка, содержащую данный росток. Введенное выше отношение эквивалентности – это отношение эквивалентности на пучке ростков.

Отметим также, что с точностью до этой эквивалентности все аналитические функции одного переменного сводятся к следующим четырем классам: $z = 0,\ z = 1,\ z = x,\ z = y$.

§ 2. Аналитические функции как метрическое пространство

Наша ближайшая цель – превратить совокупность аналитических функций двух переменных $\mathcal{A}$ в метрическое пространство. При этом мы будем предполагать, что мы удалили из этой совокупности константы и функции одного переменного. Таким образом, $\mathcal{A}$ – это совокупность аналитических функций с тем условием, что $F'_x F'_y$ не есть тождественный ноль.

Для двух ростков аналитических функций двух переменных $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ введем следующую характеристику:

$$\rho([\varphi],[\psi]) = \log(\max\{N_{[\varphi]}([\psi]), N_{[\psi]}([\varphi])\}).$$

Теорема 1: Функция ρ определяет на $\mathcal{A}$ метрику.

Доказательство: Поскольку $N_{[\varphi]}([\psi]) \geqslant 1$, то $\rho([\varphi],[\psi]) \geqslant 0$. Равенство $\rho([\varphi],[\psi]) = 0$ равносильно тому, что $[\varphi] = [\psi]$. Симметричность функции ρ видна из определения. Осталось проверить неравенство треугольника.

В связи с этим отметим следующее свойство относительной сложности. Пусть имеются три аналитические функции $(\varphi,\ \psi,\ \chi)$. Причем $N_\varphi(\psi) \leqslant l$, $N_\psi(\chi) \leqslant m$, тогда $N_\varphi(\chi) \leqslant l\,m$. Отсюда сразу следует необходимое неравенство. А именно, что для любых трех классов $[\varphi]$, $[\psi]$, $[\chi]$ выполнено неравенство

$$\rho([\varphi],[\chi]) \leqslant \rho([\varphi],[\psi]) + \rho([\psi],[\chi]).$$

Теорема доказана.

Метрика ρ может принимать значение ∞, и такую метрику иногда называют квазиметрикой. При этом нетрудно превратить ее в метрику, принимающую только конечные значения. Действительно, если $h(s) = s/(1+s)$, то величина

$$\tilde{\rho}([\varphi],[\chi]) = h(\rho([\varphi],[\chi]))$$

также является метрикой на $\mathcal{A}$, но при этом $\tilde{\rho}([\varphi],[\chi]) \leqslant 1$ для любой пары функций.

В связи с тем, что ρ может принимать как конечные, так и бесконечные значения можно ввести на $\mathcal{A}$ еще одно отношение эквивалентности. А именно, отношение "*находиться на конечном расстоянии*". Вся совокупность $\mathcal{A}$ распадается в дизъюнктное объединение по "типам". Функции (классы), принадлежащие одному типу, находятся на конечном расстоянии, разным – на бесконечном.

Как справедливо заметила М.Степанова, мощность множества типов не может быть счетной.

Метрика, описанная выше, специализирована для сложности типа $(2 \to 1)$. Т.е. для изучения вопросов представимости функций двух переменных с помощью суперпозиции функций одного переменного. Но нетрудно распространить ее и на общий случай. Например, для функций трех переменных возможны два подхода: $(3 \to 1)$ и $(3 \to 2)$. Введение метрики возможно в обоих случаях. Действительно, единственное свойство метрики, которое нуждается в доказательстве – это неравенство треугольника. Это неравенство следует из мультипликативной оценки относительной сложности, которая имеет место в очень широком контексте.

§ 3. Классы сложности как подмногообразия в пространстве функций

Классам сложности Cl^n, введенным выше, можно сопоставить I^n – радикальный дифференциальный идеал, состоящий из дифференциальных полиномов с рациональными коэффициентами, которые аннулируют функции из $z \in Cl^n$ (см. [7]). По теореме Ритта-Роденбаша [8] каждый такой идеал имеет конечный базис $D_n = (d_1, \ldots, d_l)$. В силу инвариантности любого класса Cl^n относительно действия калибровочной группы $\mathcal{G}$ этот базис содержит только полиномы, не зависящие явно от переменных (x, y, z), а только от производных функции z с некоторыми условиями однородности.

Дифференциальный идеал I^1 имеет одну образующую.

$$d(z) = {z'_y}^2 z'_x z'''_{xxy} - {z'_y}^2 z''_{xy} z''_{xx} - z'_y {z'_x}^2 z'''_{xyy} + z''_{yy} {z'_x}^2 z''_{xy}.$$

Пользуясь тем, что $Cl^1 = \{z : d(z) = 0\}$ нетрудно показать, что сложность $z = x^2 + xy$ по отношению к $x + y$ равна двум.

Cl^2 состоит из функций вида

$$z = S(C(A(x) + B(y)) + R(P(x) + Q(y))). \tag{3.1}$$

Для вычисления образующих идеалов I^n имеются алгоритмы. Однако большой объем вычислений приводит к тому, что уже вычисление D_2 представляется недоступным [10].

Нетрудно показать, что все полиномы степени два не выходят за рамки Cl^2. Также нетрудно показать, что полином степени 11 общего положения имеет сложность выше, чем два. Вопрос о конкретном примере полинома сложности три – гораздо сложнее. В [**?**] были предложены примеры функций (в том числе полиномы) произвольной наперед заданной сложности. Однако даже если говорить только о полиномах сложности три – это полиномы астрономически высокой степени.

Ниже предлагается рассмотреть классы сложности как бесконечномерные подмногообразия некоторого функционального пространства. На этом пути удается конструктивно описать касательное пространство к Cl^2 в некоторой точке. Это, далее, позволяет явно предъявить полином степени три, имеющий аналитическую сложность три.

Перейдем к нашему построению.

Зафиксируем функцию $Z_0 = x^2 + xy$ как точку Cl^2. Функцию Z_0 можно представить в виде (3.1), полагая

$$S_0(u) = u,\ C_0(u) = u,\ R_0(u) = \exp(u),\ A_0(u) = u^2,\ B_0(u) = 0,$$
$$P_0(u) = \ln(u),\ Q_0(u) = \ln(u).$$

Теперь проварьируем этот набор из семи функций.

$$S(u) = u + t\,s(u),\ C(u) = u + t\,c(u),\ R(u) = \exp(u) + t\,r(u),$$
$$A(u) = u^2 + t\,a(u),\ B(u) = t\,b(u),\ P(u) = \ln(u) + t\,p(u),\ Q(u) = \ln(u) + t\,q(u),$$

добавив к каждой из них возмущение, линейное по параметру t. Т.е. мы в пространстве семи функциональных параметров

$$(S(u), C(u), R(u), A(u), B(u), P(u), Q(u))$$

провели через точку $(u, u, \exp(u), u^2, 0, \ln(u), \ln(u))$ прямую в направлении $(s(u), c(u), r(u),$ где функции (s, c, r, a, b, p, q) – аналитичны и композиция имеет непустую область определения. В возмущенном выражении $Z(x, y, t) = (x^2+xy)+t\,z(x, y)+o(t)$ выделим линейное по t слагаемое. Получим параметрическое описание $T\,Cl^2_{(x^2+xy)}$ – касательного пространства к Cl^2 в точке $(x^2 + xy)$

$$z(x, y) = a(x) + b(y) + c(x^2) + (p(x) + q(y))xy + r(\ln(x) + \ln(y)) + s(x^2 + xy).$$

Поскольку функциональные параметры (s, c, r, a, b, p, q) – произвольны, то описание $T\,Cl^2_{(x^2+xy)}$ не изменится, если мы заменим $a(x)+c(x^2)$ на $a(x)$ и $r(\ln(x)+\ln(y))$ на $r(xy)$. Таким образом,

$$T\,Cl^2_{(x^2+xy)} = \{z(x, y) = a(x) + b(y) + (p(x) + q(y))xy + r(xy) + s(x^2 + xy)\}. \quad (3.2)$$

Наша ближайшая цель – перейти от параметрического описания касательного пространства к определяющим его соотношениям. Для этого мы должны исключить из соотношения (3.2) функциональные параметры
(s, r, q, p, b, a). В дальнейшем будем обозначать производные нижними индексами, т.е. как $a_p,\ b_q,\ z_{m,n}$ и т.д. Причем всю совокупность производных функции z порядков до n включительно будем обозначать $z^{(n)}$, аналогично $a^{(n)}$ и т.д.

Положим
$$\triangle_s = \frac{\frac{\partial}{\partial x}}{2\,x + y} - \frac{\frac{\partial}{\partial y}}{x}, \quad \triangle_r = \frac{\frac{\partial}{\partial x}}{y} - \frac{\frac{\partial}{\partial y}}{x}.$$

Ядро $\triangle_s$ – это функции вида $s(x^2 + xy)$, ядро $\triangle_r$ – это функции вида $r(xy)$. Применим к (3.2) дифференциальный оператор $\triangle_s$. Получаем

$$e_1(a^{(1)}, b^{(1)}, p^{(1)}, q^{(1)}, r^{(1)}, z^{(1)}) = p_1x^2y - 2\,q_1x^2y - q_1xy^2 - 2\,p_0x^2 -$$
$$2\,q_0x^2 - 2\,r_1x^2 + a_1x - z_{1,0}x - 2\,b_1x - b_1y + 2\,z_{0,1}x + z_{0,1}y = 0. \quad (3.3)$$

Отметим, что условие (3.3) является не только необходимым для того, чтобы z имела вид (3.2), но и локально достаточным. Это условие существования функции $s(u)$, удовлетворяющей соотношению (3.2). Все остальные соотношения имеют такой же смысл. Наше построение является обратимым, а условие, которое мы получим в конце – критерием.

Итак, выражая из (3.3) функцию r_1 и применяя $\triangle_r$, получаем

$$e_2(a^{(2)}, b^{(2)}, p^{(2)}, q^{(2)}, z^{(2)}) = p_2x^3y + 2\,q_2x^2y^2 + q_2xy^3 - 2\,p_1x^3 -$$
$$p_1x^2y + 4\,q_1x^2y + 3\,q_1xy^2 + a_2x^2 - z_{2,0}x^2 + 2\,z_{1,1}x^2 + 2\,z_{1,1}xy + 2\,b_2xy +$$
$$b_2y^2 - 2\,z_{0,2}xy - z_{0,2}y^2 - a_1x + z_{1,0}x + 2\,b_1x + 3\,b_1y - 2\,z_{0,1}x - 3\,z_{0,1}y = 0 \quad (3.4)$$

Выражая из (3.4) функцию $q_2 = Q_2(q^{(1)}, a^{(2)}, b^{(2)}, p^{(2)}, z^{(2)})$ и записывая условие того, что она не зависит от x, получаем соотношение
$e_3(q_1, a^{(3)}, b^{(2)}, p^{(3)}, z^{(3)}) = 0$. Выражая из этого соотношения функцию $q_1 = Q_1(a^{(2)}, b^{(2)}, p^{(2)}, z^{(2)})$ и записывая условие того, что она не зависит от x, получаем соотношение $e_{41}(a^{(4)}, b^{(2)}, p^{(4)}, z^{(4)}) = 0$. Записывая то, что производная q_1 равна q_2, получаем еще одно соотношение $e_{42}(a^{(3)}, b^{(3)}, p^{(3)}, z^{(4)}) = 0$. Пара соотношений $e_{41} = 0$ и $e_{42} = 0$ – это условие разрешимости относительно $q(u)$.

Выразим из $e_{42} = 0$ функцию $b_3 = B_3(a^{(3)}, p^{(3)}, b^{(2)}, z^{(4)})$, а из $e_{41} = 0$ функцию $b_2 = B_2(a^{(4)}, p^{(4)}, b_1, z^{(4)})$. Подставляя B_2 в B_3, получаем $b_3 = BB_3(a^{(4)}, p^{(4)}, b_1, z^{(4)})$. Записывая условие того, что B_2 не зависит от x, получаем соотношение $e_{51}(a^{(5)}, p^{(5)}, z^{(5)}) = 0$ (отметим, что это выражение не зависит от b). Записывая условие того, что производная B_2 по y равна BB_3, получаем соотношение $e_{52}(a^{(4)}, p^{(4)}, b_1, z^{(5)}) = 0$. Получая из него выражение $b_1 = B_1(a^{(4)}, p^{(4)}, z^{(5)})$ и записывая, что производная B_1 по x равна нулю, получаем $e_{61}(a^{(5)}, p^{(5)}, z^{(6)}) = 0$. Подставляя B_1 в B_2, получаем $b_2 = BB_2(a^{(4)}, p^{(4)}, z^{(4)})$. Записывая условие того, что производная B_1 по y равна BB_2, получаем соотношение $e_{62}(a^{(4)}, p^{(4)}, z^{(6)}) = 0$. Соотношения $e_{51} = e_{61} = e_{62} = 0$ – это условия разрешимости наших соотношений относительно функции $b(y)$.

Выражая p_5 из $e_{51} = 0$ и из $e_{61} = 0$, получаем $p_5 = P_{51}(a^{(5)}, p^{(4)}, z^{(5)})$ и $p_5 = P_{52}(a^{(5)}, p^{(4)}, z^{(6)})$. Выражая p_4 из $e_{62} = 0$, получаем $p_4 = P_4(a^{(4)}, p^{(3)}, z^{(6)})$. Подставляя P_4 в P_{51} и P_{52}, получаем $p_5 = PP_{51}(a^{(5)}, p^{(3)}, z^{(6)})$ и
$p_5 = PP_{52}(a^{(5)}, p^{(3)}, z^{(6)})$. Записывая, что P_4 не зависит от y, получаем
$e_{71}(a^{(4)}, p^{(3)}, z^{(7)}) = 0$. Записывая, что $PP_{51} = PP_{52}$, получаем
$e_{72}(a^{(5)}, p^{(3)}, z^{(6)}) = 0$. Записывая, что производная P_4 равна PP_{51} (подстановка $p_4 = P_4$), получаем $e_{73}(a^{(5)}, p^{(3)}, z^{(7)}) = 0$. Выражая p_3 из каждого из трех соотношений $e_{71} = 0,\ e_{72} = 0,\ e_{73} = 0$, получаем

$$p_3 = P_{31}(a^{(4)}, p^{(2)}, z^{(7)}),\ p_3 = P_{32}(a^{(5)}, p^{(2)}, z^{(6)}), p_3 = P_{33}(a^{(5)}, p^{(2)}, z^{(7)}).$$

Тогда получаем $e_{81}(z^{(8)}) = 0$ – условие того, что P_{31} не зависит от y, $e_{82}(a^{(5)}, z^{(6)}) = 0$ – условие того, что $P_{32} = P_{31}$, $e_{83}(a^{(5)}, z^{(7)}) = 0$ – условие того, что $P_{33} = P_{31}$, $e_{84}(a^{(5)}, z^{(8)}) = 0$ – условие того, что производная P_{31} равна P_4 (подстановка $p_3 = P_{31}$). Соотношения $e_{81} = e_{82} = e_{83} = e_{84} = 0$ – это условия разрешимости наших соотношений относительно функции $p(x)$.

Выражая a_5 из каждого из трех соотношений $e_{82} = 0,\ e_{83} = 0,\ e_{84} = 0$, получаем

$$a_5 = A_{51}(a^{(4)}, z^{(8)}),\ a_5 = A_{52}(a^{(4)}, z^{(6)}),\ a_5 = A_{53}(a^{(4)}, z^{(7)}).$$

Получаем $e_{91}(z^{(8)}) = 0$ – условие того, что A_{51} не зависит от y, $e_{92}(z^{(7)}) = 0$ – условие того, что $A_{52} = A_{51}$, $e_{93}(z^{(8)}) = 0$ – условие того, что $A_{53} = A_{51}$. Соотношения $e_{91} = e_{92} = e_{93} = 0$ – это условия разрешимости наших соотношений относительно функции $a(x)$.

В результате этого вычисления мы окончательно получаем, что критерий принадлежности функции $z(x, y)$ касательному пространству к Cl^2 в точке $(x^2 + xy)$ – это четыре линейных дифференциальных уравнения $e_{81}(z^{(8)}) = e_{91}(z^{(8)}) = e_{92}(z^{(7)}) = e_{93}(z^{(8)}) = 0$.

Текст программы для Maple, которая осуществляет описанные выше вычисления, можно посмотреть на <http://vkb.strogino.ru/> (раздел "другое" п.3).

Выпишем полученные дифференциальные полиномы.

$$e_{92}(z) = -6\,z_{2,3} - 6\,z_{2,4}y + z_{3,2} + (6\,x - y)\,z_{3,3} + \left(-2\,xy - y^2\right) z_{3,4} - z_{4,2}x - z_{5,2}x^2 + \left(2\,x^2 + 2\,xy\right) z_{4,3} = 0,$$

$$e_{81}(z) = (-144\,x - 105\,y)\,z_{2,3} + \left(-144\,x^2 - 276\,xy - 87\,y^2\right) z_{2,4} + \left(-24\,x^3 - 108\,x^2y - 84\,xy^2 - 18\,y^3\right) z_{2,5} + \left(-8\,x^3y - 12\,x^2y^2 - 6\,xy^3 - y^4\right) z_{2,6} + 24\,xz_{3,2} + \left(144\,x^2 + 81\,xy\right) z_{3,3} + \left(76\,x^3 + 94\,x^2y + 27\,xy^2\right) z_{3,4} - 24\,x^2z_{4,2} + \left(8\,x^4 + 16\,x^3y + 10\,x^2y^2 + 2\,xy^3\right) z_{3,5} + \left(-24\,x^3 - 11\,x^2y\right) z_{4,3} + \left(-4\,x^4 - 4\,x^3y - x^2y^2\right) z_{4,4} = 0,$$

$$e_{91}(z) = \left(1152\,x^2 + 1440\,xy + 525\,y^2\right) z_{2,3} + \left(1152\,x^3 + 2928\,x^2y + 1956\,xy^2 + 435\,y^3\right) z_{2,4} + \left(192\,x^4 + 984\,x^3y + 1212\,x^2y^2 + 564\,xy^3 + 90\,y^4\right) z_{2,5} + \left(64\,x^4y + 136\,x^3y^2 + 108\,x^2y^3 + 38\,xy^4 + 5\,y^5\right) z_{2,6} + \left(-192\,x^2 - 100\,xy\right) z_{3,2} + \left(-1152\,x^3 - 1248\,x^2y - 425\,xy^2\right) z_{3,3} + \left(-608\,x^4 - 1132\,x^3y - 726\,x^2y^2 - 155\,xy^3\right) z_{3,4} + \left(-64\,x^5 - 168\,x^4y - 160\,x^3y^2 - 66\,x^2y^3 - 10\,xy^4\right) z_{3,5} + \left(192\,x^3 + 100\,x^2y\right) z_{4,2} + \left(192\,x^4 + 248\,x^3y + 95\,x^2y^2\right) z_{4,3} + \left(32\,x^5 + 52\,x^4y + 28\,x^3y^2 + 5\,x^2y^3\right) z_{4,4} - 20\,z_{5,2}x^3y = 0,$$

$$e_{93}(z) = (-1560\,x^2 - 2304\,xy - 720\,y^2)z_{2,3} + \left(-768\,x^3 - 3048\,x^2y - 3216\,xy^2 - 900\,y^3\right) z_{2,4} + \left(-384\,x^3y - 744\,x^2y^2 - 456\,xy^3 - 90\,y^4\right) z_{2,5} + \left(260\,x^2 + 384\,xy + 120\,y^2\right) z_{3,2} + \left(1560\,x^3 + 2044\,x^2y + 336\,xy^2 - 120\,y^3\right) z_{3,3} + \left(256\,x^4 - 216\,x^3y - 1096\,x^2y^2 - 792\,xy^3 - 165\,y^4\right) z_{3,4} + \left(-128\,x^4y - 312\,x^3y^2 - 276\,x^2y^3 - 106\,xy^4 - 15\,y^5\right) z_{3,5} + \left(-260\,x^3 - 384\,x^2y - 120\,xy^2\right) z_{4,2} + \left(584\,x^4 + 1412\,x^3y + 1084\,x^2y^2 + 255\,xy^3\right) z_{4,3} + \left(128\,x^5 + 376\,x^4y + 400\,x^3y^2 + 182\,x^2y^3 + 30\,xy^4\right) z_{4,4} + \left(-260\,x^4 - 384\,x^3y - 120\,x^2y^2\right) z_{5,2} + \left(-64\,x^5 - 124\,x^4y - 76\,x^3y^2 - 15\,x^2y^3\right) z_{5,3} = 0.$$

В итоге мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 2:
(a) $T\,Cl^2_{(x^2+xy)}$, касательное пространство к Cl^2 в точке $Z_0 = (x^2+xy)$, состоит из аналитических функций $z(x,y)$ вида

$$z(x,y) = a(x) + b(y) + (p(x) + q(y))xy + r(xy) + s(x^2+xy),$$

где (a, b, p, q, r, s) – аналитические функции одного переменного, т.ч. сумма определена в некоторой непустой области.
(b) Четыре линейных дифференциальных уравнения 8-го порядка на функцию z

$$e_{81}(z^{(8)}) = e_{91}(z^{(8)}) = e_{92}(z^{(7)}) = e_{93}(z^{(8)}) = 0$$

– это критерий того, что $z(x, y)$ имеет представление вида (a). Подразумевается, что это локальное представление имеет место вне некоторого собственного аналитического подмножества области определения.

Имея критерий принадлежности касательному пространству, нетрудно привести примеры простых выражений, которые ему не принадлежат. Например, если $z = x^2\sqrt{y}$, то, как нетрудно вычислить,

$$e_{92}(z) = \frac{27}{4\,y^{5/2}} \neq 0.$$

Пусть $a \in \mathbf{C}^{10}$ – пространство коэффициентов общего многочлена от (x, y) степени не выше трех и $p(x, y, a)$ – полином, чьи коэффициенты равны a. Пусть $\sigma_2 = \{a \in \mathbf{C}^{10} : N(p(x, y, a)) \leqslant 2\}$.

Теорема 3:
(a) Сложность кубического многочлена $W = x^2 + x\,y^2 + \pi\,x^2\,y$ относительно $(x + y)$ равна трем, т.е. $N(W) = 3$.
(b) σ_2 – собственное алгебраическое подмножество $\mathbf{C}^{10}$, причем σ_2 – множество общих нулей набора полиномов от a с целыми коэффициентами.
Доказательство: То, что сложность W не превосходит трех – очевидно. Поэтому достаточно показать, что $W \notin Cl^2$. Рассмотрим прямую l, проходящую через (x^2+xy) в направлении $z = x^2\sqrt{y}$, т.е. $l = \{Z(x, y, t) = (x^2+xy)+t\,x^2\sqrt{y}\}$. Если бы l целиком содержалась в Cl^2, то ее направляющий вектор был бы касательным. Но это не так и, следовательно, l в Cl^2 целиком не содержится. Рассмотрим дифференциальные полиномы, определяющие Cl^2, и их сужение на l. Мы получим набор полиномов с целыми коэффициентами переменного t, причем не все из них равны нулю. Пусть $P(t)$ – такой полином. Т.е. если для некоторого t функция $Z(x, y, t) \in Cl^2$, то $P(t) = 0$. Нули этого полинома – это конечный набор алгебраических чисел (над полем $\mathbf{Q}$). Поскольку число π – неалгебраично, то $(x^2 + xy + \pi x^2\sqrt{y}) \notin Cl^2$. Теперь сделаем замену $x \to x$, $y \to y^2$, которая не меняет сложности. Получаем $W(x, y) = Z(x, y^2, \pi) = x^2 + x\,y^2 + \pi\,x^2\,y$. Это доказывает (a).

Нетрудно проверить следующие утверждения. Любой полином степени не выше чем два имеет сложность не выше двух. Любой однородный многочлен также имеет сложность не выше двух. Любой кубический многочлен – это сумма полинома степени не выше двух и однородного степени три. Таким образом, все кубические полиномы имеют сложность не выше трех. Как было доказано выше, существуют кубические полиномы сложности три. Рассмотрим сужение системы дифференциальных полиномов с целыми коэффициентами, определяющих Cl^2, на 10-мерное пространство кубических полиномов. Получаем систему полиномов от a (набора коэффициентов общего кубического полинома), определяющую полиномы сложности не выше двух. Это доказывает (b).

Хотя дифференциальные полиномы, задающие второй класс, не даны нам явно, однако имеется алгоритм их построения. Анализ этого алгоритма позволяет написать оценки сверху на дифференциальный порядок, число мономов и величину коэффициентов (это целые числа). Используя такие оценки, нетрудно получить оценку сверху модулей корней полинома $P(t)$ из доказательства теоремы 3. Это позволяет заменить в полиноме W неалгебраический коэффициент π на большое рациональное число.

Поскольку кубический полином $p(x, y, a)$ можно подвергать некоторым преобразованиям, не меняющим ни сложности, ни степени, то размерность пространства параметров (десять) можно понизить.

Список литературы

[1] D. Hilbert, “Mathematische Probleme”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1900, 253–297.

[2] A. Ostrowski, “Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen (англ.перевод https://arxiv.org/abs/2211.02088)”, *Math.Z.*, **8** (1920), 241-298.

[3] В. И. Арнольд, “О функциях трех переменных”, *Докл. АН СССР*, **114**:4 (1957), 679–681.

[4] А. Н. Колмогоров, “О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций одного переменного и сложения”, *Докл. АН СССР*, **114**:5 (1957), 953–956.

[5] А. Г. Витушкин, “13-я проблема Гильберта и смежные вопросы”, *УМН*, **59**:1(355) (2004), 11–24.

[6] V. K. Beloshapka, “Analytical Complexity: Development of the Topic”, *Russian Journ. of Math. Physics*, **19**:4 (2012), 13–22.

[7] V. K. Beloshapka, “Decomposition of functions of finite analytical complexity”, *Журн. СФУ. Сер. Мат. и физ*, **11**:6 (2018), 680–685.

[8] И. Капланский, *Введение в дифференциальную алгебру*, М., 1959.

[9] В. К. Белошапка, “О сложности дифференциально-алгебраического описания классов аналитической сложности”, *Матем. заметки*, **105**:3 (2019), 323–331.

[10] М. А. Степанова, “О функциях конечной аналитической сложности”, *Труды ММО (принято к публикации)*.

В. К .Белошапка (V. K. Beloshapka)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Московский центр фундаментальной и прикладной
математики МГУ
E-mail: vkb@strogino.ru

Поступило в редакцию
03.06.2023