Математические заметки

Том ___ выпуск ___ год ____

УДК 517.55

Об аналитических функциях двух переменных с одномерным стабилизатором

В. К. Белошапка

В работе получено дифференциальное условие того, что аналитическая функция двух переменных имеет одномерный стабилизатор в калибровочной псевдогруппе. Дано мультипликативное представление таких функций (однородные функции). Получено уточнение теоремы о стабилизаторе и построены два важных примера. Поставлен ряд вопросов.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: суперпозиции, аналитическая сложность, дифференциальные полиномы.

С помощью операции суперпозиции (подстановки) можно из функций меньшего числа переменных получать функции бóльшего числа переменных. Есть ситуации, когда так можно представить любую функцию, но, как правило, это не так [1], [2]. Чтобы придать рассмотрению определенность, следует уточнить класс функций и число переменных. Вопрос о возможности представления функций двух переменных с помощью функций одного переменного (проблема "$2 \to 1$") таит немало интересных и нерешенных проблем. Данная работа примыкает к кругу публикаций ([3],[4] и др.), где этот вопрос обсуждается в контексте аналитических функций.

Иерархию классов Cl^n, $n = 0, 1, 2, \dots$, определяем индуктивно. При этом Cl^0 – это аналитические функции одного переменного (x или y), а класс Cl^{n+1} состоит из аналитических функций, имеющих локальное представление вида $z = c(A_n(x, y) + B_n(x, y))$, где A_n и B_n – это функции из Cl^n, а $c(t)$ – аналитическая функция одного переменного. Одна из основных характеристик $z(x, y)$, аналитической функции двух переменных, – это ее *сложность* $N(z)$. То, что $N(z) = n$, означает, что $z \in Cl^n \setminus Cl^{n-1}$, если же z не попала ни в один из классов, то пишем, что $N(z) = \infty$. При этом сложность элемента аналитической функции, вычисленная в одной точке, будет совпадать со сложностью в любой другой неособой точке. Множество особых точек для представления функции суперпозицией минимальной сложности – это собственное аналитическое подмножество.

Полученные в этой области результаты и наблюдения позволяют сформулировать, некоторое общее и неформальное утверждение, которое уместно назвать принципом (*DM-принцип*, differencial modelling principle). Причем речь идет не только о проблеме "$2 \to 1$", но и об общем случае "$m \to n$".

Любой вопрос о возможности представления аналитической функции суперпозицией специального вида имеет эквивалентную переформулировку в виде вопроса о принадлежности функции множеству нулей некоторого дифференциально-полиномиального идеала в соответствующем дифференциальном кольце. И, в этом смысле, становится дифференциально-алгебраическим.

Теорему 1 данной работы также можно рассматривать как иллюстрацию этого принципа.

Сложность, которая была определена выше, а также многие другие ее модификации, инвариантны относительно действия следующей псевдогруппы:

$$\mathcal{G} = \{x \to \alpha(x), \quad y \to \beta(y), \quad f \to \gamma(f)\},$$

где α, β, γ – непостоянные аналитические функции одного переменного. Т.е. если $g = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{G}$, то $g \circ (f(x, y)) = \gamma(f(\alpha(x), \beta(y)))$. В этом случае мы говорим, что f и $g \circ f$ эквиваленитны.

Пусть $St(f)$ – это псевдоподгруппа в псевдогруппе $\mathcal{G}$ преобразований, сохраняющих f, т.е. $St(f) = \{g \in \mathcal{G} : g \circ (f(x, y)) = f(x, y)\}$.

В работе [3] было доказано, что для произвольной аналитической функции f от двух переменных (x, y), т.ч. $f'_x f'_y \neq 0$, имеет место следующая альтернатива (теорема о стабилизаторе):
(1) либо $\dim St(f) = 3$, и это означает, что f эквивалентна $x + y$,
(2) либо $\dim St(f) = 1$, и это означает, что f эквивалентна $r(x + y) + x$, где аналитическая функция r не обращает в тождественный ноль выражение $r'''((r')^2 - r') + (r'')^2(1 - 2r')$,
(3) во всех прочих случаях $\dim St(f) = 0$.

Если размерность стабилизатора равна 3, 1, или 0 для какого-либо ростка функции f, тогда то же самое значение она будет иметь всюду вне собственного аналитического подмножества области D для всякого голоморфного элемента, представляющего f в D. В этом смысле размерность стабилизатора не зависит от точки.

Дифференциальный критерий 3-мерности стабилизатора функции, т.е. ее эквивалентности $(x + y)$, хорошо известен (см.[4]):

$$d_1(f) = {f'_y}^2 f'_x f'''_{xxy} - {f'_y}^2 f''_{xy} f''_{xx} - f'_y {f'_x}^2 f'''_{xyy} + f''_{yy} {f'_x}^2 f''_{xy} = 0, \; d_0(f) = f'_x f'_y \neq 0.$$

В данной работе мы получим аналогичный (правда, более сложный) критерий 1-мерности стабилизатора.

То, что f эквивалентна $r(x + y) + x$, означает, что

$$f(x, y) = c(r(a(x) + b(y)) + a(x)) \tag{1}$$

для некоторых a, b, c. Класс аналитических функций, имеющих представления такого вида, мы обозначим через $Cl^{1+\iota}$. Очевидно, что мы имеем систему включений

$Cl^0 \subset Cl^1 \subset Cl^{1+\iota} \subset Cl^2$. Ясно, что для некоторых (a,b,c,r) функция вида (1) может попасть в Cl^1. Этот вопрос мы обсудим ниже (см. утверждение 4). Задача получения критерия принадлежности $Cl^{1+\iota}$ – это задача исключения из соотношения (1) функций (a,b,c,r) и получения дифференциального соотношения только на функцию f, гарантирующего существование таких (a,b,c,r). Отметим, что алгоритм такого исключения описан в более общей ситуации в [5]. И наше последующее рассуждение вполне соответствует этому алгоритму.

Как было показано в [5], каждой схеме композиции S соответствует класс аналитических функций $Cl(S)$, состоящий из аналитических функций, имеющих представление со схемой S, а также радикальный идеал $\mathcal{I}(S)$ в соответствующем дифференциальном кольце с набором образующих $(P_1,\dots,P_l)$. Причем принадлежность функции f совокупности нулей идеала, т.е. условие $P_1(f)=\dots=P_l(f)=0$, – это критерий представимости f суперпозицией вида S в окрестности неособой точки.

Из процедуры построения и инвариантности класса $Cl(S)$ относительно действия псевдогруппы $\mathcal{G}$ следует несколько свойств полиномов P_j:
(1) все полиномы зависят только от производных функции f, от первых до некоторого старшего порядка, т.е. явной зависимости от переменных нулевой струи (x,y,f) нет.
(2) все полиномы обладают свойством тройной однородности, а именно: пусть $f_{x^p\,y^q}$ – это соответствующая производная, тогда если в полиноме P для каждой производной сделать замену $f_{x^p\,y^q} \to t_1^p\,t_2^q\,t_3 f_{x^p\,y^q}$, то мы получим $t_1^\alpha\,t_2^\beta\,t_3^\gamma\,P$. При этом мы говорим, что степень однородности P равна (α,β,γ), где α – это x-степень, β – это y-степень, γ – это f-степень.
(3) все числовые коэффициенты полиномов P_j – целые числа.

Ниже мы будем иметь дело с весьма солидными дифференциальными полиномами. В связи с этим мы введем *паспорт* полинома $pass(P)$, который представляет собой следующий набор данных: $pass(P(f)) = \{k\,/\,(\alpha,\beta,\gamma)\,/\,n\,/\ [m,M]\}$, где k – дифференциальный порядок полинома, (α,β,γ) – набор степеней, n – число мономов, m – значение минимального коэффициента, M – максимального.

С этой точки зрения $pass(d_1(z))$, где d_1 – это определяющий полином для Cl^1, имеет вид $pass(d_1(z)) = \{3\,/\,(3,3,4)\,/\,4\,/\,[-1,1]\}$.

Теорема 1: Пусть $f(x,y)\notin Cl^0$ – аналитическая функция и $z(x,y)=f'_x/f'_y$.
(a) Критерий принадлежности f классу $Cl^{1+\iota}$ имеет вид $P(z)=Q(z)=R(z)=0$, где дифференциальные полиномы (они будут получены в процессе доказательства) имеют следующие паспорта:
$pass(P(z)) = \{5\,/\,(7,7,12)\,/\,634\,/\,[-324,240]\}$,
$pass(Q(z)) = \{5\,/\,(7,4,8)\,/\,198\,/\,[-132,87]\}$,
$pass(R(z)) = \{\,4\,/\,(5,5,8)\,/\,128\,/\,[-18,36]\}$.
(b) $\dim St(f)=1$ тогда и только тогда, когда

$$P(z)=Q(z)=R(z)=0, \quad d_1(f)\neq 0.$$

Отметим, что условие $d_1(f)\neq 0$ равносильно условию

$$\delta_1(z) = z''_{xy}\,z - z'_x\,z'_y \neq 0.$$

Перейдем к доказательству теоремы.
Доказательство: Дифференцируя (1) по x и по y и исключая $c'(r(a(x)+b(y))+a(x))$, получаем соотношение

$$z(x,y)=\frac{f'_x}{f'_y}=\frac{a'(x)}{b'(y)}\left(\frac{r'(a(x)+b(y))+1}{r'(a(x)+b(y))}\right)$$

или

$$r'(a(x)+b(y))=\frac{a'(x)}{b'(y)\,z(x,y)-a'(x)}=\varphi(x,y). \tag{2}$$

Условие существования такой $r(t)$ – это условие того, что правая часть (2) есть функция переменного $t=a(x)+b(y)$, т.е. $b'\,\varphi'_x-a'\,\varphi'_y=0$. В дальнейшем будем обозначать производные нижними индексами, т.е. как $a_p,\ b_q,\ z_{m,n}$. Причем всю совокупность производных функции z порядков до n включительно будем обозначать $z^{(n)}$. В этих обозначениях наше условие принимает вид:

$$e(a_1,a_2,b_1,b_2,z^{(1)})=b_1{a_1}^2z_{0,1}+z_{0,0}{a_1}^2b_2-{b_1}^2a_1z_{1,0}+{b_1}^2a_2z_{0,0}=0$$

Получаем отсюда b_2 как рациональное выражение $B_2(a_1,a_2,b_1,z^{(1)})$

$$B_2=-\frac{b_1\left({a_1}^2z_{0,1}-a_1b_1z_{1,0}+a_2b_1z_{0,0}\right)}{{a_1}^2z_{0,0}}.$$

Условие существования b_2 – это условие независимости B_2 от x,
т.е. $(B_2)'_x=0$. Получаем

$$\begin{aligned}e_1(a_1,a_2,a_3,b_1,z^{(2)})=(-{a_1}^2z_{0,0}z_{2,0}+{a_1}^2{z_{1,0}}^2+a_1a_2z_{0,0}z_{1,0}+\\ a_1a_3{z_{0,0}}^2-2\,{a_2}^2{z_{0,0}}^2)b_1+{a_1}^3z_{1,1}z_{0,0}-{a_1}^3z_{0,1}z_{1,0}=0.\end{aligned}$$

Если выражение, стоящее множителем при b_1, обращается в тождественный ноль, то, учитывая, что $a_1\neq 0$, получаем

$$\delta_1(z^{(2)})=(z_{0,0}z_{1,1}-z_{0,1}z_{1,0})=0.$$

Но общим решением этого уравнения являются функции вида $z=\alpha(x)\,\beta(y)$. Откуда следует, что $f\in Cl^1$.

Сделаем следующее замечание. Здесь и далее мы будем исходить из того, что, выводя уравнения класса, мы можем предполагать, что мы имеем дело с функцией общего положения, т.е. уклоняющейся от дополнительных соотношений, не являющихся необходимыми. После того как мы выведем наши условия в предположении некоторых дополнительных неравенств, мы локально приблизим произвольные функции нашего класса функциями общего положения и убедимся в том, что полученные условия по непрерывности выполнены для всех функций класса.

Однако если мы смотрим на наше вычисление как на построение декомпозиции, т.е. если нас интересует вычисление функций, дающих представление конкретной функции f (в нашей ситуации функций (c,r,b,a)), то каждое такое неравенство предполагает ветвление алгоритма (ноль – не ноль). Вернемся к нашему вычислению.

Итак, если $f \notin Cl^1$, то $\delta_1(z^{(2)})$ – не ноль и мы получаем $B_1(a_1, a_2, a_3, z^{(2)})$ – выражение для b_1

$$(B_1)^{-1} = \frac{{a_1}^2 z_{0,0} z_{2,0} - {a_1}^2 {z_{1,0}}^2 - a_1 a_2 z_{0,0} z_{1,0} - a_1 a_3 {z_{0,0}}^2 + 2\,{a_2}^2 {z_{0,0}}^2}{{a_1}^3\,\delta_1(z^{(2)})}.$$

Записываем условие независимости от x, получаем

$$\begin{gathered} e_2(a_1, a_2, a_3, a_4, z^{(3)}) = {a_1}^3 z_{0,0} z_{3,0} z_{1,1} - {a_1}^3 z_{0,0} z_{2,1} z_{2,0} - {a_1}^3 z_{1,0} z_{0,1} z_{3,0} + \\ {a_1}^3 z_{0,1} {z_{2,0}}^2 + {a_1}^3 {z_{1,0}}^2 z_{2,1} - {a_1}^3 z_{1,0} z_{1,1} z_{2,0} + {a_1}^2 z_{0,0} a_2 z_{1,0} z_{2,1} - \\ 2\,{a_1}^2 z_{0,0} a_2 z_{1,1} z_{2,0} + {a_1}^2 a_2 z_{1,0} z_{0,1} z_{2,0} + {a_1}^2 {z_{0,0}}^2 z_{2,1} a_3 - {a_1}^2 z_{0,0} z_{0,1} z_{2,0} a_3 - \\ 3\,{a_1}^2 z_{0,0} z_{1,0} z_{1,1} a_3 + 3\,{a_1}^2 {z_{1,0}}^2 z_{0,1} a_3 - {a_1}^2 {z_{0,0}}^2 a_4 z_{1,1} + {a_1}^2 z_{0,0} z_{1,0} z_{0,1} a_4 - \\ 2\,a_1 {z_{0,0}}^2 {a_2}^2 z_{2,1} + 2\,a_1 z_{0,0} {a_2}^2 z_{0,1} z_{2,0} + 6\,a_1 z_{0,0} {a_2}^2 z_{1,0} z_{1,1} - 6\,a_1 {a_2}^2 {z_{1,0}}^2 z_{0,1} + \\ 6\,a_1 {z_{0,0}}^2 a_2 z_{1,1} a_3 - 6\,a_1 z_{0,0} a_2 z_{1,0} z_{0,1} a_3 - 6\,{z_{0,0}}^2 {a_2}^3 z_{1,1} + 6\,z_{0,0} {a_2}^3 z_{1,0} z_{0,1} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Получаем отсюда выражение для a_4

$$\begin{gathered} A_4(a_1, a_2, a_3, z^{(3)}) = \frac{1}{{a_1}^2 z_{0,0}\,\delta_1(z^{(2)})}\ \times \\ ({a_1}^3 z_{0,0} z_{1,1} z_{3,0} - {a_1}^3 z_{0,0} z_{2,0} z_{2,1} - {a_1}^3 z_{0,1} z_{1,0} z_{3,0} + {a_1}^3 z_{0,1} {z_{2,0}}^2 + {a_1}^3 {z_{1,0}}^2 z_{2,1} - \\ {a_1}^3 z_{1,0} z_{1,1} z_{2,0} + {a_1}^2 a_2 z_{0,0} z_{1,0} z_{2,1} - 2\,{a_1}^2 a_2 z_{0,0} z_{1,1} z_{2,0} + {a_1}^2 a_2 z_{0,1} z_{1,0} z_{2,0} + \\ {a_1}^2 a_3 {z_{0,0}}^2 z_{2,1} - {a_1}^2 a_3 z_{0,0} z_{0,1} z_{2,0} - 3\,{a_1}^2 a_3 z_{0,0} z_{1,0} z_{1,1} + 3\,{a_1}^2 a_3 z_{0,1} {z_{1,0}}^2 - \\ 2\,a_1 {a_2}^2 {z_{0,0}}^2 z_{2,1} + 2\,a_1 {a_2}^2 z_{0,0} z_{0,1} z_{2,0} + 6\,a_1 {a_2}^2 z_{0,0} z_{1,0} z_{1,1} - 6\,a_1 {a_2}^2 z_{0,1} {z_{1,0}}^2 + \\ 6\,a_1 a_2 a_3 {z_{0,0}}^2 z_{1,1} - 6\,a_1 a_2 a_3 z_{0,0} z_{0,1} z_{1,0} - 6\,{a_2}^3 {z_{0,0}}^2 z_{1,1} + 6\,{a_2}^3 z_{0,0} z_{0,1} z_{1,0}). \end{gathered} \tag{4}$$

Выражение в знаменателе не равно нулю.

У нас есть два соотношения для функции $b(y)$, а именно

$$b_2 = B_2(a_1, a_2, b_1, z^{(1)}) \text{ и } b_1 = B_1(a_1, a_2, a_3, z^{(2)}).$$

Запишем, что $(B_1)'_y = B_2$, и подставим в полученное соотношение полученные выше выражения для b_2 и b_1. После деления на a_1^3 получаем:

$$\begin{gathered} e_5(a_1, a_2, a_3, z^{(3)}) = z_{1,1} z_{2,1} {a_1}^2 {z_{0,0}}^2 - z_{2,0} {a_1}^2 {z_{0,0}}^2 z_{1,2} - z_{1,0} z_{0,1} z_{2,1} {a_1}^2 z_{0,0} + \\ z_{1,0} z_{2,0} {a_1}^2 z_{0,0} z_{0,2} + {z_{1,0}}^2 {a_1}^2 z_{0,0} z_{1,2} - z_{1,0} {z_{1,1}}^2 {a_1}^2 z_{0,0} + {z_{1,0}}^2 z_{1,1} z_{0,1} {a_1}^2 - \\ {z_{1,0}}^3 {a_1}^2 z_{0,2} + z_{1,0} a_2 a_1 {z_{0,0}}^2 z_{1,2} - 2\,a_2 {z_{1,1}}^2 a_1 {z_{0,0}}^2 + 3\,z_{1,0} a_2 z_{1,1} z_{0,1} a_1 z_{0,0} - \\ {z_{1,0}}^2 a_2 a_1 z_{0,0} z_{0,2} - {z_{1,0}}^2 a_2 {z_{0,1}}^2 a_1 + a_3 a_1 {z_{0,0}}^3 z_{1,2} - a_3 z_{1,1} z_{0,1} a_1 {z_{0,0}}^2 - \\ z_{1,0} a_3 a_1 {z_{0,0}}^2 z_{0,2} + z_{1,0} a_3 {z_{0,1}}^2 a_1 z_{0,0} - 2\,{a_2}^2 {z_{0,0}}^3 z_{1,2} + 2\,{a_2}^2 z_{1,1} z_{0,1} {z_{0,0}}^2 + \\ 2\,z_{1,0} {a_2}^2 {z_{0,0}}^2 z_{0,2} - 2\,z_{1,0} {a_2}^2 {z_{0,1}}^2 z_{0,0} = 0. \end{gathered}$$

Следуя нашему соглашению, мы описываем *вычисление для функции общего положения*, т.е. мы выбираем условие неравенства нашего дискриминантого выражения (знаменателя дроби) нулю. Итак, пусть

$$\delta_2(z^{(3)}) = \left({z_{0,0}}^2 z_{1,2} - z_{0,0} z_{0,1} z_{1,1} - z_{0,0} z_{0,2} z_{1,0} + {z_{0,1}}^2 z_{1,0}\right)$$

не есть тождественный ноль. Тогда условие $e_5(a_1,a_2,a_3,z^{(3)})=0$ позволяет получить выражение для a_3, а именно

$$A_3(a_1,a_2,z^{(3)}) = (-z_{1,1}z_{2,1}{a_1}^2{z_{0,0}}^2 + z_{2,0}{a_1}^2{z_{0,0}}^2z_{1,2} + z_{1,0}z_{0,1}z_{2,1}{a_1}^2z_{0,0} - z_{1,0}z_{2,0}{a_1}^2z_{0,0}z_{0,2} - {z_{1,0}}^2{a_1}^2z_{0,0}z_{1,2} + z_{1,0}{z_{1,1}}^2{a_1}^2z_{0,0} - {z_{1,0}}^2z_{1,1}z_{0,1}{a_1}^2 + {z_{1,0}}^3{a_1}^2z_{0,2} - z_{1,0}a_2a_1{z_{0,0}}^2z_{1,2} + 2\,a_2{z_{1,1}}^2a_1{z_{0,0}}^2 - 3\,z_{1,0}a_2z_{1,1}z_{0,1}a_1z_{0,0} + {z_{1,0}}^2a_2a_1z_{0,0}z_{0,2} + {z_{1,0}}^2a_2{z_{0,1}}^2a_1 + 2\,{a_2}^2{z_{0,0}}^3z_{1,2} - 2\,{a_2}^2z_{1,1}z_{0,1}{z_{0,0}}^2 - 2\,z_{1,0}{a_2}^2{z_{0,0}}^2z_{0,2} + 2\,z_{1,0}{a_2}^2{z_{0,1}}^2z_{0,0})/\left(a_1z_{0,0}\,\delta_2(z^{(3)})\right).$$

Далее, условие независимости A_4 от y имеет вид

$$e_3(a_1,a_2,a_3,z^{(4)}) = {a_1}^2{z_{0,0}}^3{z_{1,1}}^2z_{3,1} - {a_1}^2{z_{0,0}}^3z_{1,1}z_{2,0}z_{2,2} - {a_1}^2{z_{0,0}}^3z_{1,1}{z_{2,1}}^2 + \text{< всего 62 монома>} -18\,{a_2}^2{z_{0,0}}^2z_{0,1}z_{1,0}{z_{1,1}}^2 + 18\,{a_2}^2z_{0,0}{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1} - 6\,{a_2}^2{z_{0,1}}^3{z_{1,0}}^3 = 0.$$

Это выражение линейно по a_3. Выражая оттуда a_3, получаем еще одно выражение $a_3 = A_3^+(a_1,a_2,z^{(4)})$, числитель – это 52 монома, а знаменатель имеет вид:

$$\delta_3(z^{(4)}) = {z_{0,0}}^4z_{1,1}z_{2,2} - {z_{0,0}}^4z_{1,2}z_{2,1} - {z_{0,0}}^3z_{0,1}z_{1,0}z_{2,2} + {z_{0,0}}^3z_{0,1}z_{1,2}z_{2,0} + {z_{0,0}}^3z_{0,2}z_{1,0}z_{2,1} - {z_{0,0}}^3z_{0,2}z_{1,1}z_{2,0} - 3\,{z_{0,0}}^3{z_{1,1}}^3 + 9\,{z_{0,0}}^2z_{0,1}z_{1,0}{z_{1,1}}^2 - 9\,z_{0,0}{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1} + 3\,{z_{0,1}}^3{z_{1,0}}^3 \neq 0.$$

Мы предполагаем, что $\delta_3(z^{(4)})\neq 0$. Условие независимости A_3^+ от y – это дифференциально-пол соотношение вида

$$z_{0,0}\,\delta_1(z^{(2)})\;e_4(a_1,a_2,z^{(5)}) = 0,$$

где полином e_4 состоит из 380 мономов. Обращение в ноль первых двух сомножителей невозможно, т.е. условие сводится к тому, что $e_4(a_1,a_2,z^{(5)})=0$.

Приравнивая A_3 и A_3^+, получаем $\delta_1(z^{(2)})^2\,e_6(a_1,a_2,z^{(4)})=0$. Поскольку первый множитель не равен нулю, то получаем

$$e_6(a_1,a_2,z^{(4)}) = (a_1{z_{0,0}}^4z_{1,2}z_{3,1} - a_1{z_{0,0}}^4z_{2,1}z_{2,2} - a_1{z_{0,0}}^3z_{0,1}z_{1,1}z_{3,1} + \text{< всего 52 монома>} -12\,a_2z_{0,0}{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1} + 3\,a_2z_{0,0}z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^3 + 3\,a_2{z_{0,1}}^3{z_{1,0}}^3) = 0.$$

Откуда получаем выражение для a_2 вида $a_2 = A_2(z^{(4)})\,a_1$. Выражение A_2 представляет собой дробь, в знаменателе которой стоит

$$\delta_4(z^{(4)}) = 2\,{z_{0,0}}^4z_{1,1}z_{2,2} - 3\,{z_{0,0}}^4z_{1,2}z_{2,1} - 2\,{z_{0,0}}^3z_{0,1}z_{1,0}z_{2,2} + {z_{0,0}}^3z_{0,1}z_{1,1}z_{2,1} + 3\,{z_{0,0}}^3z_{0,1}z_{1,2}z_{2,0} + 3\,{z_{0,0}}^3z_{0,2}z_{1,0}z_{2,1} - 2\,{z_{0,0}}^3z_{0,2}z_{1,1}z_{2,0} + 3\,{z_{0,0}}^3z_{1,0}z_{1,1}z_{1,2} - 6\,{z_{0,0}}^3{z_{1,1}}^3 - {z_{0,0}}^2{z_{0,1}}^2z_{1,0}z_{2,1} - {z_{0,0}}^2{z_{0,1}}^2z_{1,1}z_{2,0} - {z_{0,0}}^2z_{0,1}z_{0,2}z_{1,0}z_{2,0} - 3\,{z_{0,0}}^2z_{0,1}{z_{1,0}}^2z_{1,2} + 15\,{z_{0,0}}^2z_{0,1}z_{1,0}{z_{1,1}}^2 - 3\,{z_{0,0}}^2z_{0,2}{z_{1,0}}^2z_{1,1} + z_{0,0}{z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{2,0} - 12\,z_{0,0}{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1} + 3\,z_{0,0}z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^3 + 3\,{z_{0,1}}^3{z_{1,0}}^3. \quad (5)$$

Мы предполагаем, что $\delta_3(z^{(4)})\neq 0$. Записывая условие $(A_2(z^{(4)}))'_y=0$, получаем

$$P(z^{(5)}) = -2\,z_{3,2}z_{2,2}z_{1,1}{z_{0,0}}^8z_{1,2} + 2\,z_{3,1}z_{2,3}z_{1,1}{z_{0,0}}^8z_{1,2} - 2\,z_{2,2}z_{1,3}z_{3,1}z_{1,1}{z_{0,0}}^8 \;\text{< всего 634 монома>}\; -54\,{z_{1,0}}^6z_{1,1}{z_{0,1}}^4z_{0,2} - 9\,z_{0,3}{z_{1,0}}^7{z_{0,1}}^4 + 27\,{z_{1,0}}^7{z_{0,1}}^3{z_{0,2}}^2 = 0.$$

Паспорт полученного нами полинома $P(z)$ имеет следующий вид

$$pass(P(z)) = \{5\,/\,(7,7,12)\,/\,634\,/\,[-324,240]\}.$$

Далее записываем условие $(A_3^+)'_x = A_4$, подставляем в него выражения для a_2 и a_3. Получаем, что это условие выполнено тождественно. Далее записываем

$$(A_2(z^{(4)})\,a_1)'_x = A_3(a_1, A_2(z^{(4)})\,a_1, z^{(4)}),$$

делим полученное соотношение на $a_1 z_{0,0}\,\delta_2(z^{(3)})$ и получаем

$$\begin{gathered} Q(z^{(5)}) = 2\,{z_{0,0}}^5 z_{1,1} z_{2,2} z_{4,1} - 2\,{z_{0,0}}^5 z_{1,1} z_{3,1} z_{3,2} - 3\,{z_{0,0}}^5 z_{1,2} z_{2,1} z_{4,1} + \\ <\text{всего 198 мономов}> \\ +24\,{z_{0,1}}^2 {z_{1,0}}^3 {z_{1,1}}^2 z_{2,0} + 36\,z_{0,1} z_{0,2} {z_{1,0}}^5 z_{2,1} - 36\,z_{0,1} z_{0,2} {z_{1,0}}^4 z_{1,1} z_{2,0} = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

при этом

$$pass(Q) = \{5\,/\,(7,4,8)\,/\,198\,/\,[-132,87]\}.$$

Теперь запишем условие того, что $(A_3^+)'_y = 0$, подставим в полученное соотношение $a_2 = A_2(z^{(4)})\,a_1$, поделим результат на $a_1\,z_{0,0}\,\delta_1(z^{(2)})\,\delta_2(z^{(3)})$. Получаем

$$\begin{gathered} R(z^{(4)}) = 2\,{z_{0,0}}^5 z_{1,1} z_{1,3} z_{3,1} - 2\,{z_{0,0}}^5 z_{1,1} {z_{2,2}}^2 - 3\,{z_{0,0}}^5 {z_{1,2}}^2 z_{3,1} + 6\,{z_{0,0}}^5 z_{1,2} z_{2,1} z_{2,2} + \\ <\text{всего 128 мономов}> \\ +6\,{z_{0,1}}^3 {z_{1,0}}^3 {z_{1,1}}^2 - 18\,{z_{0,1}}^2 z_{0,2} {z_{1,0}}^4 z_{1,1} - 3\,{z_{0,1}}^2 z_{0,3} {z_{1,0}}^5 + 9\,z_{0,1} {z_{0,2}}^2 {z_{1,0}}^5 = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

при этом

$$pass(R) = \{\,4\,/\,(5,5,8)\,/\,128\,/\,[-18,36]\}.$$

Это доказывает пункт (a). Утверждение пункта (b) после этого становится очевидным. Теорема доказана.

В этом вычислении мы пользовались дискриминантным условием

$$\delta_1(z)\,\delta_2(z)\,\delta_3(z)\,\delta_4(z) \neq 0.$$

Как мы отмечали, при несоблюдении дискриминантного условия вычислительный алгоритм уходит на другую ветвь.

Например, если $\delta_1(z) = 0$, то это просто означает, что $f \in Cl^1$. Если же $\delta_1(z)\,\delta_3(z)\,\delta_4(z) \neq 0$, но $\delta_2(z) = 0$, то при построении декомпозиции функции f алгоритм уходит на особую ветвь. При этом процедура исключения функций b и a порождает новые условия разрешимости, которые представляют собой дифференциальные полиномы. При прохождении этой ветки кроме условия $\delta_2(z) = 0$ возникают еще четыре условия. Вот их паспорта:
$pass(P_1(z)) = \{\,6\,/\,(13,9,16)\,/\,7686\,/\,[-15120,17568]\}$,
$pass(P_2(z)) = \{\,6\,/\,(11,5,10)\,/\,1084\,/\,[-1740,1740]\}$,
$pass(P_3(z)) = \{\,5\,/\,(10,7,11)\,/\,1200\,/\,[-288,312]\}$
$pass(P_4(z)) = \{\,5\,/\,(15,10,20)\,/\,12447\,/\,[-37296,32475]\}$.
При построении декомпозиции для более глубоких вырождений возникают еще более сложные дифференциальные полиномы.

Отметим, что вычисления производились с помощью системы Maple и они не потребовали сколько-нибудь значительного времени и ресурсов. С программой вычислений можно ознакомится здесь: <http://vkb.strogino.ru/>.

Теперь мы можем продемонстрировать различия между классами в цепочке включений $Cl^0 \subset Cl^1 \subset Cl^{1+\iota} \subset Cl^2$. приведя конкретные примеры.

Утверждение 2:
(a) $x \in Cl^0$, $\quad (x+y) \in Cl^1 \setminus Cl^0$,
(b) $(x^2+xy) \in Cl^{1+\iota} \setminus Cl^1$,
(c) любой полином степени два $p_2(x,y)$ содержится в $Cl^{1+\iota}$,
(d) $(x+y+x^2\,y) \in Cl^2 \setminus Cl^{1+\iota}$.
Доказательство: Пункт (a) – очевиден. (b) следует из того, что $d_1(x^2+xy) = 2 \neq 0$ и у этой функции есть 1-мерный стабилизатор. Используя сдвиги вида $(x \to x+a,\ y \to y+b,\ z \to z+c)$, можно общий многочлен второй степени $z = p_2(x,y)$ сделать однородным, а у любой однородной функции есть нетривиальный стабилизатор. Это доказывает (c). Если $f = x+y+x^2\,y$, тогда $z = \frac{2\,xy+1}{x^2+1}$. Подставляя эту дробь в полином $R(z)$ получаем $R(z) = -192\,\left(x^2+1\right)^{-9} \neq 0$. Принадлежность Cl^2 – очевидна. Это доказывает (d). Утверждение доказано.

Основное содержание доказанной выше теоремы 1 – это дифференциальное условие принадлежности функции классу $Cl^{1+\iota}$. Этот результат был получен применением общего алгоритма, который был описан в [5] в качестве алгоритма построения дифференциального критерия принадлежности функции $Cl(S)$, где S – произвольная схема композиции (схема расстановки скобок). Однако в описании $Cl^{1+\iota}$ имеется деталь, которая не позволяет формально считать $Cl^{1+\iota} = Cl(S)$ для некоторой схемы S. Имеется некоторая схема, которая определяет класс, очень похожий на $Cl^{1+\iota}$. Речь идет о схеме вида $S = C(R(A(x)+B(y))+D(x))$. Ясно, что $Cl^{1+\iota} \subset Cl(S)$. Чтобы сделать схему S полностью соответствующей определению $Cl^{1+\iota}$ необходимо наложить условие $A(x) = D(x)$. При обсуждении алгоритма исключения в [5] предполагалось, что все формальные функциональные переменные в определении схемы *независимы*. Т.е. в данной ситуации мы столкнулись со схемами нового типа: *схемы с соотношениями*. Отметим, что для схемы с соотношением, рассмотренной в данной работе, процедура исключения работает также хорошо, как и для старых схем с независимыми функциональными нееременными. Однако нетрудно представить себе ситуацию, которая требует особого отношения. Рассмотрим, например, схему следующего вида:

$$S = C(F(A(x)+B(y))+F(x)).$$

При переводе этой схемы на язык дифференциальной алгебры мы сталкиваемся со следующей проблемой. Если бы у нас была только величина $F(x)$, мы бы ввели дифференциальную переменную F, т.ч. $F_{01} = 0$. Если бы у нас была только $F(A(x)+B(y))$ мы бы ввели дифференциальную переменную F, т.ч. $B_1F_{10} - A_1F_{01} = 0$. Но у нас имеется и $F(x)$, и $F(A(x)+B(y))$. Таким образом, алгоритм декомпозиции для схем с соотношениями требует, вообще говоря, уточнения. Более того, вопрос о том, применим ли к таким схемам DM-принцип, сформулированный в начале статьи, открыт.

Как хорошо известно, функции $(x+y)$ и $x\,y$ эквивалентны (аддитивное и мультипликативное представления функции сложности один). Это есть следствие соотношения $x\,y = \exp(\ln(x)+\ln(y))$. Аналогично функции из $Cl^{1+\iota}$ кроме аддитивного представления $r(x+y)+x$ имеют также мультипликативное представление в виде однородной функции.

Если $Z(x,y)$ – однородная функция степени k, то Z можно представить в виде $Z = S(y/x)\,x^k$. Все функции такого вида имеют нетривиальный стабилизатор,

$$(x \to \lambda\, x, \quad y \to \lambda\, y, \quad Z \to \lambda^{-k}\, Z) \in St(Z)$$

и, тем самым, содержатся в $Cl^{1+\iota}$.

Утверждение 3: (a) Пусть $k \neq 0$ и $r(t) = -\ln(s(e^t))$, тогда функции $s(y/x)\,x$ и $r(x+y)+x$ эквивалентны.

Доказательство: Пусть $z = r(x+y)+x = -\ln(s(e^{(x+y)}))+x$, т.е. $e^{-z} = s(e^x\,e^y)\,e^{-x}$. Делаем замену

$$x \to -\ln(x), \quad y \to \ln(y), \quad z \to e^{-z}.$$

Получаем $z = s(y/x)\,x$. Утверждение доказано.

Таким образом, это два представления, аддитивное и мультипликативное, функций из $Cl^{1+\iota}$. Переход от мультипликативного к аддитивному и обратно осуществляют преобразования

$$s(t) \to r(t) = A(s)(t) = -\ln(s(e^t)), \;\; r(t) \to s(t) = M(r)(t) = e^{-r(\ln(t))}. \qquad (8)$$

Отметим, что совокупность $s(y/x)\,x^k$ однородных функций фиксированной степени – это линейное пространство. Тогда как функции вида $r(x+y)+x$ – это аффинное пространство.

Если Z – однородная функция степени $k=0$, то, как очевидно, $Z \in Cl^1$. Однако в Cl^1 имеются и другие однородные функции, чья степень не равна нулю (см. [7], а также утверждение 4 ниже). Отметим, что если степень однородности отлична от нуля, то калибровочным преобразованием можно поменять эту степень на любую ненулевую, в частности, можно сделать равной единице.

В теореме о стабилизаторе есть еще одна деталь, допускающая уточнение. Имеется дифференциальное неравенство на функцию $r(t)$, несоблюдение которого означает, что функция $f \in Cl^{1+\iota}$ принадлежит Cl^1 и, соответственно, $\dim St(f) = 3$. Пусть это условие не выполнено, т.е.

$$r'''((r')^2 - r') + (r'')^2(1-2r') = 0. \qquad (9)$$

Это уравнение можно решить в элементарных функциях.

Утверждение 4:
(a) Функция вида $z = r(x+y)+x$ принадлежит Cl^1 тогда и только тогда, когда $r(t)$ имеет следующий вид:

$$\text{либо } r_1 = \lambda\, t + \mu, \qquad \text{либо } r_2 = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\lambda\, t} + \mu\,\lambda\right)}{\lambda} + \nu, \quad \text{где } \lambda \neq 0.$$

(b) Однородные функции из Cl^1 степени 1 – это два семейства

$$z_1 = \alpha\, x^\beta\, y^{(1-\beta)} \quad \text{и} \quad z_2 = (\alpha\, x^\gamma + \beta\, y^\gamma)^{1/\gamma}.$$

Доказательство: (a) Первый случай характеризуется условием $r'(t) = const$. Пусть $r'(t)$ непостоянна. Тогда выберем $A = r'(t)$ в качестве независимой переменной, $P(A) = r''(t)$ в качестве неизвестной функции. Тогда $r'''(t) = P'(A)\,P(A)$. Отметим, что при этом $P(A)$ не есть тождественный ноль. Теперь мы можем записать уравнение (9) в виде:

$$P'(A) + P(A)\,\frac{2\,A-1}{A\,(A-1)} = 0. \text{ Откуда получаем } P(A) = \lambda\,A\,(A-1),\ \lambda \neq 0.$$

Решая полученное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r\,(t) + \lambda\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r\,(t)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r\,(t) - 1\right) = 0,$$

получаем

$$r\,(t) = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\lambda\, t} + \mu\right)}{\lambda} + \nu.$$

Пункт (a) доказан. Пункт (b) получаем преобразованием (8). Утверждение доказано.

Пусть функция $z(x,y)$ – алгебраична. В [9] было дано явное описание всех алгебраических функций из Cl^1 (трехмерный стабилизатор). Обсуждаемый в данной работе класс $Cl^{1+\iota}$ также имеет естественное определяющее свойство (одномерный стабилизатор), и уместно поставить следующий вопрос.

Вопрос: Как устроены алгебраические функции из $Cl^{1+\iota}$? Требуется дать явное описание.

Все функции, не попавшие в $Cl^{1+\iota}$, не могут иметь стабилизатора положительной размерности. Однако это не мешает этим функциям иметь дискретный нетривиальный стабилизатор. Рассмотрим, например, полином $z = (x+y+x^2\,y)$ из утверждения 2. В его стабилизаторе имеется инволюция

$$x \to -x, \quad y \to -y, \quad z \to -z.$$

Ясно, что если заменить произвольную функцию $z(x,y)$ на эквивалентную ей $Z = z(x^2,y)$, то в стабилизаторе Z появится нетривиальное преобразование $x \to -x,\ y \to$ $,\ z \to z$. В этом смысле дискретный стабилизатор есть у всех функций. Однако можно различать функции, т.ч. среди эквивалентных им имеются функции без автоморфизмов, и те, у которых *все* функции, эквивалентные им, имеют нетривиальные дискретные автоморфизмы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Ostrowski, “Über Dirichletsche Reihen und algebraishe Differentialgleichungen, (перевод на английский: https://arxiv.org/abs/2211.02088).”, *Math.Z.*, **8** (1920), 241 – 298.

[2] А. Г. Витушкин, “13-я проблема Гильберта и смежные вопросы”, *УМН*, **59 (355)**:1 (2004), 11 – 24.

[3] V. K. Beloshapka, “Decomposition of functions of finite analytical complexity”, *Журн. СФУ. Сер. Мат. и физ.*, **11**:6 (2018), 680 – 685.

[4] В. К. Белошапка, “О сложности дифференциально-алгебраического описания классов аналитической сложности”, *Матем. заметки*, **105**:3 (2019), 323 – 331.

[5] V. K. Beloshapka, “Stabilizer of a Function in the Gage Group”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **24**:2 (2017), 1 – 10.

[6] В. А. Красиков, Т. М. Садыков, “Об аналитической сложности дискриминантов”, *Труды МИАН,*, **279** (2012), 86 – 101.

[7] V. K. Beloshapka, “Analytical Complexity: Development of the Topic”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **19**:4 (2012), 13 – 22.

[8] V. K. Beloshapka, Algebraic Functions of Complexity One, a Weierstrass Theorem, and Three Arithmetic Operations // Russian Journal of Mathematical Physics (RJMP), 2016, Vol. 23, no. 3, pp. 343–347.

[9] V. K. Beloshapka, “Algebraic Functions of Complexity One, a Weierstrass Theorem, and Three Arithmetic Operations”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **23**:3 (2016), 343 – 347.

В. К. Белошапка
Механико-математический факультет Московского
университета им.М.В.Ломоносова, Воробьевы горы, 119992
Москва, Россия, Московский центр фундаментальной и
прикладной математики МГУ им.М.В.Ломоносова
E-mail: vkb@strogino.ru