Вещественные подмногообразия $\mathbf{C}^2$ с особенностями

В.К.Белошапка

08.10.2021

Аннотация

В работе рассмотрены вещественные подмногообразия пространства $\mathbf{C}^2$ с особенностями трех типов. А именно, RC-особые 2-мерные поверхности, вещественно квадратичные конуса и гиперповерхности с вырождением формы Леви. Вычисляются голоморфные автоморфизмы особых ростков. Также обсуждаются вопросы разрешения особенностей в контексте CR-геометрии.

[1]

1. Двумерная поверхность в окрестности RC-особой точки

Пусть M – 2-мерное вещественно аналитическое многообразие в окрестности начала координат в $\mathbf{C}^2$ (координаты – (z, w)). И пусть $(0,0) \in M$ – это, в соответствии с терминологией [1] и [2], **RC**-особая точка. Т.е. $T_0 M$ – это одномерное комплексное подпространство $\mathbf{C}^2$. Тогда, выбирая локальную голоморфную систему координат, мы можем считать, что $T_0 M = \{w = 0\}$ и локально представить M в виде графика

$$w = \Phi(z, \bar{z}), \quad \text{где } \Phi \text{ аналитична, причем } \Phi(z, 0) = 0,\ \Phi'_{\bar{z}}(0,0) = 0.$$

Функцию Φ запишем в виде $\Phi(z, \bar{z}) = \phi(z) + \bar{z}\,\psi(z, \bar{z})$. Тогда после биголоморфной замены $(z \to z,\ w \to w - \phi(z))$ уравнение M примет вид

[1]Механико-математический факультет Московского университета им.Ломоносова, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия, vkb@strogino.ru
Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ?-?-?

$w = \bar{z}\,\psi(z,\bar{z}) = \tilde{\Phi}(z,\bar{z})$. Таким образом, возвращаясь к старым обозначениям, мы можем считать, что $\Phi(z,0) = 0$.

Ясно, что **RC**-особые точки M – это точки графика, лежащие над непустым вещественно аналитическим множеством

$$\sigma = \{z \in \mathbf{C} : \Phi'_{\bar{z}}(z,\bar{z}) = 0\}.$$

Если его размерность равна двум, то $\Phi'_{\bar{z}}$ – это тождественный ноль. В силу нашего условия $\Phi(z,0) = 0$ и, следовательно, $\Phi(z,\bar{z}) = 0$. При этом поверхность M – это комплексная прямая $w = 0$. Для нас интерес представляют случаи когда размерность σ равна единице или нулю.

Пусть $\mathrm{aut}\ M_0$ – это алгебра Ли голоморфных инфинитезимальных автоморфизмов ростка M_0. Элементами $\mathrm{aut}\ M_0$ являются ростки вещественных голоморфных векторных полей в начале координат, т.е. полей вида

$$X = 2\,\mathrm{Re}\,\left(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + g(z,w)\frac{\partial}{\partial w}\right),$$

где f и g – голоморфны в окрестности нуля, причем для $p \in M$ выполнено условие касания $X_p \in T_pM$, которое можно записать так

$$-g(z,w) + \Phi'_z(z,\bar{z})\,f(z,w) + \Phi'_{\bar{z}}(z,\bar{z})\,\bar{f}(\bar{z},\bar{w}) = 0 \ \text{ при } \ w = \Phi(z,\bar{z}), \ \text{т.е.}$$
$$E(z,\bar{z}) = -g(z,\Phi(z,\bar{z})) + \Phi'_z(z,\bar{z})\,f(z,\Phi(z,\bar{z})) + \Phi'_{\bar{z}}(z,\bar{z})\,\bar{f}(\bar{z},\bar{\Phi}(\bar{z},z)) = 0. \quad (1)$$

К анализу автоморфизмов ростка можно применить метод модельной поверхности. Вводим веса соглашением $[z] = [\bar{z}] = 1$, тогда любой степенной ряд от $(z,\bar{z})$ можно записать как сумму его однородных компонент фиксированной степени, в частности

$$\Phi(z,\bar{z}) = \Phi_m(z,\bar{z}) + \Phi_{m+1}(z,\bar{z}) + \dots,$$

где $m \geq 2$ – степень первой ненулевой компоненты. Будем называть число m *порядком* M в начале начале координат.

Далее положим вес $[w] = [\bar{w}] = m$. Это соглашение позволяет разлагать в сумму весовых компонент голоморфные выражения от (z,w). Сумму мономов веса больше чем j будем обозначать $o(j)$. Поверхность $Q_0 = \{w = \Phi_m(z,\bar{z})\}$ – это модельная поверхность по отношению к ростку $M_0 = \{w = \Phi_m(z,\bar{z}) + o(m)\}$. Соглашение о весах можно дополнить следующим образом

$$[\frac{\partial}{\partial z}] = [\frac{\partial}{\partial \bar{z}}] = -1, \quad [\frac{\partial}{\partial \bar{w}}] = [\frac{\partial}{\partial w}] = -m.$$

Это соглашение превращает совокупность ростков голоморфных векторных полей в начале координат в градуированную алгебру Ли $\mathcal{G}$. В этой алгебре можно определить подпространства $\mathcal{G}_j$, состоящее из полей веса j и выше. Если $j \geq 0$, то $\mathcal{G}_j$ – это подалгебра в $\mathcal{G}$. Соответственно алгебры aut M_0 и aut Q_0 также становятся градуированными алгебрами Ли. Можно определить две последовательности подпространств: $g_j = \text{aut } M_0 \cap \mathcal{G}_j$ и $G_j = \text{aut } Q_0 \cap \mathcal{G}_j$. При этом aut Q_0 содержит градуирующее поле

$$X = 2\,\mathrm{Re}\,\left(z\,\frac{\partial}{\partial z} + m\,w\,\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

Это поле порождает 1-параметрическую группу преобразований вида

$$z \to t\,z, \quad w \to t^m\,w, \quad t > 0.$$

Из этого нетрудно вывести, что если $X = \sum X_j \in \text{aut } Q_0$ (X_j – компонента веса j), то $X_j \in \text{aut } Q_0$. Таким образом aut Q_0 – конечномерна тогда и только тогда, когда она конечно градуирована, т.е. $G_j = 0$ при j больших некоторого d.

Пусть имеется два ростка таких поверхностей в начале координат $M_0 = \{w = \Phi(z, \bar{z})\}$ и $N_0 = \{w = \Psi(z, \bar{z})\}$, причем мы предполагаем, что Φ и Ψ не содержат голоморфных членов, т.е. $\Phi(z, 0) = \Psi(z, 0) = 0$. Пусть $\Phi_m(z, \bar{z})$ – младший ненулевой член весового разложения Φ. И пусть эти ростки голоморфно эквивалентны, т.е. в окрестности начала координат имеется локально обратимое голоморфное отображение

$$z \to Z(z, w) = \sum Z_j, \quad w \to W(z, w) = \sum W_j, \tag{2}$$

переводящее M_0 в N_0 и оставляющее начало координат на месте.

То, что это отображение переводит M_0 в N_0 можно записать в виде следующего соотношения

$$W(z, w) = \Psi(Z(z, w), \overline{Z(z, w)}), \quad \text{при } w = \Phi(z, \bar{z}) \tag{3}$$

Пусть $Z_1 = \lambda\,z$, где $\lambda \neq 0$ в силу обратимости отображения. Тогда компонента (3) веса 1 имеет вид $W_1(z) = \Psi_1(\bar{\lambda}\bar{z})$. Откуда в силу голоморфности $W_1(z)$ сразу получаем, что $W_1 = \Psi_1 = 0$. Отделяя компоненты (3) весов $(2, 3, \ldots, (m-1))$ аналогично получаем, что $W_j = \Psi_j = 0$ для всех $j \leq m - 1$. Компонента W_m имеет вид $W_m = \tilde{W}_m(z) + \mu\,w$. Отделяя компоненту (3) веса m, получаем $\tilde{W}_m(z) + \mu\,\Phi_m(z,\bar z) = \Psi_m(\lambda z, \bar\lambda \bar z)$, т.е. $\tilde{W}_m(z) = 0$, а также

$$\mu\,\Phi_m(z,\bar z) = \Psi_m(\lambda z, \bar\lambda \bar z) \tag{4}$$

Таким образом действие псевдогруппы локально обратимых голоморфных замен в окрестности начала координат порождает линейное действие в пространстве комплексных полиномов однородной степени m вида

$$\Phi_m(z,\bar z) \to \mu^{-1}\,\Phi_m(\lambda z, \bar\lambda \bar z) \tag{5}$$

Это, в частности, означает, что голоморфная эквивалентность ростков порождает линейную эквивалентность модельных поверхностей вида $(z \to \lambda\, z,\;\; w \to \mu\, w)$.

Таким образом можно резюмировать

Утверждение 1.1:
(a) Порядок m является биголоморфным инвариантом.
(b) Если $(z \to Z(z,w)\;\; w \to W(z,w)$ голоморфное отображение ростка

$$\{w = \Phi(z,\bar z) = \Phi_m(z,\bar z) + o(m)\} \;\; \text{на росток}$$
$$\{w = \Psi(z,\bar z) = \Psi_m(z,\bar z) + o(m)\}, \;\; \text{т.ч. } \Phi(z,0) = \Psi(z,0) = 0$$

то это отображение имеет вид $Z = \lambda\, z + o(1), \quad W = \mu\, w + o(m)$; их модельные поверхности также эквивалентны, причем эквивалентность устанавливается линейным отображением вида $(z \to \lambda\, z,\;\; w \to \mu\, w)$.
(c) Действие псевдогруппы локально обратимых голоморфных замен в окрестности начала координат порождает линейное действие в пространстве комплексных полиномов однородной степени m вида

$$\Phi_m(z,\bar z) \to \mu^{-1}\,\Phi_m(\lambda z, \bar\lambda \bar z) \tag{6}$$

и все инварианты этого действия являются голоморфными инвариантами многообразия M.

Отметим, что параметры (λ, μ) связаны с отображением следующим образом: $\lambda = Z'_z(0,0), \;\; \mu = W'_w(0,0)$.

Пусть отображение $H = (Z, W)$ является автоморфизмом, т.е. $\Phi = \Psi$ и пусть τ это отображение вида $\tau(H) = (Z'_z(0,0),\;\; W'_w(0,0))$. Тогда из утверждения 1 получаем, что τ это гомоморфизм из псевдогруппы голоморфных автоморфизмов M_0 сохраняющих на месте начало координат в подгруппу вида $(z \to \lambda\, z, \;\; w \to \mu\, w)$, т.ч.

$$\Phi_m(\lambda z, \bar{\lambda}\bar{z}) = \mu\, \Phi_m(z, \bar{z}) \tag{7}$$

Ядром этого представления является подгруппа автоморфизмов M_0 вида $(z \to z + o(1), \; w \to w + o(m))$. Если это ядро тривиально – представление является точным.

Применим к соотношению (1) конструкцию Пуанкаре. Т.е. это соотношение следует разложить на компоненты по степеням $E = E_0 + E_1 + \dots$, а поле X по весам

$$X = X_{-1} + X_0 + X_1 + X_2 + \dots = \sum (f_{1+j}, g_{m+j}),$$

Тогда E_{m+j} принимает вид

$$E_{m+j} = -g_{m+j}(z,w) + \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}(z,\bar{z})\, f_{1+j}(z,w) + \frac{\partial \bar{\Phi}_m}{\partial \bar{z}})(z,\bar{z})\, \bar{f}_{1+j}(\bar{z},\bar{w}) + \dots = 0,$$

где многоточие – это члены выражения, зависящие от $\chi_J = (f_{1+J}, g_{m+J})$ при $J > j$, а $w = \Phi_m(z,\bar{z})$. Треугольность системы $E = 0$ позволяет оценивать размерность пространства ее решений через размерность решения модельной системы

$$\tilde{E} = -g(z,w) + \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}(z,\bar{z})\, f(z,w) + \frac{\partial \bar{\Phi}_m}{\partial \bar{z}}(z,\bar{z})\, \bar{f}(\bar{z},\bar{w}) = 0, \tag{8}$$

при $w = \Phi_m(z,\bar{z})$, которая, очевидно, является выражением того, что поле $X = (f,g) \in \operatorname{aut} Q_0$.

Итак, получаем

Утверждение 1.2: Для любого целого j имеет место неравенство

$$\dim\, g_j \leq \dim\, G_j.$$

В частности,
– $\dim \operatorname{aut}\, M_0 \leq \dim \operatorname{aut}\, Q_0$ (оценка полной алгебры),
– если $\dim \operatorname{aut}\, Q < \infty$, то $\dim \operatorname{aut}\, M_0 < \infty$,

– $\dim g_0 \leq \dim G_0$ (оценка стабилизатора),
– если $G_j = 0$, то $g_j = 0$.

Последнее частное утверждение можно переформулировать следующим образом. Пусть aut Q_0 – конечноградуирована и G_d – старшая ненулевая подалгебра. Пусть $X(a) = X_{-m}(a) + \dots + X_d(a) + \dots$ произвольное поле из aut M_0, которое зависит от a – некоторой совокупности параметров (X_j – компонента веса j). Если $X(a_1)$ и $X(a_2)$ – два таких поля, причем $X_j(a_1) = X_j(a_2)$ для $-m \leq j \leq d$, то $X(a_1) = X(a_2)$. Т.е. любое поле, а тем самым и любой автоморфизм, однозначно определяюся значениями его весовой d-струи.

Утверждение 1.2 – это то, что можно получить из конструкции Пуанкаре для оценки размерности алгебры Ли. Но ее же можно применить и для оценки размерности стабилизатора начала координат в псевдогруппе автоморфизмов. Пусть имеется отображение

$$z \to z + F_2 + \dots, \quad w \to w + G_{m+1} + \dots \tag{9}$$

поверхности $M^1 = \{w = \Phi_m(z,\bar{z}) + \Phi_{m+1}(z,\bar{z}) \dots\}$ в поверхность $M^2 = \{w = \Phi_m(z,\bar{z}) + \Psi_{m+1}(z,\bar{z}) \dots\}$. Запишем для этого отображения тождество (3) и применим конструкцию Пуанкаре. Получим

Утверждение 1.3: Семейство голоморфных отображений M^1 в M^2 вида (3) параметризуется подмножеством G_1.

В частности, если $G_1 = 0$, то любой автоморфизм M^1 вида (3) – это тождественное отображение и представление из обсуждения после утверждения 1.1 – точное.

Утверждение 1.4:
(a) Пусть поверхность M задана соотношением $w = \Phi(z,\bar{z},w,\bar{w})$, где Φ – вещественно-значна, тогда $\dim \mathrm{aut}\, M_0 =$ либо 0, либо ∞.
(b) Пусть модельная поверхность Q задана соотношением $w = \Phi_m(z,\bar{z})$, где Φ_m – однородный вещественно-значный полином степени m, тогда $\dim \mathrm{aut}\, Q_0 = \infty$.
Доказательство: (Доказательство основано на наблюдении из работы [6].) Вещественность Φ означает, что на поверхности имеют место соотношения $v = 0, \; w = \bar{w} = u$. Если алгебра содержит ненулевое поле

его можно умножить на на $u^k = w^k$ (k – произвольное целое и неотрицательное). Алгебра модельной поверхности aut Q_0 такое поле содержит (градуирующее поле ($f = z,\ g = m\,w$)), удовлетворяющее соотношению (1). Умножая это соотношение на u^k (k – произвольное целое и неотрицательное) и пользуясь вещественностью w, получаем, что соотношению (1) удовлетворяют и все поля вида ($f = z\,w^k,\ g = m\,w^{k+1}$). Утверждение доказано.

Компактные 2-мерные подмногообразия $\mathbf{C}^2$ изучались в работе [3]. Основной результат – доказательство того, что в окрестности эллиптической RC-особой точки уравнение многообразия может быть задано неявно соотношением вида

$$u = |z|^2 + \gamma\, 2\,\mathrm{Re}\,(z^2) + \kappa\, u^s\, 2\,\mathrm{Re}\,(z^2), \quad v = 0,$$
$$s \in \{1, 2, \dots\},\ \ 0 < \gamma < 1/2,\ \ \kappa \in \{-1, 0, 1\}.$$

Утверждение 1.4 позволяет утверждать, что размерность алгебры автоморфизмов этой поверхности равна либо нулю, либо бесконечности. Для $\kappa = 0$ правая часть уравнения однородна, поэтому одно (градуирующее) поле есть и, следовательно, размерность равна бесконечности. Если $\kappa = \pm 1$, то, по-видимому, размерность равна нулю.

Ясно, что множество $\mathbf{RC}$-особых точек голоморфно инвариантно, поэтому если $\sigma = \{0\}$, то все автоморфизмы сохраняют начало координат. В этом случае все поля из aut Q_0 обращаются в ноль в начале координат, т.е. aut $Q_0 = G_0 + G_1 + \dots$. Если же $\dim \sigma = 1$, то разложение aut Q_0 может содержать и отрицательные компоненты. Вот пример.

Пример 1.5: Пусть $Q = \{w = (z - \bar{z})^2\}$, при этом $[w] = 2$, особое множество $\sigma = \{\mathrm{Im} z = 0\}$. Тогда для всякого $r \in \mathbf{R}$, преобразование ($z \to z + r, \quad w \to w$) переводит Q в себя. Соответствующее поле имеет вид $X = 2\,\mathrm{Re}\,\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$. Его вес равен (-1). В силу утверждения 1.4 размерность aut Q_0 равна бесконечности.

Пусть Q – мономиальная модельная поверхность, т.е. поверхность вида
$$Q = \{w = z^{\alpha}\,\bar{z}^{\beta}\}, \tag{10}$$

где (α, β)– неотрицательные целочисленные показатели. Если $\beta = 0$, то поверхность – эквивалентна комплексной прямой и алгебра бесконечномерна. Т.о. можем предполагать, что $\beta \geq 1$.

Пусть поле
$$X = (f(z,w), g(z,w)) \in \mathrm{aut}\, Q_0.$$
Тогда соотношение (1) принимает вид
$$g(z,w) = \alpha\, z^{\alpha-1}\, \bar z^{\beta}\, f(z,w) + \beta\, z^{\alpha}\, \bar z^{\beta-1}\, \bar f(\bar z, \bar w), \quad (z,w) \in Q. \tag{11}$$
Из уравнения Q получаем, что на поверхности выполнены соотношения
$$\bar z = z^{-\frac{\alpha}{\beta}}\, w^{\frac{1}{\beta}}, \quad \bar w = z^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}}\, w^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$
Соответственно (11) можно записать в виде
$$g(z,w) = \alpha\, z^{-1}\, w\, f(z,w) + \beta\, z^{\frac{\alpha}{\beta}}\, w^{1-\frac{1}{\beta}}\, \bar f(z^{-\frac{\alpha}{\beta}}\, w^{\frac{1}{\beta}}, z^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}}\, w^{\frac{\alpha}{\beta}}) \tag{12}$$
Пусть f в окрестности начала координат представлена степенным рядом $\sum_{k,l\geq 0} c_{kl}\, z^k\, w^l$, тогда из (12) следует, что сумма ряда $\sum_{k,l\geq 0} \bar c_{kl}\, z^K\, w^L$, где
$$K(k,l) = -k\,\frac{\alpha}{\beta} + l\,\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} + 1, \quad L(k,l) = k\,\frac{1}{\beta} + l\,\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} + 1 \tag{13}$$
это функция, совпадающая на Q с функцией $\frac{1}{\beta}\,(z\, g(z,w) - \alpha\, w\, f(z,w))$ голоморфной в окрестности начала координат в $\mathbf{C}^2$.

Сформулируем вполне очевидную теорему единственности в удобной для нас форме.

Утверждение 1.6: Пусть имеется ряд Пюизо $\sum c_{kl}\, z^{\frac{k}{m}}\, w^{\frac{l}{m}}$, сходящийся в произведении проколотых дисков $\{0 < |z| < \varepsilon, \;\; 0 < |w| < \varepsilon\}$. Пусть M вещественно аналитическая 2-мерная поверхность , т.ч. $(0,0) \in M$, вполне вещественная вне сингулярного подмножества σ размерности не выше единицы. Если этот ряд равен нулю на M, то он равен нулю тожественно.

Лемма 1.7: Аффинное отображение плоскости (k,l) заданное соотношениями (13) невырождено. Т.е. если
$$((K(k_1,l_1), L(k_1,l_1)) = ((K(k_2,l_2), L(k_2,l_2)), \text{ то } (k_1,l_1) = (k_2,l_2).$$

Доказательство: Вычитая соотношения (13) для (k_1, l_1) из соотношений для (k_2, l_2) получаем, что пара $(k_2 - k_1, l_2 - l_1)$ удовлетворяет системе из двух однородных линейных уравнений с определителем тождественно равным единице. Лемма доказана.

Из утверждения 1.5 и леммы 1.6 сразу следует, что если $\sum_{k,l\geq 0} \bar{c}_{kl}\, z^K\, w^L$ – голоморфна в окрестности нуля, то отличны от нуля лишь те коэффициенты c_{kl}, которые соответствуют целым и неотрицательным значениям (K, L).

Систему (13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \alpha\,(k-1) + (\alpha^2 - \beta^2)\,l + \beta\,(K-1) &= 0, \\ k &= \beta\,(L-1) - \alpha\,l + 1, \end{aligned} \tag{14}$$

где все четыре неизвестные (k, l, K, L) – неотрицательные целые числа.

Случай 1. $\beta < \alpha$, т.е. $\alpha^2 - \beta^2 > 0$. Перечислим возможности, которые оставляет соотношение (14).

(Случай 1.1.) $k = 0$. Имеем $(\alpha^2 - \beta^2)\,l + \beta\,(K-1) = \alpha$ или $(\alpha+\beta)((\alpha-\beta)l - 1) + \beta\,K = 0$.
Случай (1.1.1.) $k = 0, l = 0$ Тогда $\beta(K-1) = \alpha$. Это возможно только если α делится на β, т.е. $\alpha = m\beta$. При этом $\beta\,(1-L) = 1$. Это возможно лишь при $\beta = 1$ (т.е. $m = \alpha$) и $L = 0$. Итого, при $\beta = 1$ имеем $k = l = 0,\ K = \alpha + 1, L = 0$.
Случай (1.1.2.) $k = 0, l \geq 1$ Тогда $l = 1,\ \ \alpha = \beta + 1,\ \ K = 0,\ L = 2$. Итого, при $\alpha = \beta + 1$ имеем $k = 0,\ l = 1,\ K = 0,\ L = 2$.
(Случай 1.2.) $k \geq 1,\ K = 0$. Имеем $\frac{\alpha}{\beta}\,(k-1) + (\alpha\,\frac{\alpha}{\beta} - \beta)\,l = 1$. Заметим, что $(\alpha\,\frac{\alpha}{\beta} - \beta) > 1$, поэтому если $l \neq 0$, то $k = 0$. При этом $(\alpha+\beta)\,l = -1$. Противоречие.
(Случай 1.3.) $k \geq 1,\ K \geq 1$. Сразу получаем $k = 1,\ l = 0,\ K = 1,\ L = 1$.
В результате этого анализа в рамках случая 1 мы выделили четыре ситуации: (I) – общая, (II) $\beta = 1$, (III) $\alpha = \beta + 1$, (IV) $\alpha = 2,\ \beta = 1$. Поскольку анализ строился на основании необходимого условия, выясним каким полученным f соответствуют голоморфные g.

$$(I)\;\; f(z,w) = c_{10}\, z, \quad g(z,w) = \frac{1}{z}(\alpha\, w\, c_{10}\, z + \beta\, \bar{c}_{10}\, z\, w)$$
$$(II)\;\; f(z,w) = c_{10} + c_{10}\, z,$$
$$g(z,w) = \frac{1}{z}(\alpha\, w\, (c_{00} + c_{10}\, z) + \beta\, (\bar{c}_{00}\, z^{\alpha+1} + \bar{c}_{10}\, z\, w))$$
$$(III)\;\; f(z,w) = c_{10}\, z + c_{01}\, w\, z),$$
$$g(z,w) = \frac{1}{z}(\alpha\, w\, (c_{10}\, z + c_{01}\, w) + \beta\, (\bar{c}_{10}\, z\, w + \bar{c}_{01}\, w^2)$$
$$(IV)\;\; f(z,w) = c_{00} + c_{10}\, z + c_{01}\, w$$
$$g(z,w) = \frac{1}{z}(\alpha\, w\, (c_{00} + c_{10}\, z + c_{01}\, w) + \beta\, (\bar{c}_{00}\, z^3 + \bar{c}_{10}\, z\, w + \bar{c}_{01}\, w^2))$$

В первом случае c_{10} – произвольное комплексное число и размерность равна двум. Во всех оставшихся случаях условие голоморфности g приводит к тому, что любые параметры кроме c_{10} обращаются в ноль. Таким образом во всех случаях алгебра имеет размерность 2 и состоит из полей вида

$$X = 2\,\mathrm{Re}\,\left(\Lambda\, z\, \frac{\partial}{\partial z} + (\alpha\, \Lambda + \beta\, \bar{\Lambda})\, \frac{\partial}{\partial w}\right), \quad \Lambda \in \mathbf{C},$$

соответствующая группа автоморфизмов имеет вид (15)

$$\{z \to \lambda\, z, \quad w \to \lambda^{\alpha}\, \bar{\lambda}^{\beta}\, w, \quad \lambda \in \mathbf{C}^*\}.$$

Отметим, что такая подалгебра присутствует в алгебре любой мономиальной поверхности.

Случай 2. Если $\alpha = \beta$, то моном вещественный и, в силу утверждения 2, алгебра бесконечномерна.

Случай 3. $\beta > \alpha$, т.е. $(\beta^2 - \alpha^2) > 0$. Покажем, что в этом случае размерность алгебры – бесконечна.

Лемма 1.8: Если $\beta > \alpha$, то размерность алгебры равна бесконечности.

Доказательство: Отметим что если в наборе решений (14) $k \geq 1$ и $K \geq 1$, то этого достаточно для голоморфности g. Если $\alpha = 0$, то для выполнения этого условия достаточно взять любые $(L \geq 1,\; l \geq 0)$. Если же $\alpha > 0$, то подставим второе соотношение (14) в первое. Имеем

$$k - 1 = \beta\, (L - 1) - \alpha\, l, \quad K - 1 = \beta\, l - \alpha\, (L - 1).$$

В результате условия на k и K принимают вид

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{L-1}{l} < \frac{\beta}{\alpha}$$

Поскольку $\beta > \alpha > 0$, то существует бесконечно много пар (L, l) с этим условием. Лемма доказана.

Таким образом нами доказана следующая теорема.

Теорема 1.9: Пусть Q – график монома $Q = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 : w = z^\alpha \, \bar{z}^\beta\}$, где α и β – неотрицательные целые. Пусть aut Q_0 – алгебра Ли ростков голоморфных в начале координат векторных полей касательных к Q и d – ее размерность. Тогда если $0 < \beta < \alpha$, то $d = 2$, алгебра и группа имеют вид (15), в противном случае $d = \infty$.

Пусть M_0 – росток вида

$$M_0 = \{w = z^\alpha \, \bar{z}^\beta + o(m), \quad \alpha > \beta > 0, \; m = \alpha + \beta.\}$$

Соотношение (7) дает $\mu = \lambda^\alpha \, \bar{\lambda}^\beta$ Тогда из теоремы 8 и утверждений 1 и 2 получаем утверждение

Утверждение 1.10: Пусть $0 < \beta < \alpha$, тогда отображение
$\tau : \mathrm{Aut} M_0 \to \mathbf{C}^*$

$$(F(z, w), G(z, w)) \to \lambda = F'_z(0, 0)$$

– это точное представление группы автоморфизмов в $\mathbf{C}^*$. В частности, $\dim \mathrm{Aut} M_0 \leq 2$.

Примеры 1.11: Пусть $M = \{w = z^\alpha \, \bar{z}^\beta + z^{\alpha+\gamma} \, \bar{z}^{\beta+\delta}\}$, где $\alpha > \beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$, то использование утверждения 10 и несложные вычисления показывают, что

$$\mathrm{Aut} M_0 = \{z \to \lambda \, z, \; w \to \lambda^{\alpha+\gamma} \, \bar{\lambda}^{\beta+\delta} w\},$$

где $\lambda^\gamma \, \bar{\lambda}^\delta = 1$. Т.е. $\lambda = e^{i \varphi}$, причем $(\gamma - \delta) \, \varphi \equiv 0 \bmod 2\,\pi$. Получаем
– если $\gamma = \delta$, то $\mathrm{Aut} M_0 \approx S^1$,
– если $\gamma = \delta + n$, то $\mathrm{Aut} M_0 \approx \mathbf{Z}_n$,
– если $\gamma = \delta + 1$, то $\mathrm{Aut} M_0 = Id$.

2. Квадратичный конус в окрестности острия

Пусть C - гиперповерхность заданная в окрестности начала координат в $\mathbf{C}^2$ с координатами $(z = x + i\,y,\;\; w = u + i\,v)$ соотношением $= \{\rho = 0\}$, где ρ – это вещественная квадратичная форма от четырех переменных (x, y, u, v) не равная нулю тождественно. Для нас представляют интерес такие свойства C как размерность, неприводимость, Леви-невырожденность вне острия, строение алгебры $\operatorname{aut} C$ инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов. Будем считать, что ρ определена с точностью до ненулевого постоянного вещественного множителя. Причем сам конус нас будет интересовать с точностью до невырожденного комплексно линейного преобразования.

Кольцо степенных рядов от (z, w) можно снабдить градуировкой полагая веса координат равными единице $[z] = [w] = 1$. Далее эту градуировку можно распространить на алгебру Ли ростков векторных полей в начале координат, дополнительно полагая

$$[\frac{\partial}{\partial z}] = [\frac{\partial}{\partial w}] = -1.$$

В итоге каждый ряд и каждое поле становятся суммой своих градуированных компонент. В частности,

$$\operatorname{aut} C_0 = g_{-1} + g_0 + g_1 + \dots$$

Все конуса инвариантны относительно 1-параметрической группы преобразований

$$(z \to e^t\, z, \quad w \to e^t\, w).$$

Это позволяет непосредственно установить следующее свойство алгебры инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов C.

Утверждение 2.1: Пусть поле $X = \sum_{-1}^{\infty} X_j \in \operatorname{aut} C_0$, тогда

$$\forall j\;\; X_j \in \operatorname{aut} C_0.$$

Неприводимые квадратичные формы, которые задают 3-мерные конуса были классифицированы в работе [4]. Вот эта классификация:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \mathrm{Re}(A\,z^2 + B\,w^2) + |z|^2 + |w|^2, \quad 0 \le B \le A,\ 1 < A,\\
\rho_2 &= \mathrm{Re}(A\,z^2 + B\,w^2) + |z|^2 - |w|^2, \quad 0 \le B \le A,\ (A, B) \ne (1, 1)\\
\rho_3 &= \mathrm{Re}(A\,z^2 + \bar{A}\,w^2) + \mathrm{Im}(z\,\bar{w}), \quad \mathrm{Re}\,A > 0,\ \mathrm{Im}\,A \ge 0,\\
\rho_4 &= \mathrm{Re}(z^2 + i\,A\,z\,w) + \mathrm{Im}(z\,\bar{w}), \quad A \ge 0,\\
\rho_5 &= \mathrm{Re}(A\,z^2 + w^2) + |z|^2, \quad A \ge 0,\\
\rho_6 &= \mathrm{Re}(z\,w) + |z|^2,\\
\rho_7 &= \mathrm{Re}(z^2 + w^2).
\end{aligned}$$

При этом подразумевается, что разным значениям параметров соответствуют неэквивалентные конуса.

Для полноты картины приведем список "экзотических" конусов, т.е. нулей вещественных квадратичных форм, не попавших в список [4]. Причин, по которым конус отсутствует в этом списке – две. Приводимость формы и то, что конус не является 3-мерным.

Пусть квадратичная форма ρ – приводима. Если она приводима над полем вещественных чисел, то $\rho = l_1\,l_2$, где l_1 и l_2 – две ненулевые вещественные линейные формы. Если формы не пропорциональны, тогда C распадается на две неприводимых компоненты – две 3-мерные вещественные гиперплоскости, которые пересекаются по двумерному подпространству. Причем это подпространство может быть либо вполне вещественной плоскостью (случай 8), либо комплексной прямой (случай 9). Либо эти формы пропорциональны (случай 10) и тогда $\rho_{10} = l^2$, конус C_{10} – это 3-мерная вещественная гиперплоскость.

Пусть ρ – приводима над полем комплексных чисел. В силу вещественности ρ это означает, что $\rho = |l|^2$, где $l = A_1\,z + A_2\,w + B_1\,\bar{z} + B_2\,\bar{w}$ – линейна. Если l – голоморфна или антиголоморфна, то C – комплексная прямая (случай 11). Если же – нет (случай 12), то уравнение $l = 0$ можно записать как два вещественных линейных соотношения. Эти соотношения независимы (иначе есть вещественная приводимость) и их решение – вполне вещественная 2-мерная плоскость.

Пусть, далее, ρ является неприводимой ранга $1 \le r \le 4$. Нетрудно показать, что если $l \le 2$, то форма приводима, т.е. ранг равен 3 или 4. И пусть при этом соответствующий конус в общей точке не является 3-мерным. Здесь возникает еще две экзотические возможности для знакоопределенной формы ρ. Причем, если $r = 3$, то конус – это вещественная прямая (случай 13), а если $r = 4$, то конус – это точка (случай 14).

Вот список экзотических конусов (приводимость или отсутствие 3-мерности):

Утверждение 2.2: (a) Полный список конусов вида $C = \{\rho = 0\}$, где ρ – приводимая вещественная квадратичная форма в $\mathbf{C}^2$ имеет вид: C_8 – пара вещественных гиперплоскостей, вполне вещественное пересечение, C_9 – пара вещественных гиперплоскостей, пересечение – комплексная прямая, C_{10} – одна вещественная гиперплоскость, C_{11} – комплексная прямая, C_{12} – вполне вещественная плоскость.
(b) Неприводимые формы задающие конуса, не являющиеся 3-мерными, это знакоопределенные формы рангов 3 и 4, которым соответствуют C_{13} – вещественная прямая и C_{14} – точка.
(c) Все перечисленные здесь конуса (с 8-го по 14-й) попарно локально (в окрестности острия) голоморфно неэквивалентны.
(d) Алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов всех этих конусов – бесконечномерны.
(e) Все конуса, для которых имеет смысл говорить о форме Леви, т.е. C_8, C_9, C_{10} – Леви-плоские (вне острия).

Рассмотрим теперь 3-мерные неприводимые конуса $C_1, \ldots, C_7$. Выделим из этого списка Леви-плоские вне острия конуса. Если $\rho = 0$ – уравнение конуса, то $d\zeta = (\rho'_w\, dt, -\rho'_z\, dt),\ dt \in \mathbf{C}$ – это параметризация комплексной касательной в точке конуса. Соответственно форма Леви имеет вид

$$\partial\,\bar\partial\,\rho(d\zeta, d\bar\zeta) = L(z, \bar z)\,|dt|^2$$

Таким образом мы видим, что скалярный коэффициент L в форме Леви – это эрмитова форма на $\mathbf{C}^2$. Условие тождественного обращения в ноль формы Леви это условие делимости $L = k\,\rho$, где k – вещественная постоянная. При этом возникает альтернатива: либо $k = 0$ и $L = 0$, либо ρ не содержит бистепеней $(2, 0)$ и $(0, 2)$. Первой возможности соответствует конус C_7, а второй – C_2 при $A = B = 0$. Итак,

Утверждение 2.3:

(a) Леви-плоские (вне острия) конуса среди $C_1, \ldots, C_7$ – это два конуса $|z|^2 - |w|^2 = 0$ (т.е. C_2 при $A = B = 0$) и $\mathrm{Re}(z^2 + w^2) = 0$ (т.е. C_7).
(b) Алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов этих конусов во всех точках – бесконечномерны.
Доказательство: В доказательстве нуждается только бесконечномерность $\mathrm{aut}\, C$ в начале координат. Перый конус допускает любые автоморфизмы вида $(z \to f(\zeta)\, z,\ w \to f(\zeta)\, w,\ f(0,0) \neq 0$. В алгебре второго имеется градуирующее поле $X = (z, w)$. Но поле вида $Y = i\,(z^2 + w^2)^m\, X$ для любого $m = 1, 2, \ldots$ также содержится в алгебре. Утверждение доказано.

Оставшиеся конуса, т.е. C_1, C_2 (при $(A, B) \neq (0, 0)$), C_3, C_4, C_5, C_6 – это конуса, Леви-невырожденные в точке общего положения. Будем называть их *невырожденными*.

Росток вещественной гиперповерхности называется *сферическим*, если он эквивалентен ростку стандартной 3-мерной сферы $\{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$.

Утверждение 2.4: Среди невырожденных конусов сферическими в каждой точке Леви-невырожденности являются только $C_2(1, 0)$, $C_5(A)$ и C_6. Остальные конуса этого списка – несферичны вне острия.
Доказательство: Для конусов $C_5(A)$ и C_6 выпишем явное отображение на $\{\mathrm{Re}\, z_2 + |z|^2 = 0\}$ (проективный образ сферы). Для $C_5(A)$ – $(z \to z,\ w \to A\, z^2 + w^2)$, а для C_6 – $(z \to z,\ w \to z\, w)$. Конус $C_2(1, 0)$ задан уравнением $\mathrm{Re}(\, z^2) + |z|^2 = |w|^2$. Его можно переписать как $2\,(\mathrm{Re}\, z)^2 = |w|^2$ или $\sqrt{2}\,(\mathrm{Re}\, z) = \pm |w|$. После замены $(z \to \sqrt{2}\, z,\ w \to w^2)$ мы получаем две сферические гиперповерхности $(\mathrm{Re}\, z) \pm |w|^2 = 0$, касающиеся по вещественной прямой.

Несферичность оставшихся конусов проверяется с помощью критерия сферичности из работы [8]. Проделаем это для семейства $C_1(A, B)$.

Рассмотрим семейство многообразий Сегре, которые определяет уравнение конуса C_1, как семейство графиков функций $\bar{w} = W(z, \bar{z}, \bar{w})$. При этом z рассматриваем как независимое комплексное переменное, а $(\bar{z}, \bar{w})$ как пару комплексных параметров. Это семейство является семейством решений некоторого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Найдем это уравнение. Для этого продифференцируем определяющее соотношение по z два раза. Получаем

$$\begin{aligned} A\,z^2+B\,W^2+A\,\bar z^2+B\,\bar w^2+2\,z\,\bar z+2\,W\,\bar w &= 0,\\ 2\,A\,z+2\,B\,W\,W'+2\,\bar z+2\,\bar w\,W' &= 0\\ 2\,A+2\,B\,\left(W'\right)^2+2\,B\,W\,W''+2\,\bar w\,W'' &= 0. \end{aligned}$$

Выражая $\bar z$ и $\bar w$ из второго и третьего соотношений и подставляя полученные выражения в первое, получаем

$$\begin{aligned} \left(A^3z^2+B^3W^2-Az^2-BW^2\right)\,W''^2+\\ \left(-2\,A^2B\,W'^3z+2\,B^3W\,W'^2-2\,A^3\,W'\,z+2\,B\,W'^3z\right)\,W''+\\ \left(2\,AB^2W-2\,B\,W\,W'^2+2\,A\,W'\,z-2\,AW\right)\,W''+\\ AB^2\,W'^6+2\,A^2B\,W'^4+B^3\,W'^4+A^3\,W'^2+\\ 2\,AB^2\,W'^2+A^2B=0 \end{aligned}$$

Критерий сферичности из [8] можно сформулировать так: зависимость второй производной W'' от первой W' полиномиальная, степени не выше чем три. Для того, чтобы полученное нами соотношение стало линейным относительно W'' необходимо тождественное обращение в ноль коэффициента при $(W'')^2$ т.е. $A^3z^2+B^3W^2-Az^2-BW^2=0$. Поскольку $A>1$, то это невозможно. В этом случае для однозначной зависимости W'' от W' необходимо тождественное обращение в ноль дискриминанта квадратного уравнения. Дискриминант представляет собой многочлен 8-й степени от (z,W,W'). Вот совокупность его 11-ти коэффициентов

$$\begin{gathered} \{\quad -4\,AB^3\,(B-1)\,(B+1)\,,\qquad -4\,B^2\,(B-1)\,(B+1)\left(2\,A^2+1\right),\\ -4\,AB\,(B-1)\,(B+1)\left(A^2+2\right),\qquad -4\,A^2\,(B-1)\,(B+1)\,,\\ -8\,B^2\,(B-1)\,(B+1)\,(A-1)\,(A+1)\,,\ -16\,AB\,(B-1)\,(B+1)\,(A-1)\,(A+1)\,,\\ -8\,A^2\,(B-1)\,(B+1)\,(A-1)\,(A+1)\,,\qquad -4\,B^2\,(A-1)\,(A+1)\,,\\ -4\,AB\left(B^2+2\right)(A-1)\,(A+1)\,,\ -4\,A^2\left(2\,B^2+1\right)(A-1)\,(A+1)\,,\\ -4\,A^3B\,(A-1)\,(A+1)\qquad \} \end{gathered}$$

Нетрудно установить, что имеющиеся ограничения на параметры A и B не позволяют обратить все коэффициенты в ноль. Это означает, что конус $C_1(A,B)$ несферичен при всех допустимых значениях параметров.

Семейства $C_2(A,B), C_3(A), C_4(A)$ рассматриваются аналогично. □

Утверждение 2.5: Если C – невырожденный несферический конус (т.е. конус из списка C_1, C_2, C_3, C_4), то разложение алгебры $\mathrm{aut}\, C$ ростков инфинитезимальных автоморфизмов в начале координат имеет вид $\mathrm{aut}\, C = g_{-1} + g_0 + g_1$.

Доказательство: Выражая переменную $\bar{w}$ из уравнения конуса $\rho(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = 0$, получаем $\bar{w} = \phi(z, w, \bar{z})$. Условие касания векторного поля $X = (F(z, w), G(z, w))$ конуса запишем как

$$E(z, w, \bar{z}) = 2\,\mathrm{Re}\,(\rho'_z\, F + \rho'_w\, G) = 0, \qquad \text{при } \bar{w} = \phi(z, w, \bar{z}).$$

Наличие градуирующего поля $X = (z, w)$ означает, что каждая весовая компонента любого касательного поля также является касательным полем. Пусть $X = (F, G)$ – поле веса $k + 2$ ($k \geq 0$), т.е. F и G - однородные полиномы степени $k + 3$, которые мы запишем так

$$F(z, w) = a\, w^{k+3} + c\, w^{k+2}\, z + z^2\, f(z, w),$$
$$G(z, w) = b\, w^{k+3} + d\, w^{k+2}\, z + e\, w^{k+1}\, z^2 + z^3\, g(z, w).$$

где $a, b, c, d, e \in \mathbf{C}$, $f(z, w)$, $g(z, w)$ – однородные полиномы степеней $k+1$ и k. Наша цель – показать, что

$$a = b = c = d = e = 0,\ f(z, w) = g(z, w) = 0.$$

Доказательство предтавляет собой конкретное вычисление, которое распадается на ряд случаев. А именно, каждая из четырех серий рассматривается отдельно, причем внутри каждой серии выделяется общий случай и несколько специальных. Приведем здесь вычисление для $C_4(A)$. Для этой серии $A \geq 0$, но мы будем дополнительно предполагать, что A не равно 0 или 1.

Из уравнения $\mathrm{Re}(z^2 + i\, A\, z\, w) + \mathrm{Im}(z\, \bar{w}_2) = 0$ получаем

$$\bar{w} = \frac{-i\,(iAzw + i\bar{z}\, w + \bar{z}^2 + z^2)}{A\bar{z} + z}$$

Тогда соотношение $E(0, w, 0) = A^{k+3}\,(1 - A^2)\, w^{k+4}\, \bar{a} = 0$ позволяет заключить, что $a = 0$. Теперь из $E'_z(z, w, 0) = -Aw^3 \left(A^2\,(Aw)^k\, \bar{b} - w^k b\right) = 0$ получаем, что $b = 0$. Аналогично следующей итерацией из $E(0, w, 0) = 0$ получаем, что $c = d = 0$, а $E(z, w, 0) = 0$ дает $f(z, w) = -i\, A\, g(z, w)$. Еще одна итерация дает $g(z, w) = 0$, что завершает наше рассуждение.

Остальные случаи как в этой серии, так и в остальных рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Таким образом, для вычисления алгебры несферических невырожденных конусов $C_1(A,B), C_2(A,B), C_3(A), C_4(A)$ достаточно непосредственно вычислить три компоненты: g_{-1}, g_0, g_1. Это вычисление вполне тривиально. Приведем его результаты.

Размерность g_{-1} равна нулю кроме следующих исключений:
$C_1(A,1),\ C_2(A,1),\ C_2(1,B),\ C_2(A,A)$, когда она равна единице.

Размерность g_0 равна единице кроме следующих исключений:
$C_1(A,A),\ C_1(A,0),\ C_2(A,A),\ C_2(A,0),\ C_3(A)$ при $\operatorname{Im} A = 0,\ C_4(0)$, когда она равна двум.

Размерность g_1 равна нулю кроме следующих исключений:
$C_1(A,1),\ C_2(A,1),\ C_2(1,B),\ C_4(1)$, когда она равна единице.

Отметим, что поля из g_{-1} – это поля, которые порождают параллельные переносы. Все исключительные случаи, в которых такие поля есть – это ситуации, когда квадратичная форма имеет вещественный ранг три. В этом случае конус это произведение невырожденного 2-мерного конуса на вещественную прямую. Особые точки такого конуса (острие) это вещественная прямая, задающая направление сдвигов. Во всех остальных случаях острие – это только начало координат и сдвиги невозможны.

Алгебры автоморфизмов для сферических конусов $C_2(1,0)$, $C_5(A)$ и C_6 будут вычислены в следующем разделе (см.примеры 3.4, 3.5 и 3.6), но здесь мы используем эти результаты.

В итоге мы получаем следующую теорему

Теорема 2.7: Пусть ρ – ненулевая вещественная квадратичная форма в $\mathbf{C}^2 \approx \mathbf{R}^4$ и $C = \{\rho = 0\}$ – квадратичный конус в $\mathbf{C}^2$ с вершиной в начале координат (ρ и $d\,\rho$ обращаются в ноль в начале координат), $\operatorname{aut} C$ – алгебра ростков голоморфных инфинитезимальных автоморфизмов C в начале координат и d – ее размерность, тогда
$d = \infty \Leftrightarrow C$ – вырожден, если C – невырожден, то $d \leq 5$.
$d = 5 \Leftrightarrow C = C_5(0)$, либо $C = C_6$.
$d = 4 \Leftrightarrow C = C_2(1,0)$.
$d = 3 \Leftrightarrow C \in \{C_1(A,1),\ C_2(A,1)(A \neq 0),\ C_2(1,B)\,(B \neq 0$ и $1)$,
$C_2(A,A)\ (A \neq 1), C_4(1)\}$.

$d=2 \Leftrightarrow C \in \{C_1(A,A),\, C_1(A,1)\; C_1(A,0),\, C_2(A,1)\,(A\neq 1),$
$C_3(A)\,(\mathrm{Im}A=0),\; C_4(0),\; C_5(1)\}.$
$d=1$ – все прочие невырожденные конуса.

Группы соответствующие несферическим невырожденным конусам состоят из аффинных преобразований, соответствующие сферическим - алгебраичны и ниже будут выписаны явно (см. раздел 3). Отметим, что весовое разложение алгебры автоморфизмов для всех конусов имеет вид $\mathrm{aut}_0 = g_{-1}+g_0+g_1$ за исключением $C_5(0)$ и C_6, для которых оно имеет вид $\mathrm{aut}_0 = g_0+g_1+g_2$.

3. Разрешение особенностей и поля с особыми коэффициентами

Пример 3.1 В работе [9] была рассмотрена гиперповерхность в $\mathbf{C}^2$ вида $\Gamma = \{\mathrm{Im}\,W = |Z|^4\}$ вычислена алгебра $\mathrm{aut}\,\Gamma_0$ ростка этой гиперповерхности в начале координат. Результат этого вычисления можно получить иначе. А именно, можно воспользоватся тем, что Γ есть образ сферической гиперповерхности $Q=\{\mathrm{Im}\,w=|z|^2\}$ при отображении $\phi=(Z=\sqrt{z},\; W=w)$. Пересечение особого множества этого отображения с Q – это вещественная прямая $(u,0)$, которая переходит в прямую $(U,0)$ на Γ. Вне этих особых прямых отображение устанавливает биголоморфную эквивалентность ростков сферических гиперповерхностей. А дифференциал этого отображения устанавливает изоморфизм их алгебр. Алгебра Q хорошо известна. В естественной градуировке она состоит из пяти компонент $g_{-2}+g_{-1}+g_0+g_1+g_2$, которые имеют следующий вид

$$X_{-2}=(0,q),\;\; q\in\mathbf{R},\quad X_{-1}=(p,\;2\,i\,\bar p\,z),\; p\in\mathbf{C},\quad X_0=(\lambda\,z,\;2\,\mathrm{Re}\lambda\,w),\;\lambda\in\mathbf{C},$$
$$X_1=(a\,w+2\,i\,\bar a\,z^2,\;2\,i\,\bar a\,z\,w),\quad a\in\mathbf{C}, X_2=(r\,z\,w,\;r\,w^2),\; r\in\mathbf{R}. \tag{16}$$

На эти векторные поля действует дифференциал ϕ, который имеет следующий вид $d\,\phi(dz,dw)=(\frac{dz}{2\sqrt{z}},dw)$. Пусть $Y_j=d\,\phi(X_j)$, тогда получаем в координатах (Z,W).

$$Y_{-2}=(0,q),\quad Y_{-1}=(\frac{p}{2\,Z},\;2\,i\,\bar p\,Z^2),\quad Y_0\;=\;(\frac{\lambda}{2}\,Z,\;2\,(\mathrm{Re}\,\lambda)\,W),$$
$$Y_1=(a\,\frac{W}{Z}+2\,i\,\bar a\,Z^3,\;2\,i\,\bar a\,Z^2\,W),\quad Y_2=(\frac{r}{2}\,Z\,W,\;r\,W^2).$$

Глядя на полученный ответ, нетрудно понять, что если нас интересуют поля с голоморфными в окрестности начала коодинат коэффициентами, то это 4-мерная подалгебра, образованная Y_{-2}, Y_0, Y_2. Это в точности та алгебра, которая была вычислена в [9].

Этот пример демонстрирует два явления. Во-первых, образом всюду Леви-невырожденой гиперповерхности является гиперповерхность с Леви-вырождениями. Во-вторых, алгебра, состоящая из полей с голоморфными коэффициентами, переходит в алгебру полей с мероморфными коэффициентами. Для того, чтобы различать алгебры по классу коэффициентов введем следующие обозначения. Пусть, для определенности, речь идет о полях в окрестностях начала координат в $\mathbf{C}^2$. Обозначим через $V_{\mathcal{O}}$ поля $X = (f, g)$, чьи коэффициенты f и g – это ростки функций, голоморфных в начале координат, $V_{\mathcal{M}}$ – поля, чьи коэффициенты ростки мероморфных в начале координат функций.

Кроме голоморфных и мероморфных рассмотрим еще один класс функций.

Пусть f – многозначная функция, аналитическая в области Ω (связная окрестность начала координат) минус собственное комплексно аналитическое множество σ, содержащее начало координат. Т.е. это функция, аналитически продолжающаяся по всем путям в $\Omega \setminus \sigma$. Если есть две таких функции $(f_1, \Omega_1, \sigma_1)$ и $(f_2, \Omega_2, \sigma_2)$, то мы полагаем их эквивалентными если в $(\Omega_1 \cap \Omega_2) \setminus (\sigma_1 \cup \sigma_2)$ есть точка, в которой некоторый росток f_1 совпадает с каким-либо ростком f_2. Факторизуя такие функции по данному отношению эквивалентности получаем росток *функции аналитической в начале координат.* Поля с такими коэффициентами обозначим через $V_{\mathcal{A}}$.

Теперь если M_0 – росток вещественно аналитического подмногообразия, т.ч. он не содержится ни в каком комплексно аналитическом ростке в начале координат, тогда совокупность полей из $V_{\mathcal{O}}$, $V_{\mathcal{M}}$ или $V_{\mathcal{A}}$ касательных к M_0 обозначаем соответственно через $\operatorname{aut}_{\mathcal{O}} M_0$, $\operatorname{aut}_{\mathcal{M}} M_0$, $\operatorname{aut}_{\mathcal{A}} M_0$. При этом подразумевается, что в мероморфном и аналитическом случае выполнение условия касания требуется только вне особенностей коэффициентов. Ясно, что

$$\operatorname{aut}_{\mathcal{O}} M_0 \subseteq \operatorname{aut}_{\mathcal{M}} M_0 \subseteq \operatorname{aut}_{\mathcal{A}} M_0.$$

Совершенно также мы можем перейти от рассмотрения псевдогруппы голоморфных автоморфизмов ростка M_0 к педогруппам мероморфных

и многозначных аналитических автоморфизмов, которые мы обозначим так
$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}\, M_0 \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}}\, M_0 \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}\, M_0.$$

Отметим, что если ϕ – росток в точке отображения класса $\mathcal{A}$, то обратное к нему (росток многозначной функции, полученной локальным обращением ϕ вне нулей якобиана) – также росток класса $\mathcal{A}$. В частности, это относится к росткам мероморфных отображений.

Для ростка гиперповерхности Γ_0 из примера 3.1 мы можем написать
$$\dim\, \mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\, \Gamma_0 = 4, \quad \mathrm{aut}_{\mathcal{M}}\, \Gamma_0 = 8.$$
Отметим, что операция коммутирования векторных полей наделяет $\mathrm{aut}_{\mathcal{M}}\, M_0$ и $\mathrm{aut}_{\mathcal{A}}\, M_0$ также как и $\mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\, M_0$ структурой алгебр Ли.

Теорема 3.2: Если многообразие M голоморфно однородно и $\dim\, \mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\, M_0 < \infty$, тогда все три алгебры совпадают, т.е.
$$\mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\, M_0 = \mathrm{aut}_{\mathcal{M}}\, M_0 = \mathrm{aut}_{\mathcal{A}}\, M_0.$$
Доказательство: Пусть $[X_1]_0, \ldots, [X_s]_0$ – базисный набор ростков полей, порождающих $\mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\, M_0$. И пусть $X_1, \ldots, X_s$ – набор полей, представляющих эти ростки в некоторой окрестности V начала координат. В силу голоморфной однородности ростки этих полей $[X_1]_p, \ldots, [X_s]_p$ в любой точке $p \in V$ также являются базисом $\mathrm{aut}_{\mathcal{A}}\, M_p$. Пусть Y – поле аналитическое в $\Omega \setminus \sigma$, т.е. в некоторой окрестности начала координат минус множество особенностей, т.ч. росток $[Y]_0$ в начале координат принадлежит $\mathrm{aut}_{\mathcal{A}}\, M_0$. Пусть $p \in \Omega \setminus \sigma$ и $[Y]_p$ – некоторый росток поля Y в точке $p \in (\Omega \cap V) \setminus \sigma$. Таким образом $[Y]_p$ – линейная комбинация $[X_1]_p, \ldots, [X_s]_p$. Соответственно Y в окрестности p есть линейная комбинация $X_1, \ldots, X_s$. А эта линейная комбинация голоморфна в окрестности начала координат. $\square$

Если отказаться от однородности, то теорема перестает быть верной, как показывает пример 3.1. Если же отказаться от конечномерности, то теорема также перестает быть верной. В качестве примера можно рассмотреть гиперплоскость $\{\mathrm{Im}\, w = 0\}$ или прямую $\{w = 0\}$. Однородность есть, но все алгебры различны.

Ясно также, что приведенное рассуждение никак не связано со спецификой двумерного пространства.

Пример 3.3 Сделаем в уравнении сферической гиперповерхности $Q = \{\operatorname{Im} w = |z|^2\}$ замену переменных $(z = Z\,W,\ w = W)$ (σ-процесс). Получаем $\Gamma = \{\operatorname{Im} W = |Z\,W|^2\}$. Это образ Q при отображении $\phi = (Z = z/w,\ W = w)$. Дифференциал имеет вид $d\phi(dz, dw) = (dz/w - z\,dw/w^2, dw)$. Пусть $Y_j = d\,\phi(X_j)$ – образы полей (16), образующих $\operatorname{aut}_{\mathcal{O}} Q_0$. Получаем в координатах (Z, W).

$$Y_{-2} = (-q\,\frac{Z}{W},\ q), \quad Y_{-1} = (\frac{p}{W} - 2\,i\,\bar{p}\,Z^2,\ 2\,i\,\bar{p}\,Z\,W), \quad Y_0 = (-\bar{\lambda}\,Z,\ 2\,(\operatorname{Re}\lambda)\,W),$$
$$Y_1 = (a,\ 2\,i\,\bar{a}\,Z\,W^2), \quad Y_2 = (0,\ r\,W^2).$$

Таким образом мы видим, что $\operatorname{aut}_{\mathcal{O}}\Gamma_0$, что – это 5-мерная подалгебра образованная (Y_0, Y_1, Y_2) в 8-мерной алгебре $\operatorname{aut}_{\mathcal{M}}\Gamma_0$. В отличие от гиперповерхности примера 3.1 это гиперповерхность бесконечного типа. Как было показано в [8] размерность 5 – это максимум для такой гиперповеохности.

Пример 3.4 Сделаем в уравнении сферы $Q = \{\operatorname{Im} w = |z|^2\}$ замену переменных $(z = Z,\ w = Z\,W)$. Получаем $\Gamma = \{\operatorname{Im}(Z\,W) = |Z|^2\}$. Это образ Q при отображении $\phi = (Z = z,\ W = w/z)$. Дифференциал имеет вид $d\phi(dz, dw) = (dz,\ -w\,dz/z^2 + dw/z)$. Получаем

$$Y_{-2} = \left(0,\ \frac{q}{Z}\right), \quad Y_{-1} = \left(p,\ 2\,i\,\bar{p} - p\,\frac{W}{Z}\right), \quad Y_0 = \left(\lambda\,Z,\ \bar{\lambda}\,W\right),$$
$$Y_1 = \left(a\,Z\,W + 2\,i\,\bar{a}\,Z^2,\ -a\,W^2\right), \quad Y_2 = \left(0,\ r\,Z^2\,W\right).$$

Гипперповерхность Γ – это конус, который не трудно перевести в конус C_6 из списка предыдущего раздела. Констатируем

$$\dim \operatorname{aut}_{\mathcal{O}}\Gamma_0 = 5, \quad \dim \operatorname{aut}_{\mathcal{M}}\Gamma_0 = 8$$

Голоморфными являются поля при $p = q = 0$. Весовое разложение подалгебры голоморфных полей имеет вид $\operatorname{aut}_{\mathcal{O}}\Gamma_0 = g_0 + g_1 + g_2$.

Пример 3.5 Сделаем в уравнении сферы $Q = \{\operatorname{Im} w = |z|^2\}$ замену переменных $(z = Z,\ w = i\,(A\,Z^2 + W^2)$. Получаем $\Gamma = \{\operatorname{Im}(i\,(A\,Z^2 + W^2)) = |Z|^2\}$. Это образ Q при отображении $\phi = (Z = z,\ W = \sqrt{-i\,w - A\,z^2})$. Дифференциал имеет вид

$$d\phi(dz, dw) = \left(dz,\ \frac{-2\,A\,z\,dz - i\,dw}{2\sqrt{-i\,w - A\,z^2}}\right).$$

Получаем

$$Y_{-2}=\left(0,\ -\frac{i}{2}\,\frac{q}{W}\right),\ Y_{-1}=\left(p,\ \frac{(\bar p-A\,p)\,Z}{W}\right),\ Y_0=\left(\lambda\,Z,\ \frac{A\,(\bar\lambda-\lambda)\,Z^2+2\,(\mathrm{Re}\lambda)\,W^2}{2\,W}\right),$$
$$Y_1=\left(i\,a\,(A\,Z^2+W^2)+2\,i\,\bar a\,Z^2,\ -i\,\frac{A\,(a+\bar a)\,Z^3+(a-\bar a)\,W^2}{W}\right),$$
$$Y_2=\left(i\,r\,Z\,(A\,Z^2+W^2),\ -i\,r\,\frac{A^2\,Z^4-W^4}{W}\right).$$

Гиперповерхность Γ – это конус, который фигурировал как $C_5(A)$ в списке предыдущего раздела. Независимо от A все выписанные поля попадают в алгебру $\mathrm{aut}_{\mathcal{M}}\,\Gamma_0$, которая изоморфна алгебре Q и ее размерность равна 8. Подалгебра $\mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\,\Gamma_0$ зависит от A.

$$\text{Если } A=0, \text{ то } \dim\,\mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\,\Gamma_0=5, \text{ причем } \mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\,\Gamma_0=g_0+g_1+g_2;$$
$$\text{Если } A=1, \text{ то } \dim\,\mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\,\Gamma_0=2, \text{ причем } \mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\,\Gamma_0=g_0+g_1;$$
$$\text{Если } A\notin\{0,1\} \text{ то } \dim\,\mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\,\Gamma_0=1, \text{ причем } \mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\,\Gamma_0=g_0.$$

Пример 3.6 Сделаем в уравнении сферы $Q=\{\mathrm{Im}\,w=|z|^2\}$ замену переменных $(z=Z^2,\ w=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\,W)$. Получаем $\Gamma=\{2\,(\mathrm{Re}\,W)^2=|Z|^2\}$. Это образ Q при отображении $\phi=(Z=\sqrt{z},\ W=\pm i\sqrt{2}\,w)$. Дифференциал имеет вид

$$d\phi(dz,dw)=\left(\frac{dz}{2\sqrt{z}},\ \pm\sqrt{2}\,dw\right).$$

Получаем

$$Y_{-2}=(0,\ 2\,i\,q)\,,\ Y_{-1}=\left(\frac{p}{2\,Z},\ (2\,i\,\bar p)\,Z^2\right),\ Y_0=\left(\frac{\lambda\,Z}{2},\ -\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\lambda\,W\right),$$
$$Y_1=\left(\frac{i\,a\,W}{2\sqrt{2}\,Z}+i\,\bar a\,Z^2\right),\qquad Y_2=\frac{r}{2}\left(\frac{i\,Z\,W}{\sqrt{2}}-W^2\right).$$

Гипперповерхность Γ – это конус $C_2(1,0)$ из списка предыдущего раздела. Отметим, что

$$\dim\,\mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\,\Gamma_0=4,\quad \dim\,\mathrm{aut}_{\mathcal{M}}\,\Gamma_0=8$$

Весовое разложение подалгебры голоморфных полей имеет вид $\mathrm{aut}_{\mathcal{O}}\,\Gamma_0 = g_{-1} + g_0 + g_1$, т.е. такое же как у несферических конусов.

Группа голоморфных автоморфизмов сферической гиперповерхности Q хорошо известна и представляет собой подгруппу группы проективных автоморфизмов 2-мерного проективного пространства изоморфную $SU(2,1)$. Это позволяет описать группы автоморфизмов гиперповерхностей Γ, полученных из Q теми или иными преобразованиями. Действительно, если ϕ отображает Q на Γ, то любой автоморфизм $\Gamma : C \to C$ представим в виде $H = \phi \circ h \circ (\phi)^{-1}$, где $h : Q \to Q$ – голоморфный автоморфизм Q. Будем говорить, что псевдогруппа автоморфизмов $\tilde{G}(\Gamma)$ *индуцирована* отображением ϕ из $\mathrm{Aut}\, Q$.

При этом начинать можно не только с голоморфных автоморфизмов Q, а с группы автоморфизмов произвольного класса произвольного ростка. При этом, в соответствии с формулой, класс полученных автоморфизмов определяется классом исходных автоморфизмов и классом отображений ϕ и ϕ^{-1}.

Замечание 3.7: Если исходная алгебра автоморфизмов состояла из полей с мероморфными коэффициентами, а отображение ϕ – является обратным к мероморфному, то индуцированная алгебра также состоит из полей с мероморфными коэффициентами. Это утверждение было проиллюстрировано предыдущими примерами. В то же время если исходная группа состояла из голоморфных преобразований относительно индуцированной можно утверждать лишь аналитичность. Это можно увидеть ниже.

Вернемся к нашим примерам. Группа автоморфизмов Q может быть описана следующим образом. Пусть G_- – это подгруппа, порожденная подалгеброй $g_{-2}+g_{-1}$, подгруппа G_0 – это подгруппа, G_+ – порожденная $g_1 + g_2$. Тогда

$$G_- = \left\{ z \to z + p,\ w \to w + 2\,i\,\bar{p}\,z + (q + i|p|^2) \right\}, \quad G_0 = \left\{ z \to \lambda\, z,\ w \to |\lambda|^2\, w \right\},$$
$$G_+ = \left\{ z \to \frac{z + a\,w}{1 - (2\,i\,\bar{a}\,z + (r + i|a|^2)\,w)},\ w \to \frac{w}{1 - (2\,i\,\bar{a}\,z + (r + i|a|^2)\,w)} \right\},$$
$$p, a \in \mathbf{C},\ \lambda \in \mathbf{C}^*,\ q, r \in \mathbf{R}.$$

И если у нас имеется явное выражение для ϕ и ϕ^{-1}, то мы сразу выписываем группу автоморфизмов Γ соответствующего класса. Например, для примера 3.1 мы получаем

$$
\begin{gathered}
\tilde{G}_- = \left\{ Z \to \sqrt{Z^2 + p},\ W \to W + 2\,i\,\bar{p}\,Z^2 + (q + i|p|^2) \right\}, \\
\tilde{G}_0 = \left\{ Z \to \sqrt{\lambda}\,Z,\ W \to |\lambda|^2 W \right\}, \qquad (17) \\
\tilde{G}_+ = \left\{ Z \to \sqrt{\frac{Z^2 + a\,W}{1 - (2\,i\,\bar{a}\,Z^2 + (r + i|a|^2)\,W}},\ W \to \frac{W}{1 - (2\,i\,\bar{a}\,Z^2 + (r + i|a|^2)\,W)} \right\}.
\end{gathered}
$$

Таким образом группе голоморфных автоморфизмов Q соответствует группа аналитических (многозначных) автоморфизмов Γ. Т.е. (17) – это $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}\,\Gamma$. Применяя эту конструкцию к отображению из примера 3.3 получаем группу мероморфных автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{\mathcal{M}}\,\Gamma$. В каждой из этих групп нетрудно определить подгруппу голоморфных автоморфизмов.

Пример 3.8 Применим этот подход к росткам из раздела 1. Пусть $M_0 = \{w = \bar{z}\}$ – росток вполне вещественной 2-мерной плоскости в начале координат. Рассмотрим отображение ϕ, обратное к $(z = Z^\beta,\ w = W/Z^\alpha)$, т.е. $\phi(z, w) = (z^{\frac{1}{\beta}},\ z^{\frac{\alpha}{\beta}}\,w)$. Получим $\tilde{M}_0 = \{W = Z^\alpha\,\bar{Z}^\beta\}$. Если $\beta > 0$, то касательная в начале координат – это $W = 0$, т.е. это RC-особая точка. Причем $\tilde{M}_0$ – это мономиальная поверхность, которая была нами изучена в разделе 1. Группа и алгебра автоморфизмов плоскости M_0 – бесконечномерны.

Действительно, условие того, что поле $X = (f(z, w), g(z, w))$ представляет росток, принадлежащий $\mathrm{aut}\,M_0$ имеет вид

$$g(z, w) = T(f)(z, w) = \bar{f}(w, z).$$

Т.е. $\mathrm{aut}\,M_0$ состоит из полей вида $X = (f, T(f))$. Эта алгебра посредством действия $X = (f, T(f)) \to Y = d\phi(f, T(f)) = (\tilde{f}(Z, W), \tilde{g}(Z, W))$, индуцирует на $\tilde{M}_0$ бесконечномерную подалгебру в алгебре полей с мероморфными роэффициентами. Эта алгебра состоит из полей вида

$$
\begin{gathered}
\tilde{f}(Z, W) = \frac{1}{\beta\,Z^{\beta-1}}\,f(Z^\beta, \frac{W}{Z^\alpha}), \\
\tilde{g}(Z, W) = \frac{1}{\beta}(\frac{\alpha\,W}{Z^\beta}\,f(Z^\beta, \frac{W}{Z^\alpha}) + Z^\alpha\,\bar{f}(\frac{W}{Z^\alpha}, Z^\beta)).
\end{gathered}
$$

Теорему 1.9. теперь можно интерпретировать так. Подалгебра $\mathrm{aut}\,\tilde{O}_0$ (поля с голоморфными коэффициентами) в алгебре $\mathrm{aut}\,\tilde{M}_0$ (поля с мероморфными коэффициентами) конечномерна тогда и только тогда, когда $\beta > \alpha$.

4. Вопросы для дальнейшего

Вопросы, которые были рассмотрены в данной работе слабо изучены в CR-геометрии. Даже если оставаться в рамках 2-мерного комплексного пространства. При этом ничто не мешает ставить их и в более многомерном контексте. Хотя вопросов куда больше, чем ответов, все же сформулируем некоторые вопросы, естественно связанные с полученными выше результатами.

Вопрос 4.1 Как устроены автоморфизмы модельной RC-особой 2-мерной поверхности заданной уравнением $Q = \{w = A\, z^{\alpha}\, \bar{z}^{m-\alpha} + B\, z^{\beta}\, \bar{z}^{m-\beta}\}$, где $m \geq \alpha > \beta > 0$. В частности, неизвестен вопрос об автоморфизмах даже в следующей простейшей ситуации

$$Q = \{w = \bar{z}^2 + A\, z\, \bar{z}\},\ A \neq 0.$$

Вопрос 4.2 Верно ли, что размерность автоморфизмов возмущения невырожденного квадратичного конуса членами степени три и выше не превосходит размерности автоморфизмов самого конуса?

$$\dim \mathrm{aut}\, \Gamma \leq \dim \mathrm{aut}\, C, \quad \text{где}$$
$$C = \{\rho_2(z, \bar{z}, w.\bar{w}) = 0\}, \quad \Gamma = \{\rho_2(z, \bar{z}, w.\bar{w}) + O(3) = 0\}.$$

Вопрос 4.3 Что можно сказать об автоморфизмах конусов более высоких степеней $C = \{\rho_m(z, \bar{z}, w.\bar{w}) = 0\}$, где ρ_m – неприводимая однородная вещественная форма степени $m \geq 3$?

Утверждение 2.1 продолжает оставаться в силе. Вопрос о конечномерности автоморфизмов такой поверхности прост. Бесконечномерны только конуса вида $= \{\rho_m = 2\,\mathrm{Re}\, p_m(z) = 0\}$, где p_m – голоморфная форма степени m. В противном случае C – является Леви-невырожденным в точке общего положения и, следовательно, алгебра конечномерна и конечноградуирована, т.е. поля полиномиальны. Таким образом основной вопрос – это вопрос об оценке на номер старшей ненулевой компоненты (или на степень коэффициентов).

Вопрос 4.4 Рассморенные в пункте 3 примеры позволяют сформулировать следующий вопрос. Какие особенности можно устранить голоморфными (необратимыми) заменами переменных? Этот вопрос относится к особенностям всех типов, которые здесь были рассмотрены. Т.е. к особенностям на уровне гладкой стрктуры (2-й раздел), к особенностям на уровне CR-структуры (1-й раздел) и к особенностям формы Леви (примеры 3.1 и 3.3 из 3-го раздела). Этот вопрос, по-существу, приглашение к построению теории разрешения особенностей, аналогичной известной алгебраической теории, но ориентированной на CR-геометрию.

Более общая постановка вопроса такова. Пусть имеется отображение особого многообразия на неособое. В каком классе находится это разрешающее отображение (голоморфное, мероморфное, аналитическое, ...) ?

Автор благодарен А.В.Домрину и И.Г.Коссовскому, за живое участие в обсуждении данной тематики.

Список литературы

[1] Lai H.-F. Characteristic classes of real submanifolds immersed in complex manifolds // Trans. of AMS. 1972. V. 172. P. 1-33.

[2] А. В. Домрин, Описание в терминах RC-особенностей характеристических классов вещественных подмногообразий в комплексных многообразиях, Изв. РАН. Сер. матем., 1995, том 59, выпуск 5, 19–40.

[3] J. K. Moser, S. M. Webster, “Normal forms for real surfaces in $\mathbf{C}^2$ near complex tangents and hyperbolic surface transformations”, Uspekhi Mat. Nauk, 41:2(248) (1986), 143–174.

[4] D.Chakrabarti, R.Shafikov, Holomorphic extension of CR functions from quadratic cones, Math. Ann. (2008) 341:543–573.
Erratum, Math. Ann. (2009) 345:491–492.

[5] V.K.Beloshapka, CR-Manifolds of Finite Bloom–Graham Type: the Method of Model Surface // Russian Journal of Mathematical Physics vol. 27, no.2, pp.155–174 (2020).

[6] М.А.Степанова, О CR-многообразиях бесконечного типа по Блуму-Грэму, Труды ММО, 2021, т.82, вып.2, сс.349–368.

[7] S. S. Chern, J. K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Mathematica, 1974, 133:219.

[8] I.Kossovskiy, R.Shafikov, "Илья, пришлите ссылку".

[9] V.K.Beloshapka, Automorphisms of Degenerate Hypersurfaces in C2 and a Dimension Conjecture // Russian Journal of Mathematical Physic, 1997, vol.4, no.3, p.393-396.