Записка об автоморфизмах модельных поверхностей и о строении подгрупп группы Кремоны ограниченной степени (по Бланку, Фуртеру и Шрамову)

21.06.2022

[1]

Как известно [3], если Q – невырожденная (конечный тип + голоморфная невырожденнеость) голоморфно однородная модельная поверхность в $\mathbf{C}^N$, то псевдогруппа $\mathrm{Aut}\, Q_0$ ее голоморфных в окрестности начала координат автоморфизмов состоит из бирациональных преобразований объемлющего комплексного пространства, чьи степени равномерно ограничены константой d. Пусть G – группа бирациональных преобразований $\mathbf{C}^N$, т.ч. для пары точек a и b поверхности Q росток Q_a голоморфно отображается на росток Q_b. Ясно, что $\mathrm{Aut}\, Q_0 \subset G$, причем степени преобразований из G не превосходят d.

Доказательство этого утверждения основано на приеме В.Каупа ([1], 1973). Его ранняя версия, имеющая отношения к автоморфизмам квадратичных модельных поверхностей, принадлежит А.Туманову ([2],1988). Общее утверждение – ([3],2021).

В связи с этим возник вопрос о строении подгрупп группы Кремоны ограниченной степени вне зависимости от контекста CR-геометрии. Отметим работу Д.Зайцева, А.Хаклберри ([4],1995). Там была приведена конструкция, дающая описание таких подгрупп.

[1]

А именно, пусть X – проективное подмногообразие $\mathbf{P}^M$, $M > N$, бирационально эквивалентное $\mathbf{P}^N$. Пусть отображение h устанавливает эту эквивалентность, т.е. $h : \mathbf{P}^N \dashrightarrow X$. Пусть $\mathcal{G}$ – некоторая подгруппа проективных автоморфизмов X. Тогда ей соответствует подгруппа бирациональных автоморфизмов пространства $\mathbf{P}^N$ вида $G = \{g = h^{-1} \circ \tilde{g} \circ h, \ \tilde{g} \in \mathcal{G}\}$. Ясно, что степень всех элементов G не превосходит $\deg h \cdot \deg h^{-1}$.

Однако таким образом были описаны не все подгруппы ограниченной степени, а только подгруппы с некоторым дополнительным условием. Условие следующее: предполагается, что в $\mathbf{C}^N$ имеется точка a, т.ч. все элементы группы G действуют в окрестности a голоморфно. Это условие не выполняется для многих групп, возникающих как группы автоморфизмов модельных поверхностей. Поэтому вопрос оставался открытым.

Недавно К.Шрамов объяснил автору, что ответ на этот вопрос содержится в работе [5] (J. Blanc, J.Furter, 2013). Вот эти пояснения.

В следствии 2.8 работы [5] (J. Blanc, J.Furter, 2013) утверждается, что множество B_d бирациональных автоморфизмов, задаваемых многочленами степени не выше d, замкнуто в группе Кремоны (любого ранга). Т.е. замкнуто в топологии Зарисского. В частности, замыкание по Зарисскому $\bar{G}$ любого подмножества G бирациональных автоморфизмов степени не выше d содержится в этом множестве, а значит, имеет структуру алгебраического многообразия (так как B_d само является алгебраическим многообразием). С другой стороны, если G — подгруппа, то и $\bar{G}$ — подгруппа. Таким образом, G содержится в алгебраической группе $\bar{G}$.

Рассуждение из предыдущего абзаца с той же ссылкой приведено также в [6] (C.Urech, 2017) перед следствием 3.2.5 (но не оформлено как теорема). В работе [8] (C.Urech, 2018, сс.2-3) написано, что трюк с замыканием впервые появился в статье [7] (J. Blanc, 2008).

Лемма 2.19 в [5] утверждает, что если ϕ – алгебраический гомоморфизм из алгебраической группы G в группу $Bir(P^n)$, то его образ $\phi(G)$ имеет ограниченную степень.

Таким образом, имеем:

Теорема: Пусть G – подгруппа группы Кремоны $Cr(\mathbf{C}^N)$. Следующие два условия эквивалентны.
(1) Группа G состоит из бирациональных преобразований, чьи степени равномерно ограничены, т.е. $\exists\, d$ т.ч. $\forall g \in G, \ \deg g \leq d$.
(2) Замыкание G по Зарисскому – алгебраическая подгруппа $Bir(\mathbf{P}^N)$.

Таким образом, единственной причиной того, что группа состоит из преобразований ограниченной степени, является алгебраичность ее замыкания.

Отметим также, что классификация максимальных по включению алгебраических подгрупп в группе Кремоны ранга 2 проведена [7] (J. Blanc, 2008, на франц.). Эта явная классифкация содержит 11 пунктов.

Список литературы

[1] W. Kaup, "Einige Bemerkungen uber polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten," Math. Ann. 204, 131–144 (1973).

[2] A. E. Tumanov, "Finite-Dimensionality of the Group of CR Automorphisms of a Standard CR Manifold and Proper Holomorphic Mappings of Siegel Domains," Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 52 (3), 651– 659 (1988) [Math. USSR Izv. 32 (3), 655–662 (1989)].

[3] V. K. Beloshapka, On the Group of Holomorphic Automorphisms of a Model Surface, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 28, No. 3, 2021, pp. 275–283.

[4] A.Huckleberry, D.Zaitsev, Actions of groups of birationally extendible automorphisms, Geometric Complex Analysis, Edited by Junjiro Noguchi et al. World Scientific, Singapore, 1995, pp.1– 29.

[5] Jeremy Blanc, Jean-Philippe Furter, Topologies and structures of the Cremona groups, https://arxiv.org/pdf/1210.6960.pdf, 2013

[6] Christian Urech, Subgroups of Cremona groups, https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01687404/document, 2017

[7] Jeremy Blanc, Sous-groupes algebriques du groupe de Cremona, https://arxiv.org/abs/0802.2689, 2008

[8] Christian Urech, Subgroups of elliptic elements of the Cremona group, https://arxiv.org/abs/1802.08485, 2018