Подгруппы группы Кремоны ограниченной степени в CR-геометрии

В.К.Белошапка

02.02.2024

Аннотация

В работе дается описание подгрупп равномерно ограниченной степени группы Кремоны произвольного ранга. Такие подгруппы естественно возникают в CR-геометрии как группы голоморфных автоморфизмов невырожденных однородных модельных поверхностей.

[1]

Гладкое вещественное подмногообразие M комплексного многообразия – основной объект изучения в CR-геометрии. Локальный анализ предшествует глобальному. С локальной точки зрения основной объект – росток M_p гладкого порождающего подмногообразия M в точке p. CR-тип ростка – это пара (n, k), где n – комплексная размерность комплексной касательной (величина n предполагается постоянной), k – коразмерность (вещественная). Более тонкая характеристика, которая определяется распределением комплексных касательных, – это тип по Блуму – Грэму [1]. Ростки подмногообразий рассматриваются с точностью до локально биголоморфного действия (отношение эквивалентности). С ростком инвариантно связана $\mathrm{aut}\, M_p$ – алгебра Ли векторных полей, порождающих локальные 1-параметрические подгруппы голоморфных автоморфизмов ростка M_p. Алгебра $\mathrm{aut}\, M_p$ является касательной алгеброй

[1]МГУ им.М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, vkb@strogino.ru Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ им.М.В.Ломоносова,
Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00109, https://rscf.ru/project/23-21-00109/

Ли псевдогруппы голоморфных преобразований ростка $\operatorname{Aut} M_p$. Размерность $\operatorname{aut} M_p$ может, вообще говоря, быть как конечной, так и бесконечной. С каждым ростком M_p можно связать его модельную поверхность Q, которая является вещественно-алгебраической [10]. Многие свойства ростка удобнее изучать по его модельной поверхности. В частности, размерность $\operatorname{Aut} Q$ мажорирует размерность $\operatorname{Aut} M_p$. Этим вызван интерес к модельным поверхностям и их автоморфизмам.

Пример 1: Если $k = 1$, то Q, модельная поверхность CR-типа $(n, 1)$, – это гиперквадрика, и замыкание $\operatorname{Aut} Q$ – это некоторая подгруппа в $PGL(\mathbf{C}^{n+2})$ (С. Черн, Ю. Мозер [3], 1974).

Для типа $(n, 2)$, а также многих других CR-типов были построены матрично дробно-линейные представления $\operatorname{Aut} Q$ (В. Ежов, Г. Шмальц [4], 1998, [5], 2001).

Пусть Q – модельная поверхность CR-типа (n, k), невырожденная (т.е. конечного типа по Блуму – Грэму и голоморфно невырожденная [9]) голоморфно однородная модельная поверхность в $\mathbf{C}^{n+k}$ [10]. Тогда псевдогруппа $\operatorname{Aut} Q$ ее голоморфных в окрестности начала координат автоморфизмов состоит из бирациональных преобразований объемлющего комплексного пространства, чьи степени равномерно ограничены некоторой постоянной d. Причем эта псевдогруппа транзитивно действует на всей поверхности Q. Отметим, что имеющаяся оценка степени имеет вид $\ln(d) \leq 3\, N \,\ln(N) + \ln(2)\, N + 4\, \ln(N)$. Доказательство этого утверждения основано на приеме, который использовался в работе В. Каупа ([6], 1973) по автоморфизмам областей Зигеля. Первое применение этого приема в CR-геометрии принадлежит А. Туманову ([7], 1988), который доказал бирациональность и ограниченность степени для невырожденных квадратичных модельных поверхностей при $k \leq n^2$. Утверждение о бирациональности с равномерной оценкой степени выполняется в гораздо более общей ситуации, а именно, для автоморфизмов произвольной голоморфно однородной невырожденной модельной поверхности ([11], 2021). В контексте этих результатов предпринимались попытки распространить упомянутые результаты Ежова и Шмальца на более общие ситуации (А. Исаев, В. Кауп [8], 2012).

Итак, для понимания строения групп голоморфных автоморфизмов модельных поверхностей особую значимость получает вопрос о строении подгрупп группы Кремоны ограниченной степени. В работе Д. Зайцева и А. Хаклберри ([12], 1995) было приведено описание таких групп вне контекста CR-геометрии, но при весьма сильных ограничениях, которые затрудняют его использование. Недавно К. Шрамов сообщил автору данной заметки, что, по существу, ответ на вопрос о строении таких подгрупп содержится в работе [13] (J. Blanc, J. Furter, 2013). Приведем здесь этот результат.

Теорема 2: Пусть G – подгруппа группы Кремоны $Bir(\mathbf{P}^N)$. Следующие два условия эквивалентны.
(1) Группа G состоит из бирациональных преобразований, чьи степени равномерно ограничены, т.е. $\exists\, d$, т.ч. $\forall g \in G \quad \deg g \leq d$.
(2) Замыкание G – алгебраическая подгруппа группы $Bir(\mathbf{P}^N)$.
Доказательство: В следствии 2.8 работы [13] утверждается, что множество B_d бирациональных автоморфизмов, задаваемых многочленами степени не выше d, замкнуто в группе Кремоны (любого ранга). В частности, замыкание $\overline{G}$ любого подмножества G бирациональных автоморфизмов степени не выше d содержится в этом множестве, а значит, имеет структуру алгебраического многообразия (так как B_d само является алгебраическим многообразием). С другой стороны, если G — подгруппа, то и $\overline{G}$ — подгруппа. Таким образом, G содержится в алгебраической группе $\overline{G}$. Т.е. из (1) следует (2). Лемма 2.19 в [13] утверждает, что если φ – алгебраический гомоморфизм из алгебраической группы G в группу $Bir(\mathbf{P}^N)$, то его образ $\varphi(G)$ имеет ограниченную степень. Таким образом, из (2) следует (1), и теорема доказана.

Замечание 3: Отметим, что рассуждение из первой части доказательства теоремы 2 с той же ссылкой приведено также в [14] (C. Urech, 2017) перед следствием 3.2.5 (но не оформлено как теорема). В работе [15] (C. Urech, 2018, стр. 2-3) написано, что трюк с замыканием впервые появился в статье [16] (J. Blanc, 2008).

Из теоремы сразу следуют два утверждения.

Следствие 4: Пусть Q – модельная поверхность в $\mathbf{C}^N$ конечного типа по Блуму – Грэму, голоморфно невырожденная и голоморфно однородная. Тогда замыкание $\operatorname{Aut} Q$ – это алгебраическая подгруппа в $Bir(\mathbf{P}^N)$.

Следствие 5: Пусть M – связное гладкое локально голоморфно однородное подмногообразие комплексного многообразия X конечного типа по Блуму-Грэму. Пусть Q – модельная поверхность в произвольной точке $p \in M$ и пусть Q голоморфно невырождена. Тогда $G = \overline{\operatorname{Aut} Q}$ – алгебраическая группа.
Доказательство: Модельная поверхность локально однородного многообразия однородна [10]. Теперь результат следует из следствия 4.

В CR-геометрии имеется подход, идущий от Э. Картана, так называемый метод подвижного репера. В современной версии это геометрия G-структур, а также теория Н. Танаки с техникой градуированных алгебр Ли. Для его реализации необходима информация о структурной группе. Теорема 2 и ее следствия открывают широкие возможности для этого подхода. Алгебра $\mathrm{aut}\, Q$ состоит из полиномиальных векторных полей и допускает естественную структуру конечноградуированной алгебры Ли. При этом сама модельная поверхность Q допускает естественное отождествление с группой, порожденной полями отрицательного веса. В связи с этим можно утверждать, что если G, алгебраическая подгруппа $Bir(\mathbf{P}^N)$, может быть реализована как группа автоморфизмов модельной поверхности, то $\dim G \geq 2\,N$. А ее подгруппа (стабилизатор), которая оставляет неподвижной фиксированную точку, получает представление в виде композиционного ряда [10].

Поэтому можно поставить вопрос.

Вопрос 6: Какие алгебраические подгруппы $Bir(\mathbf{P}^N)$ размерности не меньше чем $2\,N$ допускают реализацию в виде группы голоморфных автоморфизмов модельной поверхности?

Список литературы

[1] Th. Bloom and I. Graham, On Type Conditions for Generic Real Submanifolds of C^n, Invent. Math. 40 (1977), 217–243 .

[2] V. K. Beloshapka, CR-Manifolds of Finite Bloom–Graham Type: the Method of Model Surface, Russian Journal of Mathematical Physics volume 27 (2020), pages155–174.

[3] S. S. Chern, J. K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifold, Acta Math., 133:3–4 (1974), 219–271.

[4] Ezhov, V.V., Schmalz, G.: A matrix Poincaré formula for holomorphic automorphisms of quadrics of higher codimension. Real associative quadrics. J. Geom. Anal. 8:1 (1998), 27–41 .

[5] Ezhov, V.V., Schmalz, G.: Holomorphic automorphisms of nondegenerate CR quadrics and Siegel domains. Explicit description. J. Geom. Anal. 11, 441–467 (2001).

[6] W. Kaup, Einige Bemerkungen uber polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten, Math. Ann. 204 (1973), 131–144.

[7] А. Е. Туманов, Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля, Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:3 (1988), 651–659; Math. USSR-Izv., 32:3 (1989), 655–662.

[8] A. Isaev, W. Kaup, Regularization of Local CR-Automorphisms of Real-Analytic CR-Manifolds, J Geom Anal 22:2 (2012), 44–260.

[9] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, and L. P. Rothschild, CR automorphisms of real analytic manifolds in complex space, Comm. Anal. Geom. 6 (1998), 291–315.

[10] V. K. Beloshapka, CR-Manifolds of Finite Bloom–Graham Type: the Method of Model Surface, Russian Journal of Mathematical Physics volume 27 (2020), pages155–174.

[11] V. K. Beloshapka, On the Group of Holomorphic Automorphisms of a Model Surface, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 28, No. 3, 2021, pp. 275–283.

[12] A.Huckleberry, D.Zaitsev, Actions of groups of birationally extendible automorphisms, Geometric Complex Analysis, Edited by Junjiro Noguchi et al. World Scientific, Singapore, 1995, pp.1– 29.

[13] Blanc, Jeremy; Furter, Jean-Philippe, Topologies and structures of the Cremona groups.Ann. of Math. (2) 178, no.3 (2013), 1173–1198.

[14] Christian Urech. Subgroups of Cremona groups. Universite de Rennes, Universite de Bale; Universitat Basel, 2017. English. ffNNT : 2017REN1S041ff. fftel-01687404f.

[15] Urech, Christian. Subgroups of elliptic elements of the Cremona group, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), vol. 2021, no. 770, (2021), 27-57.

[16] Jeremy Blanc, Sous-groupes algebriques du groupe de Cremona, Transformation Groups, Vol.14,No.2 (2009),.249– 285.