Об исключительных квадриках

Белошапка В.К.

25.02.2021

Аннотация

Доказано, что градуированные алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов невырожденной квадрики коразмерности k не имеют ненулевых компонент веса больше $2k$. Доказано также, что при $k \leq 3$ нет градуированных компонент веса больше чем 2. Сформулирован ряд вопросов.

[1]

Введение

Недавно было обнаружено [1], что доказательство одного из утверждений моей работы 1990-го года [2] содержит ошибку. Речь идет о теореме на стр.19, из которой, в частности, следует, что градуированная алгебра Ли $\mathrm{aut}\,\mathcal{Q}$ инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов невырожденной квадрики $\mathcal{Q}$ произвольной коразмерности состоит не более чем из пяти весовых компонент

$$\mathrm{aut}\,\mathcal{Q} = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2.$$

В [1] к этому утверждению был предъявлен контрпример квадрики коразмерности пять в $\mathbf{C}^9$, а среди контрпримеров работы [3] имеется квадрика коразмерности четыре в $\mathbf{C}^{10}$. Такие квадрики, т.е. невырожденные квадрики чья алгебра содержит поля веса больше чем два, мы называем *исключительными.* Все имеющиеся примеры исключительных квадрик весьма сложны. Природа этих редких примеров по сей день представляется неясной.

[1]Механико-математический факультет Московского университета им.Ломоносова, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия, vkb@strogino.ru

Работа построена следующим образом. В разделе 1 анализируем условия принадлежности поля алгебре автоморфизмов в контексте теоремы Эренпрайса-Паламодова.Это та техника работы с системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, анализ которых позволил сформулировать критерий конечномерности алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов квадрики [5]. В теореме 4 приводится критерий исключительности квадрики. В разделе 2 мы применяем полученый критерий к анализу квадрик CR-типов $(3,3)$ и $(3,4)$. Использование классификаций, построенных в работах Н.Палинчак [8] и С.Анисовой [9] позволяет показать, что среди квадрик этих типов исключительных нет. В разделе 3 обсуждается ситуация с квадриками малых коразмерностей. Основной результат – теорема 19 – утверждение, что исключительных квадрик в коразмерности три – не существует. В разделе 4 происходит возвращение в контекст раздела 1. Квадрике сопоставляется некий подмодуль свободного модуля над кольцом полиномов (характеристический подмодуль), в его терминах приводится еще один критерий исключительности квадрики, а также, в этих терминах, доказывается верхняя оценка на веса и степени полей из алгебры автоморфизмов квадрики через ее коразмерность.

1. Критерий исключительности

Пусть M_ξ – росток гладкого вещественного порождающего подмногообразия комплексного пространства $\mathbf{C}^N$ $(N = n + k)$ CR-размерности $n > 0$ и коразмерности $k > 0$. Пусть

$$z = (z_1, \ldots, z_n), \quad w = (w_1, \ldots, w_k), \quad w_j = u_j + i\, v_j, \quad j = 1, \ldots, k, \ -$$

координаты в $\mathbf{C}^N$. Назначим веса переменным:

$$[z] = [\bar{z}] = 1, \quad [w] = [\bar{w}] = [u] = 2.$$

Это позволяет разлагать степенные ряды на весовые компоненты. А если считать, что дифференцирование по z и $\bar{z}$ имеет вес (-1), а дифференцирование по w и $\bar{w}$ – вес (-2), то градуированной становится и алгебра Ли формальных векторных полей, и все ее подалгебры. После простого квадратичного преобразования уравнение M_ξ можно записать в виде

$$M_\xi = \{v_j =< z, \bar{z} >_j +o(2), \quad j = 1, \ldots, k\} = \{v =< z, \bar{z} > +o(2)\},$$

где $< z, \bar{z} >_j$ – эрмитовы формы на $\mathbf{C}^n$, а $o(m)$ – это функции, тейлоровское разложение которых в нуле не содержит членов веса m и ниже. Основной объект нашего внимания – это касательная квадрика

$$\mathcal{Q} = \{v =< z, \bar{z} >\}.$$

Пусть $\mathrm{aut}\, M_\xi$ – это алгебра Ли ростков векторных полей в $\mathbf{C}^N$, касательных к M_ξ, вида

$$X = 2\,\mathrm{Re}\,\left(f(z,w)\,\frac{\partial}{\partial z} + g(z,w)\,\frac{\partial}{\partial w}\right) = (f(z,w), g(z,w)), \tag{1}$$

где f и g – ростки вектор-функций, голоморфных в ξ. Это поля, которые порождают локальные 1-параметрические группы голоморфных преобразований M_ξ. Модельная поверхность $\mathcal{Q}$ взвешенно однородна (задается взвешенно однородными уравнениями) и голоморфно однородна (группа голоморфных автоморфизмов действует на $\mathcal{Q}$ транзитивно). Поэтому вместо $\mathrm{aut}\,\mathcal{Q}_\xi$ мы можем писать $\mathrm{aut}\,\mathcal{Q}$ (нет зависимости алгебры от точки).

В соответствии с нашей градуировкой

$$\mathrm{aut}\,\mathcal{Q} = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2 + \dots\ .$$

Нетрудно проверить, что принадлежность векторного поля $X = \sum X_j$ алгебре Ли $\mathrm{aut}\,\mathcal{Q}$ равносильна принадлежности этой алгебре каждой его весовой компоненты X_j. В такой ситуации условие конечномерности алгебры равносильно условию ее конечной градуированности. В [5] было доказано, что критерием конечномерности $\mathrm{aut}\,\mathcal{Q}$ является следующая пара условий: (1) отсутствие ядра, т.е. если $< e, \bar{z} >= 0$ для всех z, то $e = 0$; (2) координаты формы $< z, \bar{z} >$ линейно независимы (условие невырожденности).

Записывая условие принадлежности поля (1) алгебре $\mathrm{aut}\,\mathcal{Q}$, получаем

$$2\,\mathrm{Re}\,\left(i\,g(z, u + i < z, \bar{z} >) + 2 < f(z, u + i < z, \bar{z} >), \bar{z} >\right) = 0. \tag{2}$$

Положим $\Delta(\varphi(u)) = \partial_u \varphi(u)(< z, \bar{z} >)$. Несложный анализ (см. [5]) соотношения (2) позволяет установить следующее

Утверждение 1: Пара (f, g) удовлетворяют соотношению (2) тогда и только тогда, когда

$$f = a(w) + C(w)\,z + A(w)(z,z), \quad g = b(w) + 2\,i < z, \bar{a}(w) > .$$

(зависимость от z указана явно, т.е. степени ноль, один и два, а зависимость от w – аналитическая в окрестности начала), причем a, A, C, b удовлетворяют следующим соотношениям, которые распадаются на две системы уравнений

$$\begin{aligned} < A(u)(z,z), \bar{z} >= 2\,i\, < z, \Delta \bar{a}(u) > \\ < z, \Delta^2 \bar{a}(u) >= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} b(u) = 0, \\ \Delta\, b(u) = 2 \operatorname{Re} < C(u)\, z, \bar{z} >, \\ \operatorname{Im} < \Delta^2\, C(u)\, z, \bar{z} >= 0, \\ \Delta^3\, b(u) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Можно написать, что

$$C(u)\, z = \sum C_j(u)\, z_j, \quad A(u)(z,z) = \sum A_{kj}(u)\, z_k\, z_j, \quad A_{kj} = A_{jk}.$$

Тогда каждая из систем уравнений может быть записана как система линеных уравнений с постоянными коэффицентами. Первая на набор вектор-функций $((a(u), A_{kj}(u))$, а вторая – $(b(u), C_j(u))$. Нетрудно проверить, что в случае, если эрмитова вектор-форма – невырождена, то ни одна из этих систем не имеет экспоненциальных решений с ненулевым показателем. Применяя к каждой из этих систем теорему об экспоненциальном представлении Эренпрайса-Паламодова [11], заключаем, что пространство решений каждой из них – это конечномерное подпространство пространства полиномов от u. Ясно, что конечномерность подразумевает равномерную оценку степени решений.

При этом следует отметить, что любое векторное поле X можно разложить в сумму четной – X^0 и нечетной – X^1 компонент. Где –

$$X^0 = X_{-2} + X_0 + X_2 + \dots, \quad X^1 = X_{-1} + X_1 + X_3 + \dots$$

в нашей градуировке. При этом можно заметить, что если $X \in \operatorname{aut} \mathcal{Q}$, то

$$X^0 = (C(w)\, z, b(w)), \quad X^1 = (a(w) + A(w)(z,z), 2\,i\, < z, \bar{a}(w) >). \tag{5}$$

Таким образом решения (3) – это, в точности, четная компонента $X \in \operatorname{aut} \mathcal{Q}$ – $X^0 \in \operatorname{aut}^0 \mathcal{Q}$, а решения (4) – это нечетная компонента $X \in \operatorname{aut} \mathcal{Q}$

– $X^1 \in \operatorname{aut}^1 \mathcal{Q}$. Отметим здесь, что $\operatorname{aut}^0 \mathcal{Q}$, в отличие от $\operatorname{aut}^1 \mathcal{Q}$ – это подалгебра $\operatorname{aut} \mathcal{Q}$.

Как хорошо известно, подалгебра $g_- = g_{-2} + g_{-1}$ для любой невырожденной квадрики – фундаментальна по Танаке ([6], [7]). Поэтому если для некоторого j сответствующая компонента обратилась в ноль $g_j = 0$, то $g_J = 0$ для всех $J > j$. В связи с этим дадим определение.

Определение 2: Назовем невырожденную CR-квадрику $\mathcal{Q}$ *исключительной*, если для нее $g_3 \neq 0$. Ясно, что квадрика не является исключительной тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{aut} \mathcal{Q} = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2.$$

Примеры Мейлан и Грегоровича – это примеры исключительных квадрик.

Условие отсутствия компонент веса больше, чем два в терминах (a, A, b, C) – это четыре условия

$$\deg_u a \leq 1,\ \deg_u A = 0,\ \deg_u C \leq 1,\ \deg_u b \leq 2.$$

Эти условия гарантируют, что четная компонента обрывается на втором весе, а нечетная - на первом. Но поскольку критерием исключительнсти является условие на третью компоненту, то мы можем ограничится рассмотрением только первой системы (3). Заметим также, что первое соотношение (3) при фиксированном a однозначно разрешимо относительно A (условие невырожденности). Поэтому параметр A можно исключить.

Через $z \cdot \bar{\zeta}$ будем обозначать стандартную эрмитову форму

$$(z \cdot \bar{\zeta}) = z_1 \bar{\zeta}_1 + \ldots + z_n \bar{\zeta}_n.$$

Тогда произвольная эрмитова форма может быть записана как $(Hz \cdot \bar{z})$, где H – эрмитова матрица, а z понимаем как столбец. Обозначим через $H_j z \cdot \bar{\zeta}$ – j-ю координату вектор-формы $< z, \bar{z} >$.

Пусть $B(\bar{z}) = (B_1 \cdot \bar{z}, \ldots, B_k \cdot \bar{z})$ – набор из k линейных форм. Рассмотрим уравнение

$$< x, \bar{z} >= B(\bar{z}), \quad x \in \mathbf{C}^n, \quad B(\bar{z}) = (B_1 \cdot \bar{z}, \ldots, B_k \cdot \bar{z}) \in \mathbf{C}^{kn}, \qquad (6)$$

т.е. подразумевается, что при фиксированной правой части мы ищем вектор $x \in \mathbf{C}^n$, т.ч. уравнение превращается в тождество по z. Такое уравнение уравнение можно записать в виде $H_j x = B_j, \;\; j = 1, \dots, k$. Рассмотрим далее отображение

$$\nu : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{kn}, \quad \nu(z) = (H_1 z, \dots, H_k z).$$

Обозначим его образ через $\mathcal{L}'$, через $\mathcal{L}''$ обозначим прямое дополнение образа до всего пространства. Пусть π – проектор $\mathbf{C}^{kn}$ на $\mathcal{L}''$ вдоль $\mathcal{L}'$. Поскольку формы $(H_1, \dots, H_k)$ не имеют общего ядра, то ν – это изоморофизм $\mathbf{C}^n$ и $\mathcal{L}'$, на $\mathcal{L}'$ определено обратное отображение ν^{-1}. Рассуждения этого абзаца можно подытожить следующим образом.

Лемма 3 : (a) Уравнение (6) разрешимо относительно x тогда и только тогда, когда $\pi(B) = 0$.
(b) Если $\pi(B) = 0$, то единственное решение (6) имеет вид $x = \nu^{-1}(B)$.

Применяя лемму 3 к первому соотношению (3), получаем

Лемма 4: (a) Уравнение $< A(u)(z,z), \bar{z} >= 2\,i\, < z, \Delta\bar{a}(u) >$ равносильно паре соотношений

$$\pi(< z, \Delta\bar{a}(u) >) = 0, \quad A(z,z) = 2\,i\,\nu^{-1}(< z, \Delta\bar{a}(u) >). \tag{7}$$

(b) Если $\deg_u a = d$, то $\deg_u A \leq d - 1$.

Прежде чем сформулировать полученную теорему, дадим определение. Невырожденная квадрика называеется *жесткой*, если $g_+ = 0$. В силу фундаментальности это равносильно тому, что $g_1 = 0$. А это, в свою очередь, равносильно тому, что уравнение $\pi(< z, \Delta\bar{a}(u) >) = 0$ не имеет ненулевых решений линейных по u.

Квадрику можно понимать как точку пространства наборов из k эрмитовых форм от n-мерного переменного. Такие наборы – это вещественное линейное пространство $\mathcal{H}$ размерности $k\,n^2$. Обозначим невырожденные квадрики через $\mathcal{H}'$. Ясно, что вырожденные квадрики – это алгебраическое подмножество $\mathcal{H}$ (задается полиномиальными условиями на координаты). Таким образом $\mathcal{H}'$, его дополнение, – полуалгебраическое (равенства и неравенства на полиномы). Обозначим через $\mathcal{H}_l$ множество невырожденных квадрик, для которых g_+ имеет длину не меньше l. Ясно, что не жесткие квадрики – это $\mathcal{H}_1$, а исключительные – это $\mathcal{H}_3$. Из нашего описания компонент алгебры сразу следует, что $\mathcal{H}_l$ – полуалгебраическое множество для всех l.

$$\mathcal{H}' \supseteq \mathcal{H}_1 \supseteq \mathcal{H}_2 \supseteq \mathcal{H}_3 \supseteq \dots$$

Приведем два критерия: исключительности и не жесткости.

Теорема 5: Невырожденная квадрика $\mathcal{Q}$
(a) исключительна тогда и только тогда, когда существует ненулевая квадратичная вектор-форма $a(u,u) = (a_1(u,u), \dots, a_n(u,u))$, удовлетворяющая двум соотношениям

$$\pi(< z, \Delta\bar{a}(u,u) >) = 0, \quad < z, \Delta^2\bar{a}(u,u) >= 0.$$

(b) не жесткая тогда и только тогда, когда существует ненулевая линейная вектор-форма $a(u) = (a_1(u), \dots, a_n(u))$, удовлетворяющая соотношению

$$\pi(< z, \Delta\bar{a}(u) >) = 0.$$

2. CR**-квадрики типов** $(3,3)$ **и** $(3,4)$

Сформулируем два условия, которым может удовлетворять эрмитова вектор-форма $< z, \bar{z} >$ квадрики $\mathcal{Q}$.

(I) Множество $\{z \in \mathbf{C}^n : \operatorname{rank}(H_1 z, \dots, H_k z) = n\}$ – непусто (и, следовательно, открыто и плотно) .
(II) Образ отображения из $\mathbf{C}^{2n}$ в $\mathbf{C}^k$ $(p,q) \to < p, q >$ содержит внутренние точки.

Теорема 6: Если невырожденная квадрика удовлетворяет условиям (I) и (II), то она не является исключительной.
Доказательство: Имеем $< z, \Delta^2\bar{a} >= 0$. Из условия (I) следует, что $\Delta^2 a = d^2 a(< z, \bar{z} >, < z, \bar{z} >) = 0$. Окомплексим полученное равенство (т.е. пусть z и $\zeta = \bar{z}$ – независимые переменные). Теперь из условия (II) следует, что в окрестности некоторого значения z дифференциалы $du =< z, \bar{z} >$ могут рассматриваться как независимые. Это означает, что $d^2 a = 0$ и, следовательно, $\deg_u a \leq 1$. Утверждение доказано.

Заметим, что доказательство утверждения основано только на втором соотношении критерия и не использует первого.

Зафиксируем $n > 0$. В силу условия линейной независимости координатных эрмитовых форм невырожденные квадрики коразмерности k возможны лишь в диапазоне $1 \leq k \leq n^2$. При этом в диапазоне $2 \leq k \leq n^2-2$ у квадрики общего положения $g_+ = 0$ (нет полей положительного веса). Критерием такой "жесткости" является условие $g_1 = 0$. В работе Н.Палинчак [8] классифицированы с точностью до голоморфной эквивалентности все квадрики для $n = k = 3$ с $g_1 \neq 0$. Это набор из восьми квадрик. Аналогичный список из девяти квадрик для $n = 3$ $k = 4$ был составлен С.Анисовой [9]. В силу фундаментальности из того, что $g_1 = 0$ следует обращение в ноль и последующих компонент. Поэтому исключительные квадрики данных типов, если они существуют, должны содержатся в списках Палинчак и Анисовой.

Теорема 7: (a) Исключительных квадрик типа $(3,3)$ – не существует.
(b) Исключительных квадрик типа $(n,4)$ при $n \leq 3$ – не существует.
Доказательство: Непосредственно убеждаемся, что все квадрики из обоих списков удовлетворяют условию (II). Что касается условия (I), то ему удовлетворяют все квадрики списка Анисовой и все квадрики списка Палинчак за одним исключением. Это квадрика, обозначенная там как Q_5. Определяющие ее формы имеют вид.

$$2\,\mathrm{Re} z_1\,\bar z_3, \quad 2\,\mathrm{Re} z_2\,\bar z_3, \quad 2\,\mathrm{Im} z_1\,\bar z_3$$

Пространство $B^{\perp} = \{z \in \mathbf{C}^3 :< z, \bar B >= 0\}$ задается двумя независимыми соотношениями $z_2\,\bar B_3 + z_3\,\bar B_2 = z_1\,\bar B_2 - z_2\,\bar B_1 = 0$. Поэтому решение имеет вид

$$B^{\perp} = \{z_1 = \lambda\,\bar B_1,\ z_2 = \lambda\,\bar B_2,\ z_3 = -\lambda\,\bar B_3\}$$

Итак, если $a(u) = (a_1(u), a_2(u), a_3(u))$ удовлетворяет соотношению $< \Delta^2 a, \bar z >= 0$, то $\Delta^2 a_j(u)$ делится на $\bar z_j$. Таким образом ограничение $\Delta^2 a_1$ на плоскость $\bar z_1 = 0$ равно нулю. При этом ограничения координатных эрмитовых форм равны $(z_1\,\bar z_3,\ z_2\,\bar z_3 + z_3\,\bar z_2, -i\,z_1\,\bar z_2)$. Если рассмотреть соответствующее отображение $\mathbf{C}^5$ на $\mathbf{C}^3$, то мы видим, что оно имеет ранг три. Это позволяет утверждать , что $d^2 a_1 = 0$ и степень a_1 не превосходит единицы. Аналогичные рассуждения дают ту же оценку степени для a_2 и a_3. Таким образом для всех квадрик кроме Q_5 из списка Палинчак неисключительность следует из утверждения 5, а для этой квадрики из нашего рассуждения. Это доказывает пункт (a) и отсутствие исключительных квадрик типа (3,4) . Квадрика типа (1,4) не может быть невырожденной. Невырожденная квадрика типа (2,4) только одна. Это последняя квадрика, заданная базисом пространства эрмитовых форм на $\mathbf{C}^2$. Легко проверяется, что она не является исключительной (см.также утверждение 20) . Это доказывает (b). Теорема доказана.

3. Квадрики малых коразмерностей

Минимальная коразмерность, для которой известен пример исключительной квадрики это $k = 4$. С коразмерностями k равными одному и двум дела обстоят следующим образом. То, что не существует исключительных квадрик в коразмерности один непосредственно следует из работы [4], в [1] было приведено доказательство для $k = 2$.

В данной работе мы доказываем, что в коразмерности $k = 3$ исключительных квадрик также нет . Таким образом, коразмерность четыре – это минимальная коразмерность, в которой возможно существование исключительных квадрик.

Пусть $f = \sum_0^\infty f_j, \; g = \sum_0^\infty g_j$ – разложения f и g в сумму весовых компонент. Тогда X_m, т.е. m-я весовая компонента поля (1) имеет вид

$$X_m = 2\,\mathrm{Re}\left(f_{m+1}(z,w)\,\frac{\partial}{\partial z} + g_{m+2}(z,w)\,\frac{\partial}{\partial w} \right), \qquad \text{где}$$
$$2\,\mathrm{Re}\,\left(i\,g_{m+2}(z, u + i < z, \bar z >) + 2 < f_{m+1}(z, u + i < z, \bar z >), \bar z >\right) = 0. \quad (8)$$

В предположении невырожденности $\mathcal{Q}$ рассмотрим младшие компоненты алгебры. При этом мы будем записывать возникающие здесь компоненты f и g в виде полилинейных форм, причем будем предполагать, что они симметричны внутри каждой группы переменных z или w. Имеем

Вес (-2). $\quad f_{-1} = 0, \; g_0 = q, \quad X_{-2} = (0, q)$. Из условия (8) получаем, что $q \in \mathbf{R}^k$.

Вес (-1). $\quad f_0 = p, \; g_1 = l(z)$, где $p \in \mathbf{C}^n, \; l(z)$ – линейная форма. Из условия (8) получаем, что $l(z) = 2\,i < z, \bar p >$. Таким образом $X_{-1} = (p, \; 2\,i < z, \bar p >)$.

Вес 0. $f_1 = C\,z,\ g_2 = \alpha(z,z) + \rho\, w$. Из условия (8) получаем, что $\alpha(z,z) = 0,\ \mathrm{Im}\,(\rho\, u) = 0, \quad 2\,\mathrm{Re} < C\,z, \bar z >= \rho\ < z, \bar z >$. Таким образом $X_0 = (Cz,\ \rho\, w)$ с найденными условиями.
Вес 1. $f_2 = a\, w + A(z,z),\ g_3 = \alpha(z,z,z) + \beta(z)\, w$. Из условия (8) получаем, что $\alpha(z,z,z) = 0,\ < A(z,z), \bar z >= 2\,i\ < z, \bar a < z, \bar z >>,\ \beta(z)\, u = 2\,i\ < z, \bar a\, u >$. Получаем $X_1 = (aw + A(z,z),\, 2\,i\ < z, \bar a\, w >)$.
Вес 2. $f_3 = B(w)z + b(z,z,z),\ g_4 = \alpha(z,z,z,z) + \beta(z,z)\, w + r(w,w)$. Из условия (8) получаем, что $\alpha(z,z,z,z) = 0,\ \beta(z,z)\, u = 0,\ b(z,z,z) = 0$, а также $\mathrm{Re}\ < B(u)z, \bar z >= r(< z, \bar z >, u)\ \mathrm{Im}\ < B(< z, \bar z >)z, \bar z >= 0$. Получаем $X_2 = (B(w)\, z,\, r(w,w))$ с найденными условиями.
Вес 3. $f_4 = d(w,w) + D(w)(z,z) + e(z,z,z,z),\ g_5 = \alpha(z,z,z,z,z) + \beta(z,z,z)\, w + \gamma(z)(w,w)$. Из условия (8) получаем, что $\alpha(z,z,z,z,z) = 0,\ \beta(z,z,z)(u) = 0,\ e(z,z,z,z) = 0$, а также

$$\gamma(z)(u,u) = 2\,i\ < z, \bar d(u,u) >,$$
$$< D(u)(z,z), \bar z >= 4\,i\ < z, \bar d(< z, \bar z >, u) >, \quad < D(< z, \bar z >)(z,z), \bar z >= 0.$$

Получаем $X_3 = (d(w,w) + D(w)(z,z),\, 2\,i\ < z, \bar d(w,w) >)$ с найденными условиями.

Итак, получаем

Утверждение 8: (a) Если $\mathcal{Q}$ – невырожденная квадрика, то младшие весовые компоненты $\mathrm{aut}\,\mathcal{Q}$ имеют вид

$$X_{-2} = (0, q), \quad q \in \mathbf{R}^k,$$
$$X_{-1} = (p,\ 2\,i\ < z, \bar p >), \quad p \in \mathbf{C}^n,$$
$$X_0 = (Cz,\ \rho\, w),\ C \in gl(n, \mathbf{C}), \qquad \rho \in gl(k, \mathbf{R}), \quad 2\,\mathrm{Re} < C\,z, \bar z >= \rho\ < z, \bar z >,$$
$$X_1 = (aw + A(z,z),\, 2\,i\ < z, \bar a\, w >), \qquad < A(z,z), \bar z >= 2\,i\ < z, \bar a < z, \bar z >>,$$
$$X_2 = (B(w)\, z,\, r(w,w)), \quad \mathrm{Re} < B(u)z, \bar z >= r(< z, \bar z >, u),\ \ \mathrm{Im} < B(< z, \bar z >)z, \bar z >= 0,$$

$$X_3 = (d(w,w) + D(w)(z,z),\, 2\,i\ < z, \bar d(w,w) >),$$
$$< D(u)(z,z), \bar z >= 4\,i\ < z, \bar d(< z, \bar z >, u) >,\ < D(< z, \bar z >)(z,z), \bar z >= 0 \qquad (9)$$

(b) $\mathcal{Q}$ - не является исключительной тогда и только тогда, когда единственным решением (9) является $D(u) = 0$ и $d(u,u) = 0$.

Лемма 9 : (a) Если $\mathcal{Q}$ – невырожденная квадрика, то

$$D(< z, \bar p >)(z,z) = 0.$$

(b) $\mathcal{Q}$ - не является исключительной тогда и только тогда, когда единственным решением

$$D(< z,\bar{p} >)(z,z), \bar{z} = 0, \quad < D(u)(z,z), \bar{z} >= 4\,i\, < z, \bar{d}(< z, \bar{z} >, u) > . \tag{10}$$

является $D(u) = 0$ и $d(u,u) = 0$.
Доказательство: Докажем (a). Непосредственное вычисление коммутатора дает $[X_3, X_{-1}] = (F(z,w), G(z,w))$, где

$$F = -2\,d(2i < z, \bar{p} >, w) - D(2i < z, \bar{p} >)(z,z) - 2D(w)(z,p),$$
$$G = (2\,i\, < d(w,w) + D(w)(z,z), \bar{p} > -2\,i\, < p, \bar{d}(w,w) > -4\,i\, < z, \bar{d}(2i < z, \bar{p} >, w) > .$$

Коммутатор поля веса 3 с полем веса (-1) это элемент g_2. Нам известно, что z-координата такого поля не содержит кубических форм от z, поэтому $D(< z, \bar{p} >)(z,z) = 0$. Отсюда сразу следует (b). Лемма доказана.

Пусть $D(u)(z,z) = D_1(z,z)\,u_1 + \ldots + D_k(z,z)\,u_k$, где $D_j(z,z) = (D_j^1(z,z), \ldots, D_j^n(z,z))$ - векторзначная квадратичная форма. Тогда первое соотношение (10) принимает вид

$$(H_1 z \cdot \bar{p})\, D_1(z,z) + \ldots + (H_k z \cdot \bar{p})\, D_k(z,z) = 0 \tag{11}$$

При этом ν-я координата (11) выглядит так

$$(H_1 z \cdot \bar{p})\, D_1^\nu(z,z) + \ldots + (H_k z \cdot \bar{p})\, D_k^\nu(z,z) = 0 \tag{12}$$

Убирая свертку с независимым параметром $\bar{p}$, получаем векторное соотношение вида

$$D_1^\nu(z,z)\, H_1 z + \ldots + D_k^\nu(z,z)\, H_k z = 0 \tag{13}$$

Квадратичной вектор-форме $d(u,u)$ однозначно соответствует симметрическая билинейная вектор-форма

$$d(u,U) = \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}\, u_\alpha\, U_\beta = \sum_\beta \delta_\beta(u)\, U_\beta, \quad \delta_\beta(u) = \sum_\alpha d_{\alpha\beta}\, u_\alpha, \quad d_{\alpha\beta} \in \mathbf{C}^n.$$

Если $D(u) = 0$, то условие на форму $d(u,u)$ можно записать так

$$< z, \bar{\delta}_j(< z, \bar{z} >) >= 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Поскольку все коэффициенты формы d удовлетворяют одному и тому же соотношению запишем его в свободном от указания на индекс виде.

$$< z, \bar{\delta}(< z, \bar{z} >) >= 0, \quad \delta(u) = u_1\,\alpha_1 + \ldots + u_k\,\alpha_k, \tag{14}$$

Таким образом, чтобы описать g_3 при условии $D(z,z) = 0$ нужно описать все наборы $(\delta_1(u), \ldots, \delta_k(u))$ линейных $\mathbf{C}^n$-значных форм , таких, что каждая удовлетворяет соотношению (14), а вся совокупность удовлетворет условию симметричности билинейной формы $d(u,U)$, а именно $d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha}$.

Прежде, чем перейти к рассмотрению интересующего нас случая коразмерности три, рассмотрим в нашем контексте случаи $k = 1$ и $k = 2$.

Случай k=1. Если $k = 1$, то первое соотношение (10) принимает вид $D(z,z) < z, \bar{p} >= 0$, откуда сразу получаем, что $D = 0$ После второе соотношение принимает вид $< d(< z, \bar{z} >, u), \bar{z} >=< \alpha, \bar{z} >< z, \bar{z} > u = 0$. Откуда сразу получаем $d = 0$ и $g_3 = 0$.

Случай k=2. Положим

$$Pz = H_1 z,\ Qz = H_2 z, \quad Pz = (p_1(z), ..., p_n(z)),\ Qz = (q_1(z), ..., q_n(z)).$$

Тогда (13) принимает вид

$$l(z,z)\,Pz + m(z,z)\,Qz = 0,\ l(z,z) = D_1^{\nu}(z,z),\ m(z,z) = D_2^{\nu}(z,z)$$

Пусть найдется такое μ, что $p_\mu(z) = \alpha(z)$ не пропорционально $q_\mu = \beta(z)$. Тогда получаем, что $l(z,z) = \lambda(z)\,\beta(z),\ m(z,z) = -\lambda(z)\,\alpha(z)$. Если $\lambda(z) \neq 0$, то получаем $\beta(z)\,H_1 z = \alpha(z)\,H_2\,z$, откуда следует, что $H_1 z = \alpha(z)\,A$, $H_2 z = \beta(z)\,A$.

Сформулируем лемму, которая понадобится нам здесь и в дальнейшем.

Лемма 10: (a) Если эрмитова матрица H имеет ранг 1, т.е. $Hz = l(z)A,\ l \neq 0, A \neq 0$, то $l(z) = \rho\,(z \cdot \bar{A})$, $\rho \neq 0$, а соответствующая эрмитова форма имеет вид

$$(Hz \cdot \bar{z}) = \rho\,|(z \cdot \bar{A})|^2,\ \rho \in \mathbf{R}.$$

(b) (a) Если эрмитова матрица H имеет ранг 2, т.е. $Hz = l(z)A + m(z)B$, причем l и m – линейно независимы $\mathrm{rank}(A,B) = 2$, то $l(z) = \rho\,(z \cdot \bar{A})$, $m(z) = \tau\,(z \cdot \bar{B})$, параметры ρ и τ – вещественны и не равны нулю, а соответствующая эрмитова форма имеет вид

$$(Hz \cdot \bar{z}) = \rho\,|(z \cdot \bar{A})|^2 + \tau\,|(z \cdot \bar{B})|^2.$$

Доказательство: Ранг эрмитовой формы инвариантен относительно невырожденных линейных замен. Приведем формы к диагональному виду. Число ненулевых коэффициентов в первом случае равно одному, во втором – двум. Возвращаясь к исходным координатам получаем оба утверждения леммы.

В соответствии с леммой

$$(Pz \cdot \bar{z}) = \tau_1 |(z \cdot \bar{A})|^2, \quad (Qz \cdot \bar{z}) = \tau_2 |(z \cdot \bar{A})|^2,$$

что противоречит условию невырожденности, поэтому $D = 0$.

Запишем (14), получим

$$(Pz \cdot \bar{z}) < z, \bar{\alpha}_1 > + (Qz \cdot \bar{z}) < z, \bar{\alpha}_2 >= 0 \tag{15}$$

Пара векторов (α_1, α_2) может иметь ранг ноль, один или два. Ноль – это значит, что $\delta = 0$. Пусть – один, тогда вектора пропорциональны, пусть $\alpha_2 = \lambda\,\alpha_1,\ \alpha_1 \neq 0$. Из (20) получаем

$$((Pz \cdot \bar{z}) + \bar{\lambda}\,(Qz \cdot \bar{z})) < z, \bar{\alpha}_1 >= 0$$

Откуда следует линейная зависимость P и Q, что противоречит условию невырожденности пары (P, Q).

Пусть теперь (α_1, α_2) – линейно независимы ($n \geq 2$). Выберем базис в $\mathbf{C}^n$ вида $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Пусть $p_j(z)$ – это j-я координата Pz в этом базисе, а $q_j(z)$ – это j-я координата Qz. Тогда (20) примет вид

$$p_1(z)\,Pz + p_2(z)\,Qz = 0, \quad q_1(z)\,Pz + q_2(z)\,Qz = 0 \tag{16}$$

Выпишем первую координату первого равенства и вторую – второго. Имеем

$$(p_1(z))^2 + p_2(z)\,q_1(z) = 0, \quad (q_2(z))^2 + p_2(z)\,q_1(z) = 0$$

Если $p_1 = 0$, то, как следует из первого равенства $p_2 = 0$ (иначе $q_1 = 0$ и α_1 попадает в общее ядро). Теперь из второго равенства следует, что $q_2 = 0$ и α_2 попадает в общее ядро. Противоречие. Значит p_1 и q_2 не равны нулю, но тогда из (16) и невырожденности следует, что p_2 и q_1 также не равны нулю. Тогда, применяя лемму 3 к первому равенству (16) , видим, что возможен только вариант (b.2), т.е. $Pz = p_2(z)\,A,\ \ Qz = -p_1(z)\,A$. В соответствии с леммой 6 формы $(Pz \cdot \bar{z})$ и $(Qz \cdot \bar{z})$ пропорциональны $|(z \cdot \bar{A})|^2$, что противоречит условию невырожденности.

Таким образом для $k = 2$ компонента $g_3 = 0$.

В связи с изучением (10) для малых k сформулируем еще несколько очевидных вспомогательных утверждений.

Лемма 11: Пусть $m(z)\,P\,z = l(z)\,Q\,z$, где P и Q – квадратные матрицы, а m и l – скалярные линейные формы, тогда реализуется одна из следующих возможностей:
(a) $m(z)\,P\,z = l(z)\,Q\,z = 0$ – в каждой паре хотя бы один из сомножителей равен нулю (4 варианта).
(b.1) Линейная зависимость. $P\,z = \lambda\,Q\,z \neq 0,\ \ m(z) = \lambda\,l(z) \neq 0$.
(b.2) Линейная независимость. $P\,z = l(z)\,A, \quad Q\,z = m(z)\,A, \quad A \neq 0$, формы l и m не пропорциональны.

Лемма 12: Пусть $m(z)\,A = l(z)\,B$, где A и B – вектора, а m и l – скалярные линейные формы, тогда реализуется одна из следующих возможностей:
(a) $m(z)\,A = l(z)\,B = 0$ – в каждой паре хотя бы один из сомножителей равен нулю (4 варианта).
(b) Линейная зависимость. $B = \lambda\,A \neq 0,\ \ m(z) = \lambda\,l(z) \neq 0$.

Пусть $I(l_1(z), l_2(z))$ – идеал в кольце полиномов от z, порожденный двумя линейными формами l_1 и l_2.

Лемма 13: (a) $l(z) \in I(l_1(z), l_2(z))$ тогда и только тогда, когда $l(z) = \lambda_1\,l_1(z) + \lambda_2\,l_2(z)$.
(b) Идеал $I(l_1(z), l_2(z))$ – прост, т.е. если $p(z)\,q(z) \in I(l_1(z), l_2(z))$, то либо

$p(z) \in I(l_1(z), l_2(z))$, либо $q(z) \in I(l_1(z), l_2(z))$.

Перейдем к рассмотрению коразмерности $\mathbf{k} = \mathbf{3}$.

Пусть
$$< z, \bar{z} >= ((Pz \cdot \bar{z}),\, (Qz \cdot \bar{z}), (Rz \cdot \bar{z}))$$
Соотношение (13) примет вид
$$l(z,z)\, Pz + m(z,z)\, Qz + n(z,z)\, Rz = 0 \tag{17}$$

Лемма 14: Соотношение (17) невозможно для линейно зависимых (l, m, n).
Доказательство: Пусть $\mathrm{rank}(l, m, n) = 1$, т.е.
$$l(z,z) = \lambda\, \varphi(z,z),\; m(z,z) = \mu\, \varphi(z,z),\; n(z,z) = \nu\, \varphi(z,z), \varphi(z,z) \neq 0.$$
Тогда $\lambda\, Pz + \mu\, Qz + \nu\, Rz = 0$. Противоречие.
Пусть $\mathrm{rank}(l, m, n) = 2$, т.е. (для определенности) $n(z,z) = \lambda\, l(z,z) + \mu\, m(z,z)$, где l и m – непропорциональны. Имеем
$$l(z,z)(Pz + \lambda\, Rz) + m(z,z)(Qz + \mu\, Rz) = 0.$$
Пусть l и m – не взаимно просты, т.е.
$$l(z,z) = \alpha(z)\, \gamma(z),\; m(z,z) = \beta(z)\, \gamma(z),$$
где α и β – непропорциональны $\gamma \neq 0$. Получаем
$$\alpha(z)(Pz + \lambda\, Rz) + \beta(z)(Qz + \mu\, Rz) = 0.$$
Откуда следует (лемма 11), что
$$(Pz + \lambda\, Rz) = \beta(z)\, A,\; (Qz + \mu\, Rz) = -\alpha(z)\, A,\; A \in \mathbf{C}^n.$$
Если λ и μ – вещественны, то матрицы, которые стоят в левых частях этих равенств – эрмитовы и по лемме 10 $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ пропорциональны $(z \cdot \bar{A})$. Противоречие.

Если хотя бы одно из чисел λ и μ – не вещественно, например λ, то, отделяя в $(Pz \cdot \bar{z} + \lambda\, Rz \cdot \bar{z}) = \beta(z)\, A \cdot \bar{z}$ мнимую часть получаем

$$(\mathrm{Im}\lambda)\, Rz \cdot \bar{z} = \mathrm{Im}(\beta(z)\, A \cdot \bar{z})$$

Откуда по лемме 10 получаем, что $\beta(z)$ пропорциональна $z \cdot \bar{A}$, откуда следует, что все три эрмитовы формы $(Pz \cdot \bar{z},\ Qz \cdot \bar{z},\ Rz \cdot \bar{z})$ пропорциональны $|z \cdot \bar{A}|^2$. Противоречие.
Пусть l и m – взаимно просты, тогда $(Pz + \lambda\, Rz) = (Qz + \mu\, Rz) = 0$. Противоречие. Лемма доказана.

Далее полагаем, что $(l(z,z), m(z,z), n(z,z))$ – линейно независимы. Рассмотрим идеалы, порожденные парами квадратичных форм

$$I_1 = (m,n),\ I_2 = (l,n),\ I_3 = (l,m)$$

и множества их нулей V_1, V_2, V_3. Линейная независимость форм означает, что

$$l(z,z) \notin I_1, \quad m(z,z) \notin I_2, \quad n(z,z) \notin I_3. \tag{18}$$

Рассмотрим множества нулей этих идеалов

$$V_1 = \{m(z,z) = n(z,z) = 0\},\ V_2 = \{l(z,z) = n(z,z) = 0\},\ V_3 = \{l(z,z) = m(z,z) = 0\}$$

Лемма 15: Пусть размерность пространства $\mathbf{C}^n$ не меньше 4 и l не есть тождественный ноль на V_1, m не есть тождественный ноль на V_3, n не есть тождественный ноль на V_3. Тогда соотношение (17) невозможно.
Доказательство: Тогда из соотношения (17) следует, что $Pz = 0$ на непустом множестве

$$V_1' = \{z \in \mathbf{C}^n : m(z,z) = n(z,z) = 0,\ l(z,z) \neq 0\}.$$

Поэтому $Pz = 0$ и на множестве $\{z \in \mathbf{C}^n : m(z,z) = n(z,z) = 0\}$, которое лежит в замыкании V_1. В силу аналогичных рассуждений для Qz и Rz все три линейных оператора обращаются в ноль на

$$\{z \in \mathbf{C}^n : m(z,z) = n(z,z) = l(z,z) = 0\},$$

которое имеет размерность не ниже $(n-3)$ и, поэтому содержит $z \neq 0$. Противоречие. Лемма доказана.

Рассмотрим ситуацию, когда хотя бы одно из трех условий предыдущей леммы нарушено. Пусть, например, $l = 0$ на V_1. Учитывая, что (l, m, n) – линейно независимы и $l \notin I_1$ из этого сразу следует, что I_1 не является радикальным. Это означает, что среди линейных комбинаций m и n есть полный квадрат. Вместе с условием обращения в ноль l это означает, что от линейно независимых форм (l, m, n) мы можем с помощью невырожденного линейного преобразования перейти к их линейным комбинациям вида

$$l'(z,z) = \lambda(z)\,\mu(z),\ m'(z,z) = (\mu(z))^2,\ n'(z,z) = n(z,z)$$

где линейные формы λ и μ - непропорциональны. Соотношение (17) примет вид

$$l'(z,z)\,P'z+m'(z,z)\,Q'z+n'(z,z)\,R'z = \lambda(z)\,\mu(z)\,Pz+(\mu(z))^2\,Qz+n(z,z)\,Rz = 0 \tag{19}$$

где $(P'z, Q'z, R'z)$ получены из (Pz, Qz, Rz) невырожденным линейным преобразованием.

Лемма 16: Если размерность пространства $\mathbf{C}^n$ не меньше 4 и одно из трех условий леммы 15 нарушено, то выполнение (17) – невозможно.
Доказательство: Пусть $n(z,z)$ делится на $\mu(z)$, т.е. $n(z,z) = \mu(z)\,\nu(z)$, причем $(\lambda(z), \mu(z), \nu(z))$ – линейно независимы. Тогда (19) принимает вид

$$\lambda(z)\,Pz + \mu(z)\,Qz + \nu(z)\,Rz = 0.$$

Тогда, также как при доказательстве леммы 15 покажем, что все три оператора обращаются в ноль на подпространстве

$$\lambda(z) = \mu(z) = \nu(z) = 0$$

положительной размерности. Это означает наличие общего ядра у исходной тройки операторов. Противоречие.

Пусть теперь $n(z,z)$ не делится на $\mu(z)$, имеем

$$\mu(z)(\lambda(z)\,Pz + \mu(z)\,Qz) + n(z,z)\,Rz = 0.$$

Откуда следует, что

$$Rz = \mu(z)\,A, \quad (\lambda(z)\,Pz + \mu(z)\,Qz) + n(z,z)\,A = 0, \quad A \neq 0.$$

Откуда получаем, что $n(z, z) = \alpha(z)\,\lambda(z) + \beta(z)\,\mu(z)$. Тогда имеем

$$\lambda(z)(Pz + \alpha(z)\,A) + \mu(z)(Qz + \beta(z)\,A) = 0.$$

Откуда, в свою очередь, получаем

$$(Pz + \alpha(z)\,A) = \mu(z)\,B, \quad (Qz + \beta(z)\,A) = -\lambda(z)\,B.$$

Итого

$$Pz = -\alpha(z)\,A + \mu(z)\,B, \quad Qz = -\beta(z)\,A) - \lambda(z)\,B, Rz = \mu(z)\,A.$$

Т.е. (Pz, Qz, Rz) лежат в линейной оболочке двух постоянных векторов (A, B). От (Pz, Qz, Rz) с помощью невырожденного линейного преобразования можно перейти к исходным эрмитовым матрицам, которые фигурируют в соотношении (17). При этом векторам (A, B) будут соответствовать два простоянных вектора (A', B'). В таком случае, как следует из леммы 10, все три эрмитовых формы есть линейные комбинации $|(z \cdot \bar{A}'|^2$ и $|(z \cdot \bar{B}'|^2$ и, следовательно, линейно зависимы. Проттворечие.

Применяя лемму 14, лемму 15, лемму 16 и теорему 7 получаем следующее утверждение

Утверждение 17: (a) Пусть $k = 3$. Если $D(u)(z, z)$ удовлетворяет соотношению (11), то $D(u)(z, z) = 0$.
(b) При этом g_3 состоит из полей вида $X = (d(w, w),\, 2\,i\, < z, \bar{d}(w, w) >)$, где $< z, \bar{d}(< z, \bar{z} >, u) >= 0$.

Для $k = 3$ форма δ имеет вид.

$$\delta(u) = \alpha_1\,u_1 + \alpha_2\,u_2 + \alpha_3\,u_3.$$

Запишем (14), получим

$$(Pz \cdot \bar{z})\, < z, \bar{\alpha}_1 > + (Qz \cdot \bar{z})\, < z, \bar{\alpha}_2 > + (Rz \cdot \bar{z})\, < z, \bar{\alpha}_3 >= 0 \qquad (20)$$

Тройка векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ может иметь ранг ноль, один, два или три. Ноль – это значит, что $\delta = 0$.

Случай 1 (ранг один). Пусть ранг равен одному, т.е. $\alpha_j = \lambda_j\,\alpha,\ \alpha \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\},\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$. Из (20) получаем

$$(\bar{\lambda}_1\,(Pz \cdot \bar{z}) + \bar{\lambda}_2\,(Qz \cdot \bar{z}) + \bar{\lambda}_3\,(Rz \cdot \bar{z}))\, < z, \bar{\alpha} >= 0$$

Откуда следует линейная зависимость (P, Q, R), что противоречит условию невырожденности этого набора.

Случай 2 (ранг два). Пусть ранг равен двум. Можем считать, что $\alpha_3 = \bar{\lambda}\,\alpha_1 + \bar{\mu}\,\alpha_2$, где вектора α_1, α_2 - линейно независимы. Из (20) получаем

$$((Pz \cdot \bar{z}) + \lambda\,(Rz \cdot \bar{z}))\, < z, \bar{\alpha}_1 > +((Qz \cdot \bar{z}) + \mu\,(Rz \cdot \bar{z}))\, < z, \bar{\alpha}_2 >= 0.$$

Выберем в $\mathbf{C}^n$ базис вида $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Записывая (20), получаем

$$\begin{aligned} p_1(z)\,((Pz \cdot \bar{z}) + \lambda\,(Rz \cdot \bar{z})) + p_2(z)\,((Qz \cdot \bar{z}) + \mu\,(Rz \cdot \bar{z})) = 0,\\ q_1(z)\,((Pz \cdot \bar{z}) + \lambda\,(Rz \cdot \bar{z})) + q_2(z)\,((Qz \cdot \bar{z}) + \mu\,(Rz \cdot \bar{z})) = 0,\\ r_1(z)\,((Pz \cdot \bar{z}) + \lambda\,(Rz \cdot \bar{z})) + r_2(z)\,((Qz \cdot \bar{z}) + \mu\,(Rz \cdot \bar{z})) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Из условия невырожденности набора (P, Q, R) следует, что в каждой паре $(p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2)$ либо обе формы равны нулю, либо – непропорциональны. Пусть $r_1 = r_2 = 0$. Тогда записывая первую координату первого соотношения и вторую – второго и применяя лемму 5, получаем, что p_1 пропорциональна p_2, а q_1 пропорциональна q_2. Таким образом все эти формы равны нулю, а это означает что оба вектора α_1 и α_2 - содержатся в ядре $< z, \bar{z} >$. Это противоречие означает, что (r_1, r_2) – непропорциональны. Тогда из леммы 3 и условия невырожденности из третьего соотношения (21) получаем

$$P\,z + \lambda\,R\,z = r_2(z)\,A, \quad Q\,z + \mu\,R\,z = -r_1(z)\,A, \quad A \neq 0 \tag{22}$$

Подставляя (22) в первое и второе соотношения (21) и учитывая, что $A \neq 0$, получаем

$$(p_1(z)\,r_2(z) - p_2(z)\,r_1(z))\,(A \cdot \bar{z})) = 0, \quad (q_1(z)\,r_2(z) - q_2(z)\,r_1(z))\,(A \cdot \bar{z})) = 0.$$

Учитывая непропорциональность r_1 и r_2, получаем

$$p_1(z) = \nu\,r_1(z),\ p_2(z) = \nu\,r_2(z),\ q_1(z) = \kappa\,r_1(z),\ q_2(z) = \kappa\,r_2(z).$$

Выписывая первую и вторую координаты (22), получаем

$$\begin{aligned} \nu\,r_1(z) + \lambda\,r_1(z) = a_1\,r_2(z), \quad \nu\,r_2(z) + \lambda\,r_2(z) = a_2\,r_2(z),\\ \kappa\,r_1(z) + \mu\,r_1(z) = a_1\,r_1(z), \quad \kappa\,r_2(z) + \mu\,r_2(z) = a_2\,r_1(z). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\nu = -\lambda,\ \kappa = -\mu,\ a_1 = a_2 = 0.$$

Перепишем (22) в виде

$$(Pz \cdot \bar{z}) + \lambda\,(Rz \cdot \bar{z}) = r_2(z)\,(A \cdot \bar{z}),\ (Qz \cdot \bar{z}) + \mu\,(Rz \cdot \bar{z}) = -r_1(z)\,(A \cdot \bar{z}) \quad (23)$$

Если коэффициенты λ и μ – вещественны, то из леммы 6 следует, что обе формы r_1 и r_2 пропорциональны $(z \cdot \bar{A})$. Противоречие. Пусть, далее, лишь одно из них вещественно, скажем, μ, а $L = \operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Тогда из второго соотношения (23) получаем, что $r_1(z) = \tau\,(z \cdot \bar{A})$. Отделяя мнимую часть первого соотношения (23) получаем, что

$$(Rz \cdot \bar{z}) = \frac{1}{L}\operatorname{Im}\,(r_2(z)\,(A \cdot \bar{z})).$$

Это равносильно тому,что

$$r_j(z) = \frac{1}{2\,i\,L}(r_2(z)\,a_j - (z \cdot \bar{A})\,\bar{r}_2^j).$$

Для $j = 2$ получаем

$$r_2(z) = \frac{\bar{r}_2^2}{2\,i\,L}\,(z \cdot \bar{A}).$$

Откуда следует, что r_1 и r_2 пропорциональны. Противоречие.

Пусть теперь $L = \operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и $M = \operatorname{Im}\mu \neq 0$. Отделяя мнимую часть первого и второго соотношения (23) получаем, что

$$(Rz \cdot \bar{z}) = \frac{1}{L}\operatorname{Im}\,(r_2(z)\,(A \cdot \bar{z})) = -\frac{1}{M}\operatorname{Im}\,(r_1(z)\,(A \cdot \bar{z})).$$

Откуда следует, что

$$(z \cdot \bar{A})\,(L\,r_1(z) + M\,r_2(z)) = (z \cdot \bar{A})\,(L\,\overline{r_1(z)} + M\,\overline{r_2(z)}).$$

Откуда следует, что

$$r_2(z) = -\frac{L}{M}\,r_1(z) + \nu\,(z \cdot \bar{A}).$$

Отделяя теперь вещественные части соотношений (23), подставляя туда полученные значения для $(Rz \cdot \bar{z})$ и $r_2(z)$, мы получаем выражения для

$(Pz\cdot\bar z)$ и $(Qz\cdot\bar z)$. В результате мы видим, что все три эрмитовых формы пропорциональны $\mathrm{Im}\,(r_1(z)\,(A\cdot\bar z))$. Противоречие.

Случай 3 (ранг три). Будем предполагать, что $n\geq 3$. То, что не существует контрпримера CR-размерности $n\leq 2$ – хорошо известно. Выберем в $\mathbf{C}^n$ базис вида $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots)$. Соотношение (20) примет вид

$$\begin{aligned} p_1(z)\,(Pz\cdot\bar z)+p_2(z)\,(Qz\cdot\bar z)+p_3(z)\,(Rz\cdot\bar z)=0,\\ q_1(z)\,(Pz\cdot\bar z)+q_2(z)\,(Qz\cdot\bar z)+q_3(z)\,(Rz\cdot\bar z)=0,\\ r_1(z)\,(Pz\cdot\bar z)+r_2(z)\,(Qz\cdot\bar z)+r_3(z)\,(Rz\cdot\bar z)=0. \end{aligned}\tag{24}$$

Или же в векторной форме

$$\begin{aligned} p_1(z)\,Pz+p_2(z)\,Qz+p_3(z)\,Rz=0,\\ q_1(z)\,Pz+q_2(z)\,Qz+q_3(z)\,Rz=0,\\ r_1(z)\,Pz+r_2(z)\,Qz+r_3(z)\,Rz=0. \end{aligned}\tag{25}$$

Запишем первую координату первого соотношения (25), вторую – второго, третью – третьего, получаем

$$\begin{aligned} p_1^2+p_2\,q_1+p_3\,r_1=0,\\ q_1\,p_2+q_2^2+q_3\,r_2=0,\\ r_1\,p_3+r_2\,q_3+r_3^2=0. \end{aligned}$$

Откуда с помощью леммы 5 получаем

$$\begin{aligned} p_1(z)=\alpha_2\,p_2(z)+\alpha_3\,p_3(z),\\ q_2(z)=\beta_1\,q_1(z)+\beta_3\,q_3(z),\\ r_3(z)=\gamma_1\,r_1(z)+\gamma_2\,r_2(z). \end{aligned}$$

Тогда (25) принимает вид

$$\begin{aligned} p_2(z)\,(Q+\alpha_2\,P)\,z+p_3(z)\,(R+\alpha_3\,P)\,z=0,\\ q_1(z)\,(P+\beta_1\,Q)\,z+q_3(z)\,(R+\beta_3\,Q)\,z=0,\\ r_1(z)\,(P+\gamma_1\,R)\,z+r_2(z)\,(Q+\gamma_2\,R)\,z=0 \end{aligned}\tag{26}$$

Из линейной независимости (P,Q,R) следует, что в каждой паре

$$(p_2,p_3),(q_1,p_3),(r_1,r_2)$$

либо обе формы одновременно равны нулю, либо непропорциональны.

Случай 3.0. Все три пары обратиться в ноль не могут, т.к. это означало бы что все три первых базисных вектора попали в общее ядро. Таким, образом одна из трех пар - ненулевая и непропорциональная. Пусть это (r_1, r_2).

Случай 3.1. Пусть обе оставшиеся пары – нулевые. Запишем первую координату третьего соотношения (26), получим $\gamma_1\, r_1^2 + \gamma_2\, r_1\, r_2 = 0$. Откуда следует, что $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Тогда с помощью леммы 3 и невырожденности получаем, что $P\, z = r_2(z)\, A,\ Q\, z = -r_1(z)\, A,\ A \neq 0$, а из леммы 6, что как r_1, так и r_2 пропорциональны $(z \cdot \bar{A})$. Противоречие.

Случай 3.2 Пусть только одна пара обратилась в ноль, скажем $p_1 = p_2 = 0$, а формы (q_1, q_3), также как и (r_1, r_2) – попарно непропорциональны. Запишем первую координату второго соотношения (26), получим $\beta_1\, q_1^2 + q_3\, r_1 + \beta_3\, q_3\, q_1 = 0$. Откуда сразу следует, что $r_1 = \nu\, q_1$. Запишем первую координату третьего соотношения (26), получим $\gamma_1\, r_1^2 + r_2\,(q_1 + \gamma_2\, r_1) = 0$. Откуда, ввиду того что r_2 непропорциональна r_1 следует, что $\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = -1$, т.е. $r_3 = -r_2$. Из соотношения $r_1(z)\, P\, z + r_2(z)\,(R - Q)\, z = 0$ следует, что $r_j = q_j,\ j = 1, 2, 3,\ \beta_1 = 0,\ \beta_3 = -1$, т.е. $q_2 = -q_3$. Откуда получаем, что $r_1(z)\, P\, z + r_2(z)\,(Q - R)\, z = 0$, т.е. $R = Q$. Противоречие.

Случай 3.3. Пусть все три пары попарно непропорциональны. Тогда из (26), леммы 3 и невырожденности получаем

$$
\begin{aligned}
(Q + \alpha_2\, P)\, z = -p_3(z)\, A, &\quad (R + \alpha_3\, P)\, z = p_2(z)\, A,\\
(P + \beta_1\, Q)\, z = -q_3(z)\, B, &\quad (R + \beta_3\, Q)\, z = q_1(z)\, B,\\
(P + \gamma_1\, R)\, z = -r_2(z)\, C, &\quad (Q + \gamma_2\, R)\, z = r_1(z)\, C,
\end{aligned} \tag{27}
$$

где A, B, C – три ненулевых вектора. Выписывая для первого равенства третью координату, для второго – вторую, для третьего – третью, для четвертого – первую, для пятого – вторую и для шестого – первую, получим следующий набор соотношений

$$
\begin{aligned}
q_3(z) = -(\alpha_2 + a_3)\, p_3(z), &\quad (\alpha_2 + a_3)(\beta_1 + b_3) = 1,\\
r_2(z) = (a_2 - \alpha_3)\, p_2(z), &\quad (\alpha_3 - a_2)(\gamma_1 + c_2) = 1,\\
r_1(z) = (b_1 - \beta_3)\, q_1(z), &\quad (b_1 - \beta_3)(c_1 - \gamma_2) = 1.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Таким образом все девять линейных форм $(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3)$ являются линейными комбинациями трех (q_1, p_2, p_3).

$$p_1 = \alpha_2\, p_2 + \alpha_3\, p_3,\ \ q_2 = \beta_1\, q_1 - \beta_3\,(a_3 + \alpha_2) p_3,\ \ q_3 = -(\alpha_2 + a_3)\, p_3,$$

$$r_1 = (b_1 - \beta_3)\, q_1, \;\; r_2 = (a_2 - \alpha_3)\, p_2, \;\; r_3 = \gamma_1\, (b_1 - \beta_3)\, q_1 + \gamma_2\, (a_2 - \alpha_3)\, p_2.$$

А также получаем, что

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_2 + a_3} - b_3, \;\; \gamma_1 = \frac{1}{\alpha_3 - a_2} - c_2, \;\; \gamma_2 = \frac{1}{\beta_3 - b_1} + c_1,$$

где знаменатели не обращаются в ноль.

В таком случае все восемнадцать соотношений, полученных из первых трех координат (27) представляют собой систему $L(q_1, p_2, p_3) = 0$ линейных соотношений между (q_1, p_2, p_3). Коэффициенты этой системы рационально зависят от $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3)$ и $(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3)$, знаменатели в силу (28) в ноль не обращаются.

Пронумеруем эти уравнения подряд, т.е. первая координата первой группы, вторая координата первой группы, третья координата первой группы, первая координата второй группы и так до третьей координаты шестой группы. Получим

$$l_j^1\, q_1 + l_j^2\, p_2 + l_j^3\, p_3 = 0, \quad j = 1, \ldots, 18.$$

Учитывая, что ранг пары форм (p_2, p_3) равен двум, ранг полученной матрицы коэффициентов размером 3×18 равен единице. Получаем систему из 34-х уравнений

$$e_{2j-3} = l_j^2\, l_1^1 - l_j^1\, l_1^2, \quad e_{2j-2} = l_j^3\, l_1^1 - l_j^1\, l_1^3, \qquad j = 2, \ldots, 18.$$

Пусть E_m - числитель выражения e_m. Получаем систему из 34-х полиномиавльных соотношений на 12 переменных. $E_m = 0$, $m = 1, \ldots, 34$. Часть соотношений (27) мы использовали выше. Непосредственно убеждаемся, что

$$E_3 = E_4 = E_7 = E_8 = E_{15} = E_{17} = E_{18} = E_{26} = 0.$$

Систему из оставшихся 26 уравнений обозначим

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = 0. \tag{29}$$

Лемма 18: (a) Решения системы (29) это объединение трех неприводимых компонент

$$a_1 = a_2 = a_3 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$
$$a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = \alpha_3 = 0,$$
$$a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = \alpha_2\, \beta_3 + \alpha_3 = 0.$$

(b) Ни одно из этих решений не совместимо с условием случая (3.3.)
Доказательство: Пункт (a) проверяется непосредственным анализом системы, который упрощается в связи с тем, что что среди уравнений имеются уравнения $a_3 = a_2$ и $(c_2-c_1)(a_2-\alpha_3) = 0$. Поскольку из (28) следует, что $(a_2 - \alpha_3) \neq 0$, то $c_2 = c_1$. Также это легко проверяется с использованием системы Maple.

Далее, если решение принадлежит первой или второй компоненте, то $\alpha_3 - a_2 = 0$, что противоречит (28). Пусть решение из третьей компоненты. Тогда

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_2},\ \beta_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2},\ \gamma_1 = \frac{1}{\alpha_3},\ \gamma_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

При этом зависимые формы выражаются через (q_1, p_2, p_3) следующим образом

$$q_2 = -\alpha_2\, p_2,\ q_3 = -\alpha_2\, p_3,\ r_1 = -\alpha_2\, \alpha_3\, p_2, -\alpha_3^2\, p_3,\ r_2 = -\alpha_3\, p_2,\ r_3 = -\alpha_3\, p_3.$$

Используем первые два равенства (27), чтобы выразить Q и R.

$$\begin{aligned} Q\, z &= -\alpha_2\, P\, z - p_3(z)\, A, \\ R\, z &= -\alpha_3\, P\, z + p_2(z)\, A, \end{aligned} \tag{30}$$

Результат подставим в оставшиеся четыре, получим.

$$B = -\frac{1}{\alpha_2}\, A,\ q_1 = -\alpha_2^2\, p_2 - \alpha_2\, \alpha_3\, p_3,\ C = \frac{1}{\alpha_3^2}\, A,\ \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\, p_2 = 0.$$

Последнее равенство не может быть выполнено т.к. $\alpha_2 \neq 0$. Это противоречие завершает наше рассуждение.

Теорема 19: Если $\mathcal{Q}$ – невырожденная модельная квадрика коразмерности $k = 3$, то разложение $\operatorname{aut} \mathcal{Q}$ на весовые компоненты имеет вид

$$g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2.$$

Доказательство: Как хорошо известно, подалгебра $g_- = g_{-2} + g_{-1}$ для любой невырожденной квадрики – фундаментальна по Танаке ([6], [7]). Выше нами было показано, что $g_3 = 0$. Откуда сразу следует тривиальность и всех компонент с бо́льшими весами. Теорема доказана.

Рассмотренные выше доказательства неисключительности квадрик малой коразмерности использовали только второе соотношение (3). Квадрикам малых коразмерностей противостоят, в некотором смысле, квадрики очень высоких коразмерностей. Самая большая коразмерность при фиксированном n – это $k = n^2$. Это единственная квадрика, которая задается базисным набором в пространстве эрмитовых форм. Введем следующие обозначения для переменных группы w.

$$w_{\alpha\alpha} = u_{\alpha\alpha} + i\, v_{\alpha\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$
$$w^R_{\alpha\beta} = u^R_{\alpha\beta} + i\, v^R_{\alpha\beta}, \quad w^I_{\alpha\beta} = u^I_{\alpha\beta} + i\, v^I_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \beta < \alpha \leq n.$$

Тогда уравнения квадрики примут вид

$$v_{\alpha\alpha} = z_\alpha\, \bar z_\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$
$$v^R_{\alpha\beta} = 2\,\mathrm{Re}\, z_\alpha\, \bar z_\beta, \quad v^I_{\alpha\beta} = 2\,\mathrm{Im}\, z_\alpha\, \bar z_\beta, \quad 1 \leq \beta < \alpha \leq n.$$

Утверждение 20: Если $\mathcal{Q}$ – невырожденная квадрика коразмерности $k = n^2$ (последняя квадрика), то $g_+ = 0$. Другими словами такая квадрика является жесткой.
Доказательство: Будем выделять некоторые координаты в первом векторном соотношении (3). Запишем $(\alpha\alpha)$-координату

$$A_\alpha(u)(z,z)\, \bar z_\alpha = 2\, i\, z_\alpha\, \Delta \bar a_\alpha(u).$$

Из делимости на $\bar z_\alpha$ следует, что a_α зависит только от $u_{\alpha\alpha}$, причем $A_\alpha(u)(z,z) = 2\, i\, z^2_\alpha\, \bar a'_\alpha(u_{\alpha\alpha})$. Запишем $(\alpha 1)^R$-координату (3) для $\alpha > 1$, получим

$$\bar a'_\alpha(u_{\alpha\alpha})\, z^2_\alpha\, \bar z_1 + \bar a'_1(u_{11})\, z^2_1\, \bar z_\alpha = z_\alpha\, \bar a'_1 |z_1|^2 + z_1\, \bar a'_\alpha\, |z_\alpha|^2$$

Получаем, что $a = const,\ A = 0$. Откуда сразу следует, что $g_1 = 0$, а в силу фундаментальности, что и $g_+ = 0$. Утверждение доказано.

Отметим, что здесь, в противоположность малым коразмерностям, мы использовали только первое соотношение (3), причем небольшую его часть, и совсем не использовали второго соотношения (3). Это наблюдение позволяет предположить, что для больших коразмерностей основные ограничения на (a, A) следуют из первого соотношения, а для малых – из второго.

4. RAQ-квадрики

В работе [10] был рассмотрен весьма интересный класс квадрик, т.ч. $n = k$ (коразмерность равна CR-размерности) – RAQ-квадрики. Такие квадрики находятся во взаимно-однозначном соответсявии с конечномерными вещественными коммутативными (ассоциативными) алгебрами с единицей .

Пусть $\mathcal{A}$ – такая алгебра размерности n. Если X и Y – элементы $\mathcal{A}$, то через $x \cdot y$ обозначим их произведение как элементов алгебры. Пусть $\mathcal{A}^c = \mathcal{A} \bigotimes \mathbf{C}$ – комплексификация $\mathcal{A}$. Если $Z \in \mathcal{A}^c$, то через $\bar{Z}$ обозначим комплексное сопряжение, канонически определенное в $\mathcal{A}^c$. Квадрика, соответствующая алгебре $\mathcal{A}$ имеет вид

$$Q = \{(Z, W) \in (\mathcal{A}^c)^2 : \ \operatorname{Im} W = Z \cdot \bar{Z}\}. \tag{31}$$

Если задать вопрос так: когда квадрика типа $(n.n)$ имеет такой вид? То ответ – это два условия на форму $< z, \bar{z} >$:
– вещественность – в некоторых координатах форма на вещественных векторах принимает вещественные значения,
– ассоциативность – $<< p, q >, r >=< p, < q, r >>$ для всех p, q, $r \in \mathbf{R}^n$.
Поэтому они и называются RAQ-квадриками - Real Associative Quadrics.

В [10] было показано, что условие невырожденности для RAQ-квадрики равносильно наличию в $\mathcal{A}$ единицы.

Теорема 21: Исключительных RAQ-квадрик не существует.
Доказательство: Для доказательства воспользуемся достаточным условием неисключительности - теоремой 6. Проверим выполнение условий (I) и (II) .

Условие (I). Пусть $(E_1, \ldots, E_n)$ – базисные элементы алгебры $\mathcal{A}$, причем E_1 – это единица алгебры. Тогда координатные операторы имеют вид $H_j\, Z = E_j \cdot Z$ и, тем самым, $H_j\, E_1 = E_j$, а набор $(E_1, \ldots, E_n)$ имеет ранг n.

Условие (II). Образ отображения $(Z', Z) \to < Z', \bar{Z} >= Z' \cdot \bar{Z}$ совпадает с $\mathcal{A}^c$, т.к. (Z', E_1) переходит в Z'. Теорема доказана.

Следствие 22: Если $\mathcal{Q}$ – это невырожденная RAQ-квадрика, то
(a) $\mathrm{aut}\,\mathcal{Q} = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2$
(b) Подгруппа G_+ – подгруппа нелинейных автоморфизмов $\mathcal{Q}$, сохраняющих начало координат, описывается формулой Пуанкаре (см. [10]), а именно

$$\begin{aligned} Z^* &= (Z + a \cdot W) \cdot (1 - 2\,i\,\bar{a} \cdot Z - (r + i\,a \cdot \bar{a}) \cdot W)^{-1}, \\ W^* &= W \cdot (1 - 2\,i\,\bar{a} \cdot Z - (r + i\,a \cdot \bar{a}) \cdot W)^{-1}, \end{aligned} \tag{32}$$

где $a \in \mathcal{A}^c,\ r \in \mathcal{A}$.

5. Оценка на длину подалгебры $\mathbf{g}_+$

В [12] приведена теорема (теорема 12.3.11), позволяющая оценить номер струи j, от которой зависит отображение аналитического l-невырожденного ростка коразмерности k, а именно

$$j \leq (k+1)\,l.$$

Поскольку невырожденная квадрика $\mathcal{Q}$ является 1-невырожденной и имеет кончный тип в каждой точке (в частности, минимальна), то для степени d коэффициентов полей из $\mathrm{aut}\,\mathcal{Q}$ получаем следующую оценку

$$d \leq (k+1).$$

В этой части работы мы получим эту оценку и другие близкие результаты, пользуясь методами, отличными от методов работы [12] (множества Сегре). А именно, мы используем технику преобразования Фурье в пространстве обобщенных функций, которая лежит в основе доказательства теоремы Эренпрайса-Паламодова [11]. Эта теорема была использована в работе [5] при получении критерия конечномерности алгебры квадрики $\mathcal{Q}$.

Пусть $F(s) = (F_1(s), \ldots, F_n(s))$ – обобщенная вектор-функция, которая является преобразованием Фурье вектор-функции $a(u) = (a_1(u), \ldots, a_n(u))$. Тогда, применяя преобразование Фурье ко второму уравнению (3), получаем, что для каждого $z \in \mathbf{C}^n$ выполнено соотношение

$$(s_1 < z, \bar{z} >_1 + \ldots + s_k < z, \bar{z} >_k)^2 < F(s), \bar{z} >= 0 \tag{33}$$

Пусть $C[s] = C[s_1, \ldots, s_k]$ – кольцо полиномов от k-мерной переменной s с комплексными коэффициентами, $C[u] = C[u_1, \ldots, u_k]$ – такое же кольцо полиномов от k-мерной переменной u. Пусть $(C[s])^k$ – свободный модуль размерности k над $C[s]$, а $(C[u])^n$ – свободный модуль размерности n над $C[u]$. Пусть

$$\{e_j = (0, \ldots, 0, 1 \text{ (на j-м месте)}, 0, \ldots, 0),\ j = 1, \ldots, k\}$$

– набор образующих модуля $(C[s])^k$.

Введем в рассмотрение модуль $M = M(\mathcal{Q})$ – подмодуль модуля $(C[s])^k$, порожденный всеми образующими вида

$$(s_1 < z, \bar{z} >_1 + \ldots + s_k < z, \bar{z} >_k)^2 (< \varphi(s), \bar{z} >_1\ e_1 + \ldots + < \varphi(s), \bar{z} >_k\ e_k), \tag{34}$$

где $z \in \mathbf{C}^n$, $\varphi(s) = (\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)) \in (C[s])^n$. Будем называть $M(\mathcal{Q})$ *характеристическим* подмодулем квадрики $\mathcal{Q}$.

Приведем набор утверждений, которые для уравнения

$$\Delta^2 < a(u), \bar{z} >= 0 \tag{35}$$

непосредственно следуют из общей схемы [11] (см. также [13] глава 10).

Утверждение: Если квадрика $\mathcal{Q}$ невырождена, то
(a) Пространство решений (35) – это линейное подпространство $\mathcal{L}_1$ пространства полиномов степени не выше чем $p < \infty$.
(b) Пространство решений (33) – это линейное подпространство $\mathcal{L}_2$ пространства, порожденного δ_0 (дельта-функция с носителем в нуле) и ее производными порядка не выше чем p.
(c) Пространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ – изоморфны, изоморфизм устанавливается преобразованием Фурье.
(d) Характеристический подмодуль имеет конечную коразмерность, т.е. если $M' = ((C[s])^k/M)$, то $\dim M'$ как линейного пространства конечна. Причем M' как линейное пространство естественно отождествляется с пространством $\mathcal{L}_3$, которое получено заменой производной дельта-функции на соответствующий моном от переменных s. Пространство $\mathcal{L}_3$ изоморфно $\mathcal{L}_2$ и отождествляется с фактор-пространством M' в силу того, что любой элемент $(C[s])^k$ однозначно представим в виде суммы элементов $\mathcal{L}_3$ и M.

Это утверждение показывает, что все характеристики пространства $\mathcal{L}_1$ решений (35) (размерность, степень, ...) совпадают с аналогичными характеристиками пространства $\mathcal{L}_3$, которое предсталяет собой прямое дополнение M до $(C[s])^k$.

Поскольку кольцо полиномов $C[s]$ – нётерово, то модуль M – конечно порожден. В соответствии с (34) это означает, что у M имеется конечная система образующих вида

$$\{(l_\nu(s))^2\,(\lambda_\nu^1\,e_1 + \ldots + \lambda_\nu^k\,e_k)\},$$

где $l_\nu(s)$ – линейные формы, а $\lambda \in \mathbf{C}^k$.

Пусть M_j – проекция M на j-ю координату $(C[s])^k$. Это идеал в $C[s]$, порожденный формами вида $\{(l_\nu(s))^2\,\lambda_\nu^j\}$, где $\lambda_\nu^j \neq 0$. Пусть r_j – это ранг соответствующего набора линейных форм $\{l_\nu(s)\}$.

Утверждение 23: (a) Для всех j ранг $r_j = k$.
(b) Дополнение к M – пространство $\mathcal{L}_3$ – это подпространство пространства наборов полиномов от s, чья суммарная степень не превосходитk. Пространство $\mathcal{L}_2$ – это подпространство пространства линейных комбинаций дельта-функции и ее производных порядка не выше k. Пространство $\mathcal{L}_1$ – это подпространство пространства наборов полиномов от u, чья суммарная степень не превосходит k.
(c) *Доказательство:* Пусть найдется j, т.ч. $r_j < k$. Выберем из набора $\{l_\nu(s)\}$ линейно независимый набор максимального ранга $(L_1(s), \ldots, L_{k'}(s))$ $k' < k$. Сделаем в пространстве переменного s невырожденную линейную замену $s \to \tilde{s}$, т.ч. $\tilde{s}_j = L_j(s)$ для $j = 1, \ldots, k'$. В новых переменных образующие M_j – это $(\tilde{s}_1)^2, \ldots, (\tilde{s}_{k'})^2$. Дополнение M_j до $C[\tilde{s}]$ бесконечномерно. Действительно, оно содержит все бесконечномерное кольцо полиномов от последней переменной $C[\tilde{s}_k]$. А из этого сразу следует, что бесконечномерно дополнение к M. Это противоречие доказывает пункт (a).
Итак, среди образующих идеала есть квадраты всех координат. Поэтому дополнение содержит лишь те полиномы, чья степень по любой переменной не превосходит единицы. Это, в частности, означает, что суммарная степень не превосходит k. Возвращаясь к старым переменным, мы сохраняем эту оценку. Итак, проекция дополнения на каждую координату не содержит полиномов степени выше k. Оставшиеся утверждения – это следствие описанных изоморфизмов. Утверждение доказано.

Из леммы 4 сразу следует что если $A(u)(z,z)$ – решение (3), то

$$\deg_u A(u)(z,z) \leq k-1.$$

Рассуждения, аналогичные тем, что были приведены выше, показывают, что если $(C(u), b(u))$ – решение (4), то

$$\deg_u C(u) \leq k, \quad \deg_u b(u) \leq 2\,k.$$

Из этих оценок можно получить общие оценки на степени коэффициентов произвольного элемента алгебры $\operatorname{aut} \mathcal{Q}$. В результате для нечетной компоненты получаем оценку степени $(k+1)$, а для четной – оценку $2k$. Однако можно поступить иначе. Это даст более точную информацию, а к тому же не использует других оценок, кроме полученной выше оценки степени a. Можно сначала дать оценку *веса* нечетной компоненты, а затем воспользоваться фундаментальностью алгебры.

Теорема 24: Если $\mathcal{Q}$ – невырожденная модельная квадрика коразмерности k, то
(a) Вес полей нечетного веса из $\operatorname{aut} \mathcal{Q}$ не превосходит $2\,k-1$.
(b) Вес произвольного поля не превосходит $2\,k$, т.е.

$$\operatorname{aut} \mathcal{Q} = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + \ldots + g_{2k}$$

(c) Степени коэффициентов полей из $\operatorname{aut} \mathcal{Q}$ не превосходят $(k+1)$.
Доказательство: В силу оценок, полученных для a и A, сразу получаем, что вес нечетной компоненты

$$2\,\mathrm{Re}\left((a(w) + A(w)(z,z))\,\frac{\partial}{\partial z} + 2\,i\, < z, \bar{a}(w) > \,\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

не превосходит $2k-1$. Это пункт (a). Из фундаментальности следует, что не существует ненулевых полей веса больше, чем $2k$. Это пункт (b). Как было отмечено, степени коэффициентов для полей нечетного веса не превосходят $(k+1)$. Оценку для степени коэффициентов для полей четного веса получим из оценки веса. Если вес поля четного веса

$$2\,\mathrm{Re}\left(C(w)\,z\,\frac{\partial}{\partial z} + b(w)\,\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

не превосходит $2k$, то степени как $C(u)z$, так и $b(u)$ не превосходит также $(k+1)$. Теорема доказана.

Как известно [15], группа локальных автоморфизмов невырожденной квадрики – это подгруппа группы бирациональных автоморфизмов объемлющего пространства $\mathbf{C}^{n+k}$ с равномерной оценкой на степень. Полученная в предыдущей теореме оценка степени инфинетизимальных автоморфизмов позволяет дать оценку на степень автоморфизмов.

Следствие 25: Пусть $\mathcal{Q}$ – невырожденная квадрика типа (n,k), а $\mathrm{Aut}\,\mathcal{Q}$ – локальная группа ее автоморфизмов, голоморфных в окрестности нуля. Тогда $\mathrm{Aut}\,\mathcal{Q}$ состоит из бирациональных преобразований $\mathbf{C}^{n+k}$ чья степень не превосходит $(3n+3k+2)(k+1)$.

6. Открытые вопросы

Если (n,k) – CR-тип (n – CR-размерность, k – коразмерность), то невырожденные квадрики возможны в диапазоне $1 \leq k \leq n^2$.

Вопрос 26. Для каких CR-типов из этого диапазона существуют исключительные квадрики?

Как мы видели, кроме упомянутых случаев $k = 1, 2, 3$, в которых исключительных квадрик нет, к числу таких коразмерностей можно добавить $k = n^2$ (утверждение 20).

Выше (теорема 7) было показано, что не существует квадрик коразмерности 4 для CR-размерности $n \leq 3$. Пример исключительной квадрики коразмерности $k = 4$, приведенный в [3], имеет CR-размерность $n = 6$. В качестве частного случая вопроса 26 можно предложить следующий вопрос. Какова минимальная CR-размерность допускающая исключительные квадрики коразмерности 4? (Варианты ответа: 4, 5, 6.)

Выше (теорема 24) было показано, что веса положительных компонент алгебры Ли невырожденной квадрики коразмерности k не превосходят $2k$. Но эта оценка не подкреплена примером и вопрос о точной оценке остается открыт.

Вопрос 27: Существуют ли невырожденные квадрики, т.ч. длина g_+ равна $2k$?

Все известные нам примеры не жестких квадрик это примеры, где старший вес – четный.

Вопрос 28: Существуют ли невырожденные квадрики, т.ч. длина g_+ равна нечетному числу?

В тех (n, k)-случаях, когда исключительные квадрики появляются, что предсталяет собой подмножество исключительных квадрик в совокупности всех невырожденных квадрик данного типа? Как мы отмечали выше исключительные квадрики задаются конечной совокупностью полиномиальных соотношений типа "равно нулю"и "не равно нулю"(полуалгебраическое множество). При этом естественная точка зрения состоит в том, чтобы проводить это исследование не в пространстве $\mathcal{H}$ наборов k эрмитовых форм, а в пространстве модулей [14], т.е. после факторизации этого пространства по известному линейному действию. Интерес представляет ответ на следующий вопрос.

Вопрос 29: Какова коразмерность подпространства модулей исключительных квадрик в пространстве модулей всех невырожденных квадрик?

Список литературы

[1] F. Meylan, A Counterexample to the 2-jet Determination Chern-Moser Theorem in Higher Codimension arxiv:2003.11783v1 [math.cv] 26 mar 2020

[2] В. К. Белошапка, Теорема единственности для автоморфизмов невырожденной поверхности в комплексном пространстве, Матем. заметки, 1990, том 47, выпуск 3, 17–22.

[3] J.Gregorovič, F. Meylan, Construction of Counterexamples to the 2-jet Determination Chern-Moser Theorem in Higher Codimension, arXiv:2010.10220v1 [math.CV] 20 Oct 2020.

[4]] S. S. Chern and J. K. Moser, “Real hypersurfaces in complex manifolds”, Acta Math. 133 (1974), 219–271.

[5] В. К. Белошапка, “Конечномерность группы автоморфизмов вещественно аналитической поверхности”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:2 (1988), 437–442; Math. USSR-Izv., 32:2 (1989), 443–448.

[6] M. Sabzevari and A. Spiro, “On the Geometric Order of Totally Nondegenerate CR-manifolds,” arXiv: 1807.03076v1 [mathCV], 9 Jul 2018.

[7] J. Gregorovič, “On the Beloshapka’s Rigidity Conjecture for Real Submanifolds in Complex Space,” arXiv: 1807.03502v1 [mathCV], 10 Jul 2018.

[8] Н.Ф.Палинчак, “Вещественные квадрики коразмерности 3 в $\mathbf{C}^6$ и их нелинейные автоморфизмы”, Изв. РАН. Сер. матем., 59:3 (1995), 159–178; Izv. Math., 59:3 (1995), 597–617.

[9] Е. Г. Анисова, “Квадрики коразмерности 4 в пространстве $\mathbf{C}^7$ и их автоморфизмы”, Матем. заметки, 64:6 (1998), 803–811; Math. Notes, 64:6 (1998), 697–703.

[10] V.Ezov, G.Schmalz, A matrix Poincare formula for holomorphic automorphisms of quadric of higher codimention. Real associative quadrics // J.Geom.Anal.1997, v.8, N 1, pp. 27-41.

[11] Паламодов В.П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.

[12] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, and L. P. Rothschild, “CR Automorphisms of Real Analytic CR in Complex Space,” Comm. Anal. Geom. 6, 291–315 (1998).

[13] B.Sturmfels, Solving Systems of Polinomial Equations, CBMC, Regional Conference Series in Mathematics, v.97, 2002, 152 pp.

[14] V.K.Beloshapka, Moduli Space of Model Real Submanifolds // Russian Journal of Math. Physics, vol.13, No.3, 2006, pp. 245-252.

[15] A. E. Tumanov, “Finite-Dimensionality of the Group of CR Automorphisms of a Standard CR Manifold and Proper Holomorphic Mappings of Siegel Domains,” Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 52 (3), 651– 659 (1988) [Math. USSR Izv. 32 (3), 655–662 (1989)].