Модификация конструкции Пуанкаре и её применение в CR-геометрии гиперповерхностей в $\mathbf{C}^4$

Белошапка В.К.

Аннотация

Обобщение гомологического оператора Пуанкаре – модифицированная конструкция Пуанкаре – была использована для оценки размерности локальных автоморфизмов произвольного ростка вещественно аналитической гиперповерхности пространства $\mathbf{C}^4$. В работе доказана следующая альтернатива: либо эта размерность бесконечна, либо она не превосходит 24-х. При этом 24 реализуется лишь для невырожденной гиперквадрики (одной из двух). Если гиперповерхность 2-невырождена в точке общего положения, то оценку можно улучшить до 17, а если 3-невырождена, то до 20.

[1]

Введение

Ведущим элементом метода модельной поверхности является конструкция Пуанкаре, которую он применял как в небесной механике, так и в CR-геометрии (гомологический оператор Пуанкаре или Пуанкаре-Дюлака). Применение в CR-геометрии дано в работе 1907-го года [1]. Эта конструкция, по существу, представляет собой версию теоремы о неявном отображении в классе формальных степенных рядов.

Обычно в CR-геометрии эта конструкция используется так. Пусть имеется некторое нелинейное дифференциальное или функциональное

[1]Механико-математический факультет Московского университета им.Ломоносова, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия, vkb@strogino.ru

соотношение $F(x,\phi(x))=0$. Пусть в кольце формальных степенных рядов от x введена некоторая градуировка (вес), причем μ-я компонента нашего соотношения имеет вид

$$L(x,\phi_\mu(x)) = \text{ выражению, зависящему от } \phi_\nu \text{ при } \nu \leq \mu-1,$$

где $L(x,y)$ линейно зависит от y. Тогда, очевидно, размерность линейного пространства решений уравнения $L(x,\phi(x))=0$ мажорирует размерность семейства решений исходного уравнения $F(x,\phi(x))=0$.

В работе [2] для оценки размерности алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов произвольной голоморфно невырожденной вещественной гиперповерхности пространства $\mathbf{C}^3$ была использована некоторая модификация этой конструкции (редукция на глубину два). А именно, пусть μ-я компонента нашего соотношения $F(x,\phi(x))=0$ имеет вид

$$L_1(x,\phi_\mu(x))+L_2(x,\phi_{\mu-1}(x)) = \text{ выражению, зависящему от } \phi_\nu \text{ при } \nu \leq \mu-2,$$

где $L_1(x,y)$ и $L_2(x,y)$ линейно зависят от y. Тогда, очевидно, размерность линейного пространства решений уравнения $L_1(x,\phi(x))+L_2(x,\phi(x))=0$ мажорирует размерность семейства решений исходного уравнения $F(x,\phi(x))=0$. Аналогично определяется обобщение этой конструкции – редукция на произвольную глубину k.

В данной работе мы даем еще одну демонстрацию применения редукции на глубину два и три. С помощью этой модификации конструкции Пуанкаре дается оценка сверху на размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов произвольной голоморфно невырожденной вещественной гиперповерхности пространства $\mathbf{C}^4$ (теорема 16).

Этот результат подтверждает старую гипотезу [6]: либо размерность группы автоморфизмов произвольного ростка вещественно аналитической гиперповерхности не превышает размерности для любой невырожденной стандартной гиперквадрики (в $\mathbf{C}^4$ она равна 24), либо она бесконечна.

Отметим, что для получения известной оценки для гиперповерхностей пространства $\mathbf{C}^2$ достаточно обычной (однократной) конструкции Пуанкаре. Для получения же такой оценки в пространстве размерности $(n+1)$ потребуется использование всех вариантов редукции на глубину от 1 до n.

Поскольку k-кратная конструкция Пуанкаре отличается от классической, изложим схему её применения в общем виде. Пусть V - линейное пространство бесконечных последовательностей вещественных чисел, пусть $x \in V$. Пусть, далее, эта последовательность разбита на конечные отрезки, которые мы будем обозначать x_j. Соответственно $x = (x_1, x_2, \ldots)$, при этом x_j – элемент некоторого конечномерного вещественного линейного пространства. Фиксируем некоторое натуральное число k. Вот общая формулировка, которую естественно назвать схемой рекурсии на глубину k.

Теорема 1: Пусть имеется бесконечная система полиномиальных соотношений вида

$$\Theta_j(x_1, \ldots, x_j) = L_{j1}(x_j) + \ldots + L_{jk}(x_{j-k+1}) + \theta_j(x_{j-k}, x_{j-k-1}, \ldots, x_1) = 0, \quad (1)$$

$$j = k, (k+1), \ldots, \qquad \text{где } (L_{j1}, \ldots, L_{jk}) \text{ – линейны, причем}$$

$$L_j(x) = L_{j1}(x_j) + L_{j2}(x_{j-1}) + \ldots + L_{jk}(x_{j-k+1}) \text{ и } L(x) = (L_1(x), L_2(x), \ldots).$$

И пусть известно, что $\operatorname{Ker} L$ содержится в конечномерном подпространстве пространства V вида $\tilde{V}_l = \{(x_1, \ldots, x_l, 0, 0, \ldots)\}$. Тогда число параметров, от которых зависит общее решение (1), не превосходит размерности $\operatorname{Ker} L$.

Доказательство: Пусть W – прямое дополнение $\operatorname{Ker} L$ до V. Это дополнение можно определить так. В конечномерном пространстве $\tilde{V}_l$ произвольно выберем прямое дополнение $\tilde{W}$ к $\operatorname{Ker} L$ и дополним его подпространством $V_l = \{(0, \ldots, 0, x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots)\}$. Таким образом, уравнение $L(x) = 0$ имеет в пространстве W единственное решение $x = 0$. Просматривая последовательно уравнения $\Theta_j(x) = L_j(x) + \theta_j(x) = 0$, убеждаемся, что эта система также имеет в W не более одного решения. Произвольный вектор $x \in V$ имеет вид $x + a$, где $x \in W$, $a \in \operatorname{Ker} L$. Рассмотрим нашу систему при фиксированном a. Получаем $\Theta_j(x+a) = L_j(x) + \theta_j(x+a) = 0$. Также видим, что эта система имеет не более одного решения. Таким образом, совокупность решений (1) параметризуется некторым подмножеством $\operatorname{Ker} L$. Теорема доказана.

Пусть Γ – вещественно аналитическая гиперповерхность в области пространства $\mathbf{C}^4$, Γ_ξ – росток этой гиперповерхности в точке ξ. Пусть, далее, $\operatorname{aut} \Gamma_\xi$ – алгебра Ли, состоящая из ростков вещественных вещественно аналитических векторных полей в точке ξ, касательных к Γ_ξ. Если Γ вне собственного аналитического подмножества Леви-невырождена, то в рамках стандартного подхода (однократная редукция) мы получаем стандартную оценку: $\dim \operatorname{aut} \Gamma_\xi$ не превосходит размерности алгебры автоморфизмов касательной невырожденной гиперквадрики, которая, независимо от сигнатуры, равна 24.

Рассчитывать на получение оценки мы можем только в случае, если Γ – голоморфно невырождена. Для гиперповерхности в $\mathbf{C}^4$ голоморфная невырожденность эквивалентна l-невырожденности вне собственного аналитического подмножества, причем $l \leq 3$ (см.[3]). Таким образом, для получения общей оценки нам необходимо рассмотреть две разных ситуации. Первая: Γ равномерно 2-невырождена в окрестности ξ. Вторая: Γ равномерно 3-невырождена в окрестности ξ.

Примеров равномерно 2-невырожденных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^4$ достаточно много. Например, они содержатся в известной работе Г.Фелса и В.Каупа [16]. В частности, там описаны трубчатые гиперповерхности над вещественными конусами и их голоморфные автоморфизмы. В $\mathbf{C}^4$ группы таких конусов имеют размерность 15. Примеров равномерно 3-невырожденных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^4$ нам известно два. Один от В.Каупа [16] и один от А.Санти [15]. Оба – голоморфно однородные, причем в примере Санти известна размерность автоморфизмов, которая равна 8.

Рассмотрим оба случая – 3-невырожденный и 2-невырожденный – последовательно. Отметим, что для получения оценки нам пришлось не только использовать гомологический оператор на глубину больше чем один. Также для анализа 2-невырожденных мы использовали двухкратную процедуру. А именно, рекуррентная процедура с одним весом, затем – смена веса и анализ ядра старого гомологического оператора с точки зрения новой весовой рекурсии, что ведет к новому гомологическому оператору. Затем для анализа специального случая (большое ядро) – еще одна смена веса и новая рекурсия.

В итоге мы получим две оценки размерности. Для 2-невырожденных - 17, а для 3-невырожденных - 20. При этом для 2-невырожденных наша техника дает оценку 18, но использование недавнего результата И.Зеленко и Д.Сайкса [12] позволило улучшить ее до 17.

3-невырожденные гиперповерхности

Обозначим координаты в $\mathbf{C}^4$ через $(z, \zeta, \eta, w = u + i\,v)$. Пусть Γ – *равномерно 3-невырождена* в окрестности $\xi \in \Gamma$. Имея ввиду нашу цель – получение оценки на размерность группы автоморфизмов, – мы можем ограничиться так называемыми "жесткими" гиперповерхностями. Действительно, если алгебра автоморфизмов содержит поле, трансверсальное комплексной касательной, то после локального распрямления мы можем полагать, что группа содержит сдвиги вдоль оси u и, тем самым, локальное уравнение Γ имеет вид

$$v = F(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}, \eta, \bar{\eta}),$$

т.е. правая часть не зависит от u. В силу 3-невырожденности ранг формы Леви в общей точке равен 1, и мы можем записать локальное уравнение Γ в виде $v = |z|^2 + F_3 + F_4 + \dots$, где $F_j(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}, \eta, \bar{\eta})$ – это однородный полином степени j. При этом простыми преобразованиями мы можем удалить все плюригармонические компоненты правой части уравнения, а также все члены, линейные по z и $\bar{z}$, за исключением $|z|^2$.

Необходимым условием равномерной 3-невырожденности является условие, что ранг комплексного гессиана $F(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}, \eta, \bar{\eta})$ всюду не превосходит единицы. Это условие, учитывая, что $F_{z\bar{z}}$ в нуле равна единице , можно записать как условие равенства нулю трех миноров второго порядка. А именно

$$\begin{aligned} \delta_1(F) &= F_{z\bar{z}}\, F_{\zeta\bar{\zeta}} - |F_{z\bar{\zeta}}|^2 = 0, \\ \delta_2(F) &= F_{z\bar{z}}\, F_{\zeta\bar{\eta}} - F_{\zeta\bar{z}}\, F_{z\bar{\eta}} = 0, \\ \delta_3(F) &= F_{z\bar{z}}\, F_{\eta\bar{\eta}} - |F_{z\bar{\eta}}|^2 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 2: Если Γ равномерно 3-невырождена, то уравнение этой гиперповерхности после линейной замены можно записать в виде

$$v = |z|^2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + O(7), \tag{3}$$

$$\text{где} \quad F_3 = 2\,\mathrm{Re}(z^2\,\bar{\zeta}),\ F_4 = 2\,\mathrm{Re}(z^3\,\bar{\eta}) + 4\,|z|^2\,|\zeta|^2,$$

$$F_5 = 2\,\mathrm{Re}(r_1 \bar{z}^4 \zeta + r_2 \bar{z}^4 \eta + r_3 z \bar{\zeta}^2 \bar{\eta}^2 + r_4 z \bar{\eta}^4 + 4\, z^2 \zeta \bar{\zeta}^2 + 6\, z^2 \bar{z}\, \zeta \bar{\eta}),$$

$$F_6 = 2\,\mathrm{Re}(8\,\bar{r}_1 z^3 \bar{z}\,\zeta\,\bar{\zeta} + 8\,\bar{r}_2 z^3 \bar{z}\,\zeta\,\bar{\eta} + 2\,r_3 z \eta^2 \bar{\zeta}\,\zeta^2 + 2\,r_4 z \eta^4 \bar{\zeta} +$$
$$s_1 z \bar{z}^4\,\zeta + s_2 \bar{z}^5\,\zeta + s_3 z \bar{z}^4\,\eta + s_4 \bar{z}^5 \eta + s_5 \bar{z}^4 \zeta^2 + s_6 \bar{z}^4\,\zeta\,\eta + s_7 \bar{z}^4 \eta^2 + s_8 \bar{z} \eta^5 +$$
$$12\,\bar{z}^3 \zeta \bar{\zeta}\,\eta + 12\,z \bar{z}^2 \zeta^2 \bar{\eta}) + 16\,|z|^2\,|\zeta|^4 + 9\,|z|^4\,|\eta|^2$$

Доказательство: Запишем общий вид F_3 с учетом наших упрощений. Выделяя в соотношениях (2) компоненту степени один, получаем, что $F_3 = 2\,\mathrm{Re}(a_1\,\zeta + a_2\,\eta)\,\bar{z}^2$. Поскольку F_3 не есть тождественный ноль, то $(a_1, a_2) \neq 0$ и мы можем заменить $a_1\,\zeta + a_2\,\eta$ на новую переменную ζ. Теперь простым преобразованием мы можем удалить из всех последующих компонент F слагаемые вида $2\,\mathrm{Re}(A(z,\zeta,\eta)\,\bar{z}^2)$ с голоморфным коэффициентом A.

Запишем общий вид F_4 с учетом наших упрощений. Выделяя в соотношениях (2) компоненту степени два, получаем, что $F_4 = 2\,\mathrm{Re}\,\bar{z}^3\,(a_3\,\eta + a_4\zeta) + 4\,|z|^2\,|\zeta|^2$. Из равномерной 3-невырожденности следует, что $(a_3, a_4) \neq 0$ и мы можем заменить $a_3\,\eta + a_4\,\zeta$ на новую переменную η. Простым преобразованием удаляем из всех последующих компонент F слагаемые вида $2\,\mathrm{Re}(B(z,\zeta,\eta)\,\bar{z}^3)$ с голоморфным коэффициентом B. Выделяя компоненту степени три, получаем указанный вид F_5. А затем из компоненты степени четыре – вид F_6. Лемма доказана.

Рассмотрим отображение ростка одной гиперповерхности Γ в начале координат вида (3) на другую такую гиперповерхность $\tilde{\Gamma}$. Пусть координаты ростка отображения в начале координат имеют вид

$$\Phi = (z \to f(z,\zeta,\eta,w),\ \zeta \to g(z,\zeta,\eta,w),\ \eta \to h(z,\zeta,\eta,w),\ w \to e(z,\zeta,\eta,w)).$$

Будем считать эти гиперповерхности фиксированными. Введем в пространстве степенных рядов от $(z,\bar{z},\zeta,\bar{\zeta},\eta,\bar{\eta},u)$, а также от $(z,\bar{z},\zeta,\bar{\zeta},\eta,\bar{\eta},w,\bar{w})$ градуировку, назначая веса переменным

$$[z] = [\bar{z}] = [\zeta] = [\bar{\zeta}] = [\eta] = [\bar{\eta}] = 1,\ [w] = [\bar{w}] = [u] = 2.$$

Набор весовых компонент $(f_{\mu-1}, g_{\mu-2}, h_{\mu-3}, e_\mu)$ обозначим через ϕ_μ (μ-я весовая компонента Φ). Запишем соотношение, отражающее тот факт, что Φ отображает Γ на $\tilde{\Gamma}$.

$$\begin{aligned}\Theta(z,\bar{z},\zeta,\bar{\zeta},u) = {} & -2\,\mathrm{Im}\,e(z,\zeta,\eta,w) + 2\,|f|^2 + 4\,\mathrm{Re}(f^2\bar{g}) + 4\,\mathrm{Re}(f^3\bar{h}) + 8\,|f|^2\,|g|^2 + \\ & 2\,F_4(f,\bar{f},g,\bar{g},h,\bar{h}) + 2\,F_5(f,\bar{f},g,\bar{g},h,\bar{h}) + 2\,F_6(f,\bar{f},g,\bar{g},h,\bar{h}) + \ldots \\ & \text{при } w = u + i\,(|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z^2\,\bar{\zeta}) + 2\,\mathrm{Re}(z^3\,\bar{\eta}) + 4\,|z|^2\,|\zeta|^2 + \ldots) \quad (4)\end{aligned}$$

Среди всех голоморфных в начале координат отображений выделим класс отображений вида

$$\mathcal{V}_5 = \{\Phi = Id + \phi_5 + \ldots = (z + O(4),\ \zeta + O(3),\ \eta + O(2),\ w + O(5))\} \quad (5)$$

Оценку размерности семейства таких отображений Γ на $\tilde{\Gamma}$ проведем по схеме кратной рекурсии глубины $k = 3$ (см. теорему 1). Для этого выделим в Θ_μ – μ-й весовой компоненте (4) – члены, зависящие от $(\phi_\mu, \phi_{\mu-1}, \phi_{\mu-2})$, т.е. от

$$(e_\mu, e_{\mu-1}, e_{\mu-2}, f_{\mu-1}, f_{\mu-2}, f_{\mu-3}, g_{\mu-2}, g_{\mu-3}, g_{\mu-4}, h_{\mu-3}, h_{\mu-4}, h_{\mu-5}).$$

Введем обозначения $\Delta_1\, \psi(u) = i\, F_3\, \psi'(u)$, $\Delta_2\, \psi(u) = i\, F_4\, \psi'(u)$. Выделим последовательно в слагаемых выражения Θ, начиная от $-2\,\mathrm{Im}\, e$ до F_6, члены указанного вида, получим следующий результат.

Лемма 3: Для всех $\mu \geq 5$ μ-я компонента Θ имеет вид

$$\Theta_\mu = L_1(\phi_\mu) + L_2(\phi_{\mu-1}) + L_3(\phi_{\mu-2}) + \theta_\mu(\phi_{\nu<\mu-2}), \text{ где } w = u + i\,|z|^2,$$
$$L_1(\phi) = 2\,\mathrm{Re}(i\,e + 2\,\bar{z}\,f + 2\,\bar{z}^2\,g + 2\,\bar{z}^3\,h),$$
$$L_2(\phi) = \Delta_1(L_1(\phi)) + l_2(\phi), \quad L_3(\phi) = \Delta_1(L_2(\phi)) + \Delta_2(L_1(\phi)) + \Delta_1^2(L_1(\phi)) + l_3(\phi),$$
$$l_2(\phi) = 2\,\mathrm{Re}\{4\,z\,\bar{\zeta}\,f + 8\,z\,\bar{z}\,\bar{\zeta}\,\eta\,g + (4\,\bar{z}^4\,r_2 + 4\,\bar{z}\,\zeta^2\,\eta\,r_3 + 8\,\bar{z}\,\eta^3\,r_4 + 12\,\bar{\zeta}\,\bar{z}^2\,z)\,h\},$$
$$l_3(\phi) = 2\,\mathrm{Re}\{(8\,\bar{\zeta}\,\bar{z}\,\zeta + 6\,\bar{\eta}\,z^2)\,f + (4\,\bar{z}^4\,r_1 + 4\,\bar{z}\,\zeta^2\,\eta\,r_3 + 12\,\bar{\eta}\,\bar{z}\,z^2 +$$
$$8\,\bar{\zeta}^2\,z + 16\,\bar{\zeta}\,\bar{z}\,\zeta)\,g + (16\,\bar{\zeta}\,\bar{z}^3\,z\,r_2 + 8\,\bar{\zeta}\,\zeta^2\,\eta\,z\,r_3 + 16\,\bar{\zeta}\,\eta^3\,z\,r_4 + 2\,\bar{z}^5\,s_4 + 2\,\bar{z}^4\,\zeta\,s_6 +$$
$$4\,\bar{z}^4\,\eta\,s_7 + 2\,\bar{z}^4\,z\,s_3 + 10\,\bar{z}\,\eta^4\,s_8 + 24\,\bar{\zeta}^2\,cz^2\,z + 24\,\bar{\zeta}\,\bar{z}^3\,\zeta + 18\,\bar{\eta}\,\bar{z}^2\,z^2)\,h\}.$$

Отметим, что выражение $L(\phi) = L_1(\phi) + L_2(\phi) + L_3(\phi)$ линейно по ϕ и не зависит от μ.

Пусть V_5 - линейное пространство, состоящее из ростков формальных степенных рядов в начале координат вида

$$\Phi = \phi_5 + \phi_6 + \ldots = (f_4 + f_5 + \ldots, g_3 + g_4 + \ldots, h_2 + h_3 + \ldots, e_5 + e_6 + \ldots)$$

Тогда, в соответствии с теоремой 1, размерность семейства отображений Γ на $\tilde{\Gamma}$ из $\mathcal{V}_5$ не превосходит размерности ядра L на V_5.

Перейдем к оценке размерности ядра оператора L, т.е. пространства решений соотношения

$$L(\phi) = 0, \quad \text{где } \phi \in V_5 \tag{6}$$

Обозначим

$$f(0,0,0,u) = a(u),\ g(0,0,0,u) = b(u),\ h(0,0,0,u) = c(u),\ e(0,0,0,u) = d(u).$$

Положим в (6) $\bar z = \bar\zeta = \bar\eta = 0$, получим соотношение, из которого сразу находим

$$e(z,\zeta,\eta,u) = \qquad (7)$$
$$d(u) + 2\,i\,z\,\bar a(u) + 2\,i\,z^2\,\bar b(u) + 2\,i\,z^3\,\bar c(u) + 4\,i\,z^4\,(\bar r_2\,\bar c(u) + \bar r_1 \bar b(u)) + 2\,i\,\bar s_4\,z^5\,\bar c(u),$$

причем $d(u)$ – вещественна.

Обозначим

$$\begin{gathered} f'_z(0,0,0,u) = k_1(u),\ g'_z(0,0,0,u) = k_2(u),\ h'_z(0,0,0,u) = k_3(u), \\ f'_\zeta(0,0,0,u) = m_1(u),\ g'_\zeta(0,0,0,u) = m_2(u),\ h'_\zeta(0,0,0,u) = m_3(u), \\ f'_\eta(0,0,0,u) = n_1(u),\ g'_\eta(0,0,0,u) = n_2(u),\ h'_\eta(0,0,0,u) = n_3(u). \end{gathered}$$

Подставляем полученное значение e в L (обозначение L сохраняем). Подставим $\bar z = \bar\zeta = \bar\eta = 0$ в $L_{\bar z},\ L_{\bar\zeta},\ L_{\bar\eta}$, получаем

$$(8)$$
$$\begin{aligned} 2\,z^2\,\bar k_2(u) + 2\,z^3\,\bar k_3(u) + 10\,\eta^4\,s_8\,h(z,\zeta,\eta,u) + 24\,\bar c(u)\,\zeta^2\,z^2 + \\ 2\,z^5\,\bar s_4\,\bar k_3(u) + 8\,h(z,\zeta,\eta,u)\,\eta^3\,\bar r_4 + 4\,z^4\,\bar r_2\,\bar k_3(u) + 2\,\bar c(u)\,z^4\,\bar s_3 + \\ 4\,z^4\,\bar r_1\,\bar k_2(u) - 2\,a(u) + 2\,z\,\bar k_1(u) + 8\,\zeta^2\,\bar b(u) + 4\,\zeta\,\bar a(u) - \\ 2\,d'(u)\,z + 2\,f(z,\zeta,\eta,u) + 12\,\zeta\,z^2\,\bar c(u) - 4\,i\,z^2\,a'(u) - \\ (4\,i)\,z^4\,\bar c'(u) - 4\,i\,z^3\,\bar b'(u) + 4\,h(z,\zeta,\eta,u)\,\zeta^2\,\eta\,r_3 + 16\,\bar c(u)\,\zeta\,z^3\,\bar r_2 - \\ 8\,i\,z^5\,\bar r_2\,\bar c'(u) - 8\,i\,\bar r_1\,z^5\,\bar b'(u) - 4\,i\,\bar s_4\,z^6\,\bar c'(u) + 4\,\zeta^2\,\eta\,r_3\,g(z,\zeta,\eta,u) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16\,h(z,\zeta,\eta,u)\,\eta^3\,z\,r_4 - 4\,i\,z^5\,\bar c'(u) - 2\,i\,z^7\,\bar s_4\,c'(u) - 4\,i\,z^6\,\bar r_1\,\bar b'(u) + \\ 2\,z^2\,\bar m_2(u) + 2\,z^3\,\bar m_3(u) + 2\,z\,\bar m_1(u) - 2\,z^2\,e'(u) + \\ 4\,z\,f(z,\zeta,\eta,u) + 8\,h(z,\zeta,\eta,u)\,\zeta^2\,\eta\,z\,r_3 + 2\,\bar c(u)\,z^4\,\bar s_6 + 24\,\bar c(u)\,\zeta\,z^3 - \\ 4\,i\,z^4\,\bar b'(u) - 4\,i\,z^3\,a'(u) - 8\,i\,z^6\,\bar r_2\,\bar c'(u) + 4\,z^4\,\bar r_2\,\bar m_3(u) + 2\,z^5\,\bar s_4\,\bar m_3(u) + \\ 8\,\zeta\,z\,\bar a(u) + 16\,\zeta\,z\,\bar b(u) + 4\,z^4\,\bar r_1\,\bar m_2(u) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\,z^4\,\bar r_1\,\bar n_2(u) + 4\,z^4\,\bar s_7\,\bar c(u) + 2\,z^5\,\bar s_4\,\bar n_3(u) + 6\,z^2\,f(z,\zeta,\eta,u) + \\ 4\,z^4\,\bar r_2\,\bar n_3(u) - 4\,i\,z^5\,\bar b'(u) - 4\,i\,z^4\,a'(u) - 4\,i\,z^7\,\bar r_2\,\bar c(u) - \\ 2\,z^3\,e'(u) - 4\,i\,z^7\,\bar r_1\,\bar b'(u) - 2\,i\,z^8\,\bar s_4\,\bar c'(u) - 4\,i\,z^6\,\bar c'(u) + \\ 2\,z\,\bar n_1(u) + 2\,z^2\,\bar n_2(u) + 2\,z^3\,\bar n_3(u) = 0. \end{aligned}$$

Из третьего соотношения (8) следует, что $n_1(u)=0$ и что

$$3\,f(z,\zeta,\eta,u) = -\bar n_2(u) + z\,(e'(u)-\bar n_3(u)) + \\ 2\,z^2\,(-\bar r_1\,\bar n_2(u) - \bar s_7\,\bar c(u) - \bar r_2\,\bar n_3(u) + i\,\bar a'(u)) + \\ z^3\,(2\,i\,\bar b'(u) - \bar s_4\,\bar n_3(u)) + 2\,i\,z^4\,\bar c'(u) \\ +2\,i\,z^5\,(\bar r_2\,\bar c'(u) + \bar r_1\,\bar b'(u)) + i\,z^6\,\bar s_4\,\bar c'(u). \tag{9}$$

Подставляя полученное значение f в первое и второе из соотношений (8) и выделяя старшую компоненту по η, получаем, что

$$2\,r_3\,\zeta^2\,g(z,\zeta,\eta,u) + (2\,r_3\,\zeta^2 + 5\,s_8\,\eta^2)\,h(z,\zeta,\eta,u) = 0, \\ (r_3\,\zeta^2 + 2\,r_4\,\eta^2)\,h(z,\zeta,\eta,u) = 0. \tag{10}$$

Оставшиеся после выполнения (10) условия, обеспечивающие выполнение (8), сводятся к следующей системе соотношений

$$a = b = c = n_1 = n_2 = k_3 = 0, \tag{11}$$
$$d' = -2\,\mathrm{Re}\,n_3, \quad k_2 = \frac{2}{3}\,r_2\,n_3, \quad m_2 = \frac{1}{3}\,(n_3 - \bar n_3), \quad m_3 = \frac{4}{3}\,r_2\,n_3,$$
$$r_1\,r_2\,n_3 = 0, \quad s_4\,n_3 = 0, \quad (r_1 - s_4 + 4\,r_2^2)\,n_3 = r_1\,\bar n_3.$$

Отметим, что при этом

$$e(z,\zeta,\eta,u) = d(u), \quad f(z,\zeta,\eta,u) = \frac{d'(u) - \bar n_3(u)}{3}\,z - \frac{2}{3}\,\bar r_2\,\bar n_3(u)\,z^2 - \frac{\bar s_4\,\bar n_3(u)}{3}\,z^4.$$

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: Пусть $r_3 \neq 0$, тогда из (10) сразу следует, что $g = h = 0$. Оставшиеся соотношения позволяют заключить, что $f = 0$ и что d - это вещественная константа. Итак, в этом случае $\mathrm{Ker}\,L = V^0 = \{(0,0,0,d_0)\}$, причём $d_0 \in \mathbf{R}$.

Случай 2: Пусть $r_3 = 0$. Пусть $(r_4, s_8) \neq 0$, (*случай 2.1*), тогда из (10) следует, что $h = 0$. Возвращаясь к соотношениям (8), получаем $n_3 = n_2 = d' = 0$. Откуда $f = 0$, а e - вещественная константа. Обозначим $g''_{zz}(0,0,0,u)$ через $k_{22}(u)$. Вычисляя теперь $L''_{\bar z\bar z}$ при $\bar z = \bar\zeta = \bar\eta = 0$, получаем

$$g(z,\zeta,\eta,u) = 2\,i\,z^5\,\bar r_1\,\bar k_2'(u) - z^4\,\bar r_1\,\bar k_{22}(u) + i\,z^3\,\bar k_2'(u) - (1/2)z^2\,\bar k_{22}(u) - 4\,\zeta^2\,\bar k_2(u).$$

Подставляя это значение g в L и приравнивая к нулю коэффциенты при $z^2\,\bar\zeta^2$ и $z^2\,\bar z\,|\zeta|^2$, получаем, что $k_2 = k_{22} = 0$, т.е. $g = 0$. Т.е. $\mathrm{Ker}\,L = V^0$.

Пусть $r_4 = s_8 = 0$, (*случай 2.2*). Обозначим

$$h''_{zz}(0,0,0,u) = k_{32}(u),\ h'''_{zzz}(0,0,0,u) = k_{33}(u).$$

Вычисляя $L''_{\bar z\bar z}$ при $\bar z = \bar\zeta = \bar\eta = 0$, как и ранее, получаем выражение для g, вычисляя $L'''_{\bar z\bar z\bar z}$ при $\bar z = \bar\zeta = \bar\eta = 0$, получаем выражение для h. После чего анализ младших коэффициентов L даёт $n_3 = d' = k_2 = k_{22} = k_{32} = k_{33} = 0$, откуда получаем $f = g = h = 0$, e - вещественная константа. Т.е. $\operatorname{Ker} L = V^0$.

Таким образом нами доказана следующая лемма.

Лемма 4: Если $L(\phi) = 0$, то $\phi = (0,0,0,d_0)$, где d_0 - вещественная постоянная. В частности, на пространстве V_5 ядро тривиально.

Выясним, как устроены младшие струи отображения Γ на $\tilde\Gamma$, сохраняющего ноль на месте. Выделяя компоненты (4) веса один и два, сразу получаем, что

$$e_1 = 0, \quad e_2 = |\lambda|^2\, w, \quad f_1 = \lambda\, z, \quad \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

Пусть, далее,

$$e_3 = |\lambda|^2\,(d_3 + d_1\, w), \quad f_2 = \lambda\,(a\, w + a_2), \quad g_1 = b_1,$$

где d_3, d_1, a_2, b_1 - однородные голоморфные формы от (z,ζ,η) соответствующих степеней, a - постоянная. Третья весовая компонента (4) имеет вид

$$|\lambda|^2\, \mathrm{Im}[i\, 2\, \mathrm{Re}(z^2\,\bar\zeta + d_1(z,\zeta,\eta)\,(u + i\,|z|^2))] =$$
$$|\lambda|^2\, 2\,\mathrm{Re}[(a\,(u + i\,|z|^2) + a_2(z,\zeta,\eta))\,\bar z] + 2\,\mathrm{Re}[\lambda^2\, z^2\, \bar b_1(\bar z,\bar\zeta,\bar\eta)].$$

Выделяя члены, линейные по u, получаем $d_1 = 2\,i\,\bar a\, z$. Теперь среди членов бистепени$(2,1)$ выпишем по отдельности компоненты, линейные по $\bar z$, по $\bar\zeta$ и по $\bar\eta$. Получим

$$a_2(z,\zeta,\eta) = (2\,i\,\bar a - \frac{\lambda}{\bar\lambda}\,\bar b_1^1)\, z^2, \quad b_1^2 = \frac{\lambda}{\bar\lambda}, \quad b_1^3 = 0,$$

где $b_1 = b_1^1\, z + b_1^2\,\zeta + b_1^3\,\eta$. Здесь и далее верхними индексами указываем на связь коэффициентов и переменных. Пусть $b_1^1 = \alpha\,\lambda/\bar\lambda$, получаем

$$e_3 = 2\,i\,|\lambda|^2\,\bar a\, z\, w, \quad f_2 = \lambda\,(a\, w + (2\,i\,\bar a - \bar\alpha)\, z^2), \quad g_1 = \frac{\lambda}{\bar\lambda}(\alpha\, z + \zeta).$$

Пусть, далее,

$$e_4 = |\lambda|^2\,(d_4 + d_2\,w + d_0\,w^2), \quad f_3 = \lambda\,(a_3 + a_1\,w),$$
$$g_2 = \frac{\lambda}{\bar\lambda}(b_2 + b_0\,w), \quad h_1 = \frac{\lambda}{\bar\lambda^2}\,c_1,$$

где коэффициенты – это голоморфные однородные формы от (z,ζ,η) соответствующих степеней. Выпишем компоненту (4) веса четыре (общий множитель $|\lambda|^2$ убираем).

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}[d_4(z,\zeta,\eta) + d_2(z,\zeta,\eta)\,(u + i\,|z|^2) + d_0\,(u^2 + 2\,i\,|z|^2\,u - |z|^4) + \\ -2\,\bar a\,z\,(z^2\,\bar\zeta + \bar z^2\,\zeta) +\ i\,(z^3\,\bar\eta + \bar z^3\,\eta) + 4\,|z|^2\,|\zeta|^2)] = \\ 2\operatorname{Re}[(a_3(z,\zeta,\eta) + a_1(z,\zeta,\eta)\,(u + i\,|z|^2))\,\bar z] + \\ |a|^2\,(u^2 + |z|^4) - 2\operatorname{Re}[(a\,(u + i\,|z|^2)\,(2\,i\,a + \alpha)\,\bar z^2)] + |2\,i\ a + \alpha|^2\,|z|^4 + \\ 2\operatorname{Re}[a\,(2\,i\operatorname{Re}(z^2\,\bar\zeta))] + 2\operatorname{Re}[2\,(a\,(u + i\,|z|^2) + (2\,i\,\bar a - \bar\alpha)\,z^2)\,z\,(\bar\alpha\,\bar z + \bar\zeta)] + \\ 2\operatorname{Re}[(b_2(z,\zeta,\eta) + b_0\,(u + i\,|z|^2))\,\bar z^2] + 2\operatorname{Re}[c_1(z,\zeta,\eta)\,\bar z^3] + 4\,|z|^2\,|\alpha\,z + \zeta|^2.\end{gathered} \tag{12}$$

Отделяя в (12) коэффициент при u^2, получаем $\operatorname{Im} d_0 = |a|^2$. Положим $d_0 = \gamma + i\,|a|^2$. Отделяя в (12) коэффициент при u, получаем

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}[d_2(z,\zeta,\eta)] + |a|^2\,|z|^2 = 2\operatorname{Re}[a_1(z,\zeta,\eta)\,\bar z] - \\ 2\operatorname{Re}[a\,(2\,i\,a + \alpha)\,\bar z^2] + 2\operatorname{Re}[a\,z\,(\bar\alpha\,\bar z + \bar\zeta)] + 2\operatorname{Re}[b_0\,\bar z^2]\end{gathered}$$

Откуда получаем

$$\begin{gathered}d_2 = (2\,i\,\bar a^2 - \bar a\,\bar\alpha + \bar\beta)\,z^2, \\ a_1 = ((|a|^2 - 2\operatorname{Re}(a\,\bar\alpha)) + i\,\delta)\,z + \bar a\,\zeta,\end{gathered}$$

где $\beta = b_0$, $\delta = \operatorname{Im} a_1^1$. Компонента бистепени $(4,0)$ сразу дает $d_4 = 0$. В бистепени $(3,1)$ получаем

$$\begin{gathered}i\,d_2(z,\zeta,\eta)\,|z|^2 - \bar a\,z^3\,\bar\zeta + z^3\,\bar\zeta = a_3(z,\zeta,\eta)\,\bar z + \\ i\,\bar a\,(-2\,i\,\bar a + \bar\alpha)z^3\,\bar z - i\,\bar\beta\,z^3\,\bar z + z^3\,\overline{c_1(z,\zeta,\eta)}.\end{gathered}$$

Откуда получаем

$$\begin{gathered}a_3 = (-4\,\bar a^2 - 2\,i\,\bar a\bar\alpha + 2\,\bar\beta - \bar\nu)\,z^3, \\ c_1 = \nu\,z - a\,\zeta + \eta,\end{gathered}$$

где $\nu = c_1^1$. В бистепени $(2,2)$ имеем

$$2\,\mathrm{Re}[-i\,\bar{a}z\,\zeta\,\bar{z}^2 + i\,a_1\,z\,\bar{z}^2 + 2\,i\,a\,z^2\,\bar{z}\,(\bar{\alpha}\,\bar{z} + \bar{\zeta}) + b_2\,\bar{z}^2 + 4\,\alpha\,z^2\,\bar{z}\,\bar{\zeta}] + \\ (|a|^2 + 4\,|\alpha|^2 + |2\,i\,a + \alpha|^2)\,|z|^4 = 0.$$

Откуда получаем

$$b_2 = (\delta - 2\,|\alpha|^2 - \frac{|a|^2}{2} - \frac{1}{2}\,|2\,i\,a + \alpha|^2 - 2\,\mathrm{Re}(i\,a\,\bar{\alpha} + i\,\kappa))\,z^2 + (i\,a + 2\alpha)\,z\,\zeta, \\ c_1 = \nu\,z - a\,\zeta + \eta,$$

где $\kappa = \mathrm{Im}\,b_2^{11}$.

Итак, нами доказана следующая лемма.

Лемма 5:(a) Всякое локально обратимое отображение Γ на $\tilde{\Gamma}$, сохраняющее начало координат, представимо в виде композиции отображения вида

$$\begin{aligned} z &\to \lambda\,(z + a\,w + (2\,i\,\bar{a} - \bar{\alpha})\,z^2 + (-4\,\bar{a}^2 + 2\,i\,\bar{a}\,\bar{\alpha} + 2\,\bar{\beta} - \bar{\nu})\,z^3 + \\ &\qquad ((|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\,a\,\bar{\alpha}) + i\,\delta)\,z + \bar{a}\,\zeta)\,w), \\ \zeta &\to \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\,(\zeta + \alpha\,z + \tau\,z^2 + (i\,a + 2\alpha)\,z\,\zeta + \beta\,w), \\ \eta &\to \frac{\lambda}{\bar{\lambda}^2}\,(\eta + \nu\,z - a\,\zeta), \\ w &\to |\lambda|^2\,(w + 2\,i\,\bar{a}\,z\,w + (2\,i\,\bar{a}^2 - \bar{a}\,\bar{\alpha} + \bar{\beta})\,z^2\,w + (\gamma + i\,|a|^2)\,w^2), \\ &\text{где} \quad \tau = (\delta - 2\,|\alpha|^2 - \frac{|a|^2}{2} - \frac{1}{2}\,|2\,i\,a + \alpha|^2 - 2\,\mathrm{Re}(i\,a\,\bar{\alpha} + i\,\kappa)) \end{aligned}$$

и отображения

$$z \to z + O(4),\ \zeta \to \zeta + O(3),\ \eta \to \eta + O(2),\ w \to w + O(5).$$

(b) Причём

$$\lambda \in \mathbf{C}^*, \quad a,\ \alpha,\ \beta,\ \nu \in \mathbf{C}, \quad \gamma,\ \delta,\ \kappa \in \mathbf{R}.$$

Что дает 13 вещественных параметров.

(c) Такое отображение однозначно определяется заданием 3-струи в начале координат.

Теперь мы готовы доказать следующее утверждение.

Утверждение 6: Если Γ – вещественно аналитическая гиперповерхность пространства $\mathbf{C}^4$, которая в точке общего положения является 3-невырожденной, то размерность группы локальных голоморфных автоморфизмов *в любой точке* не превосходит 20.
Доказательство: Размерность группы в призвольной точке не превосходит суммы размерности гиперповерхности и размерности стабилизатора в точке общего положения. Размерность гиперповерхности равна 7. Размерность стабилизатора, в силу теоремы 1 и лемм 2,3,4 и 5 не превосходит 13. Поскольку $7 + 13 = 20$, утверждение доказано.

Общие 2-невырожденные гиперповерхности

Обозначим координаты в $\mathbf{C}^4$ через $(z = (z_1, z_2), \zeta, w = u + i\,v)$ и перейдем к рассмотрению *2-невырожденного* случая.Так же как и выше, мы можем ограничиться "жесткими" гиперповерхностями. Пусть Γ – равномерно 2-невырождена в окрестности $\xi \in \Gamma$. Форма Леви равномерно 2-невырожденной гиперповерхности повсюду имеет имеет минимальное вырождение, а именно, ее ранг ранг равен 2. Таким образом мы можем записать локальное уравнение Γ в виде

$$v =< z, \bar z > + F_3(z, \bar z, \zeta, \bar\zeta) + F_4(z, \bar z, \zeta, \bar\zeta) + \dots \tag{13}$$

где F_j – однородный вещественный полином степени j, а $< z, \bar z >$ – невырожденная эрмитова форма от переменного $z \in \mathbf{C}^2$. Простыми треугольно-полиномиальными заменами переменных z и w можно добиться того, что правая часть уравнения Γ

$$F =< z, \bar z > + F_3 + F_4 + \dots$$

не будет содержать плюригармонических слагаемых (т.е. слагаемых бистепеней $(m, 0)$ и $(0, m)$) и слагаемых, линейно зависящих от z и $\bar z$, за исключением формы $< z, \bar z >$. Выпишем слагаемые, которые после этого останутся в F_3 и F_4. Имеем

$$F_3 = 2\,\mathrm{Re}(K(z, z)\,\bar\zeta + A_1(z)\,|\zeta|^2 + A_2\,\zeta^2\,\bar\zeta), \tag{14}$$
$$F_4 = 2\,\mathrm{Re}((P(z, z, \bar z) + Q(z, z, z))\,\bar\zeta + R(z, z)\bar\zeta^2) + S(z, \bar z)|\zeta|^2 + T(z, z, \bar z, \bar z) +$$
$$2\,\mathrm{Re}(B_1(z, z)\,|\zeta|^2 + B_2(z)\,\zeta^2\,\bar\zeta + B_3(z)\,\zeta\,\bar\zeta^2).$$

Отметим, что из условия 2-невырожденности Γ следует, что форма $K(z,z)$ не равна нулю тождественно. Для дальнейших вычислений нам потребуется приведение пары форм $(< z, \bar{z} >, K(z,z))$ на $\mathbf{C}^2$ комплексно линейными заменами к виду, содержащему минимум параметров. Имеет место следующая классификация.

Лемма 7: Пусть $< z, \bar{z} >$ невырождена, а $K(z,z)$ отлична от тождественного нуля, тогда невырожденным комплексно линейным преобразованием можно привести эту пару к одной из следующего списка:

$$(1.)\quad (|z_1|^2 + |z_2|^2,\ k\,z_1^2 + m\,z_2^2), \quad k,\, m > 0,\ k \neq m,$$
$$(2.)\quad (|z_1|^2 + |z_2|^2,\ k\,(z_1^2 + z_2^2)), \quad k > 0,$$
$$(3.)\quad (|z_1|^2 + |z_2|^2,\ k\,z_1^2), \quad k > 0,$$
$$(4.)\quad (|z_1|^2 - |z_2|^2,\ k\,z_1^2 + m\,z_2^2), \quad k,\, m > 0,\ k \neq m,$$
$$(5.)\quad (|z_1|^2 - |z_2|^2,\ k\,(z_1^2 + z_2^2)), \quad k > 0,$$
$$(6.)\quad (|z_1|^2 - |z_2|^2,\ k\,z_1^2), \quad k > 0,$$
$$(7.)\quad (2\,\mathrm{Re}\,(z_1\,\bar{z}_2),\ z_1^2 + m\,z_2^2), \quad m \notin \mathbf{R},$$
$$(8.)\quad (2\,\mathrm{Re}\,(z_1\,\bar{z}_2),\ z_1^2 + m\,z_2^2), \quad m \in \mathbf{R}^*,$$
$$(9.)\quad (2\,\mathrm{Re}\,(z_1\,\bar{z}_2),\ z_1^2).$$

Доказательство: Пусть $< z, \bar{z} >$ положительно определена и ν – собственный вектор оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} k & l \\ l & m \end{bmatrix}.$$

Выбирая в качестве первого вектора нового базиса вектор

$$\frac{\nu}{\sqrt{< \nu, \bar{\nu} >}}$$

и, подбирая второй из условия ортонормированности, получаем в зависимости от ранга K пары (1.), (2.) и (3.). Положительности параметров k и m можно добиться поворотами в плоскостях z_1 и z_2.
Пусть $< z, \bar{z} >$ – имеет сигнатуру $(1,1)$. Если оператор имеет собственный вектор ν, т.ч. $< \nu, \bar{\nu} > \neq 0$, то годится то же самое рассуждение и

это дает пары (4.), (5.) и (6.).
Пусть (e_1, e_2) – базис $\mathbf{C}^2$, в котором $K(z,z)$ – диагональна, т.е. $K(z,z) = k\, z_1^2 + m\, z_2^2$ причем $< e_1, \bar{e}_1 >=< e_2, \bar{e}_2 >= 0$. Тогда если $z = z_1\, e_1 + z_2\, e_2$, то

$$< z, \bar{z} >= 2\,\mathrm{Re}(< e_1, \bar{e}_2 > \; z_1\, \bar{z}_2).$$

После растяжения по z_1 эрмитова форма принимает вид $< z, \bar{z} >= 2\,\mathrm{Re}(z_1\, \bar{z}_2)$. Используя преобразование

$$z_1 \to \lambda\, z_1, \quad z_2 \to \frac{z_2}{\bar{\lambda}}, \quad \lambda \in \mathbf{C}^*,$$

которое не меняет эрмитовой формы получаем пары (7.), (8.) и (9.). Лемма доказана.

Лемма 8: Если форма Леви гиперповерхности Γ, заданной уравнением (13), тождественно вырождена, то F_3 и F_4 можно записать в виде (14), причем $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = B_3 = 0$, а форма S в зависимости от номера пары из леммы 2 имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}(1.)\; S = 4\,(k^2\,|z_1|^2 + m^2\,|z_2|^2),\; (2.)\; S = 4\,k^2\,(|z_1|^2 + |z_2|^2),\; (3.)\; S = 4\,k^2\,|z_1|^2,\\ (4.)\; S = 4\,(k^2\,|z_1|^2 - m^2\,|z_2|^2),\; (5.)\; S = 4\,k^2\,(|z_1|^2 - |z_2|^2),\; (6.)\; S = 4\,k^2\,|z_1|^2,\\ (7.)\; S = 4\,(\bar{m}\,z_1\,\bar{z}_2 + m\,z_2\,\bar{z}_1),\; (8.)\; S = 4\,m\,(z_1\,\bar{z}_2 + z_2\,\bar{z}_1),\; (9.)\; S = 0.\end{gathered}$$

Доказательство: Вычисляя определитель матрицы комплексного гессиана по переменным (z_1, z_2, ζ) и отделяя в нем компоненты степени один, получаем, что $A_1 = A_2 = 0$. Отделяя, далее, компоненты степени два, получаем, что $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ и указанный вид формы S. Лемма доказана.

Теперь можем написать

$$\begin{aligned} F_3 &= 2\,\mathrm{Re}[K(z,z)\,\bar{\zeta}],\\ F_4 &= 2\,\mathrm{Re}[(P(z,z,\bar{z}) + Q(z,z,z))\,\bar{\zeta} + R(z,z)\bar{\zeta}^2] + S(z,\bar{z})|\zeta|^2 + T(z,z,\bar{z},\bar{z}).\end{aligned}$$

т.е. уравнение гиперповерхности имеет вид

$$\begin{gathered} v =< z, \bar{z} > + 2\,\mathrm{Re}[K(z,z)\,\bar{\zeta}] + \\ 2\,\mathrm{Re}[(P(z,z,\bar{z}) + Q(z,z,z))\,\bar{\zeta} + R(z,z)\bar{\zeta}^2] + S(z,\bar{z})|\zeta|^2 + T(z,z,\bar{z},\bar{z}) + O(5). \quad (15)\end{gathered}$$

Введем в пространстве степенных рядов от $(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}, u)$, а также от $(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}, w, \bar{w})$, градуировку, назначая веса переменным

$$[z] = [\bar{z}] = [\zeta] = [\bar{\zeta}] = 1, \ [w] = [\bar{w}] = [u] = 2.$$

Пусть Γ и $\tilde{\Gamma}$ – гиперповерхности, заданные уравнениями

$$\begin{gathered} v =< z, \bar{z} > +2\,\mathrm{Re}\,(K(z,z)\,\bar{\zeta}) + O(4), \\ v =< z, \bar{z} > +2\,\mathrm{Re}\,(\tilde{K}(z,z)\,\bar{\zeta}) + O(4) \end{gathered} \tag{16}$$

и

$$\phi = (\ z \to f = f_1 + f_2 + O(3), \ \zeta \to g = g_1 + O(2), \ w \to h = h_1 + h_2 + h_3 + O(4)\ )$$

– локально обратимое голоморфное отображение первой на вторую, оставляющее начало координат на месте. Причем компоненты координат отображения – это компоненты фиксированного веса и $O(j)$ – это сумма слагаемых веса не ниже j.

То, что это отображение переводит Γ в $\tilde{\Gamma}$, аналитически можно записать в виде следующего соотношения

$$\begin{gathered} \Theta = -2\,\mathrm{Im}\,h + 2\ < f, \bar{f} > +4\,\mathrm{Re}\,(\tilde{K}(f,f)\,\bar{g}) + \tilde{F}_4 + \ldots \\ \text{при } w = u + i\,(< z, \bar{z} > +2\,\mathrm{Re}\,(K(z,z)\,\bar{\zeta}) + F_4 + O(5)). \end{gathered} \tag{17}$$

Отделяя в этом соотношении компоненту веса 1, получаем $h_1 = A(z) + B\,\zeta = 0$.
Пусть $h_2 = \Phi_2(z,\zeta) + \rho\,w$, $f_1 = C\,z + d\,\zeta$, где Φ_2 – форма степени два от (z,ζ). Отделяя в (17) компоненту веса 2, получаем $\Phi_2(z,\zeta) = 0$, $< C\,z, \overline{C\,z} >= \rho\ < z, \bar{z} >$. Т.е. $f_1 = C\,z$, $h_2 = \rho\,w$. Отметим, что в силу обратимости отображения матрица C – невырождена и $\rho \neq 0$.
Пусть, далее,

$$h_3 = \rho(\Phi_3 + (A(z) + B\,\zeta)\,w), \quad f_2 = C(a\,w + b(z,z) + c(z)\,\zeta + d\,\zeta^2), \quad g_1 =< z, \bar{\alpha} > +\beta\,\zeta,$$

где Φ_3 – форма степени три от (z,ζ). Тогда, отделяя в (17) компоненту веса 3, получаем

$$h_3 = 2\,i\,\rho\ < z, \bar{a} >\ w, \quad f_2 = C(aw + 2\,i\ < z, \bar{a} >\ z - K(z,z)\,\mu), \quad g_1 =< z, \bar{\alpha} > +\beta\,\zeta,$$

причем в силу обратимости отображения $\beta \neq 0$.

Из наших вычислений видно, что при определении весовой j-струи удобно принять следующую точку зрения.

$$\phi = \sum \phi_j, \quad \phi_j = (f_{j-1},\, g_{j-2},\, h_j)$$

Т.е. весовая j-струя отображения понимается как набор струй координат, где у h берем j-ю весовую струю, у f – $(j-1)$-ю, у g берем $(j-2)$-ю. Проведенное выше вычисление дает описание действия голоморфных отображений на 3-струю уравнения гиперповерхности вида (16).

Лемма 9:
(a) На совокупности весовых 3-струй 2-невырожденных гиперповерхностей вида (16) псевдогруппа локально обратимых голоморфных отображений, сохраняющих начало координат, действует следующим образом:

$$\begin{aligned} z \to C(z + aw + 2\,i\, < z, \bar{a} > \, z - K(z,z)\,\alpha) + O(3), \\ \zeta \to < z, \bar{\alpha} > + \beta\zeta + O(2), \\ w \to \rho\,(w + 2\,i\, < z, \bar{a} > \, w) + O(4), \end{aligned}$$

причем $C \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$, $\rho \in \mathbf{R}^*$, a, $\alpha \in \mathbf{C}^2$, $\beta \in \mathbf{C}^*$, а также

$$< z, \bar{z} > = \rho < C^{-1}z, \overline{C^{-1}z} >, \quad \tilde{K}(z,z) = \frac{\rho}{\beta} K(C^{-1}\,z, C^{-1}\,z) \tag{18}$$

(b) Любое обратимое голоморфное отображение Γ на $\tilde{\Gamma}$, сохраняющее начало координат, с точностью до этого действия имеет вид

$$z \to z + O(3), \quad \zeta \to \zeta + O(2), \quad w \to w + O(4). \tag{19}$$

Пусть речь идет об отображении гиперповерхности Γ на себя. Тогда рассмотрим подгруппу группы автоморфизмов Γ, состоящую из линейных автоморфизмов вида

$$\begin{gathered} G_0 = \{(z \to C\,z,\ \zeta \to \beta\,\zeta,\ w \to \rho\,w)\} \text{ с условием} \\ < C\,z, \overline{C\,z} > = \rho < z, \bar{z} >, \quad K(C\,z, C\,z) = \frac{\rho}{\beta} K(z,z). \end{gathered} \tag{20}$$

Вычислим размерность этой группы для каждой из шести пар форм, перечисленных в лемме 8.

Лемма 10: Пусть G_0^j – это группа G_0 для j-й пары из списка леммы 8. Тогда

$$\dim G_0^1 = 2,\ \dim G_0^2 = 3,\ \dim G_0^3 = 3,\ \dim G_0^4 = 2,\ \dim G_0^5 = 3,$$
$$\dim G_0^6 = 3, \dim G_0^7 = 3,\ \dim G_0^8 = 3,\ \dim G_0^9 = 3,$$

т.е. в любом случае $\dim G_0 \leq 3$.

Доказательство: Пары (1.),(2.),(3.). $< z, \bar{z} >= |z_1|^2 + |z_1|^2$, тогда $C = \lambda U,\ \rho = |\lambda|^2$, где $U \in SU(2)$, а $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Записывая U в виде

$$\begin{bmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{bmatrix}, \qquad \text{где } |p|^2 + |q|^2 = 1.$$

и подставляя это во второе соотношение, получаем, что

$$(k\, p^2 + m\, \bar{q}^2,\ -4\, i\, \mathrm{Im}\, p\, q,\ k\, q^2 + m\, \bar{p}^2) = \frac{|\lambda|^2}{\bar{\beta}}\, (k, 0, m).$$

Откуда $\mathrm{Im}\, p\, q = 0$, т.е. $q = \sigma\, \bar{p}$, где σ вещественно, при этом $|p|^2\, (1 + \sigma^2) = 1$. Пусть $p = \exp(i\, \phi)/\sqrt{1 + \sigma^2}$, тогда имеем

$$\exp(4\, i\, \phi) = \frac{k\, \sigma^2 + m}{k + m\, \sigma^2}\, \frac{k}{m}.$$

Откуда следует, что для U из малой окрестности единицы $\phi = 0$. Далее имеем: либо $k = m$, либо $\sigma = 0$. Так же получаем ответ для третьей пары. Для пары (1.) свободный параметр – это λ, для (2.) – (λ, σ), для (3.) – (λ, ϕ).

Пары (4.),(5.),(6.) Рассматриваются вполне аналогично с учетом того, что U - псевдоунитарная матрица вида

$$\begin{bmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{bmatrix}, \qquad \text{где } |p|^2 - |q|^2 = 1.$$

Свободные параметры – те же.

Пары (7.),(8.),(9.). Для этой эрмитовой формы псевдоунитарная матрица с единичным определителем, близкая к единичной, имеет вид

$$\begin{bmatrix} p & i\, \sigma\, p \\ \frac{i\, r}{(1 + r\sigma)\, p} & \frac{1}{(1 + r\sigma)\, p} \end{bmatrix}, \qquad \text{где } r, \sigma \in \mathbf{R}, p > 0.$$

Откуда получаем значения размерностей. Для пары (7.) свободные параметры – это (λ, p), для (8.) – (λ, r), для (9.) – (λ, p). Лемма доказана.

Зафиксируем гиперповерхности Γ и $\tilde{\Gamma}$ вида (16) и дадим оценку числа параметров, от которых зависит отображение одной на другую вида (19) в соответствии со схемой рекурсии глубины $k = 2$ (теорема 1). С этой целью опишем вид μ-й компоненты соотношения (17). При этом явно выпишем слагаемые, зависящие от ϕ_μ и $\phi_{\mu-1}$, игнорируя члены, зависящие от ϕ_ν при $\nu \leq \mu - 2$. Пусть $f = (f^1, f^2)$. Введем также следующее обозначение: $\Delta\, \psi(u) = 2\, i\, \mathrm{Re}(K(z,z)\, \bar{\zeta})\, \psi'(u)$.

Лемма 11: μ-я весовая компонента выражения (17) Θ_μ имеет вид

$$\Theta_\mu = L_1(\phi_\mu) + L_2(\phi_{\mu-1}) + \theta_\mu(\phi_{\nu<\mu-1}), \qquad \text{причем}$$

$$L_1(\phi) = 2\,\mathrm{Re}(i\, h + 2 < f, \bar{z} > + 2\, \bar{K}(\bar{z}, \bar{z})\, g), \qquad L_2(\phi) = \Delta L_1(\phi) +$$

$$2\,\mathrm{Re}\{4\, K(f, z)\, \bar{\zeta} + 2\, (\bar{P}(\bar{z}, \bar{z}, z) + \ \bar{Q}(\bar{z}, \bar{z}, \bar{z}) + 2\, \bar{R}(\bar{z}, \bar{z})\, \zeta + S(z, \bar{z})\, \bar{\zeta})\, g\},$$

$$\text{где} \quad w = u + i\, < z, \bar{z} > .$$

(

Отметим, что выражение $L(\phi) = L_1(\phi) + L_2(\phi)$ линейно по ϕ и не зависит от μ. Пусть V_4 – линейное пространство, состоящее из ростков формальных степенных рядов в начале координат вида

$$\Phi = \phi_4 + \phi_5 + \ldots = (f_3 + f_4 + \ldots, g_2 + g_3 + \ldots, h_4 + h_5 + \ldots)$$

В соответствии с теоремой 1 число параметров, от которых может зависеть отображение вида (19) Γ на $\tilde{\Gamma}$ не превосходит размерности $\mathrm{Ker}\, L$ на пространстве V_4 . Это, вместе с оценкой числа параметров в 3-струе, даст общую оценку числа праpаметров, от которых может зависеть отображение и, в частности, оценку размерности группы локальных автоморфизмов гиперповерхности Γ. Таким образом, для получения оценки размерности автоморфизмов 2-невырожденной гиперповерхности нам осталось дать оценку размерности $\mathrm{Ker}\, L$ на V_4.

Оператор L содержит большое число произвольных постоянных. Для того, чтобы упростить работу по оценке размерности ядра применим к уравнению $L(f, g, h) = 0$ тот же самый прием, т.е. рекурсию на глубину два, но предварительно поменяв веса основных переменных. Зададим новые веса так:

$$[z] = [\bar z] = 2,\ [\zeta] = [\bar\zeta] = 1,\ [w] = [u] = 4.$$

Если теперь, используя новое весовое разложение $\phi = (f, g, h)$, положить $\phi_\mu = (f_{\mu-2}, g_{\mu-4}, h_\mu)$, то μ-я весовая компонента $L(\phi) = 0$ имеет вид

$$\begin{gathered} L_\mu = 2\,\mathrm{Re}[i\,h_\mu + i\,\Delta(h_{\mu-1})] + \\ 2\,\mathrm{Re}[2 < f_{\mu-2}, \bar z > +2 < \Delta(f_{\mu-3}), \bar z > +4\,K(f_{\mu-3}, z)\,\bar\zeta] + \\ 2\,\mathrm{Re}[2\,\bar K(\bar z, \bar z)\,g_{\mu-4} + 2\,\bar K(\bar z, \bar z)\,\Delta(g_{\mu-5}) + (2\,\bar R(\bar z, \bar z)\,\zeta + S(z, \bar z)\,\bar\zeta)\,g_{\mu-5} + \\ (2\,\bar P(\bar z, \bar z, z) + \bar Q(\bar z, \bar z, \bar z))\,g_{\mu-6}], \quad \text{где } w = u + i < z, \bar z >= 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Лемма 12: Размерность пространства решений (22) не превосходит размерности пространства решений $\mathcal{L}(f, g, h) = 0$, где

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(f, g, h) = 2\,\mathrm{Re}[i\,h + i\,\Delta(h)] + 2\,\mathrm{Re}[2 < f, \bar z > +2 < \Delta f, \bar z > +4\,K(f, z)\,\bar\zeta] + \\ 2\,\mathrm{Re}[2\,\bar K(\bar z, \bar z)\,g + 2\,\bar K(\bar z, \bar z)\,\Delta(g) + 2\,\bar R(\bar z, \bar z)\,\zeta\,g + S(z, \bar z)\,\bar\zeta\,g], \\ \text{где } w = u + i < z, \bar z >= 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Доказательство: Это сразу следует из теоремы 1.

Отметим при этом, что рекурсия, описанная оператором $\mathcal{L}$, стартует с $\mu = 5$. При этом нас интересует размерность ядра L на пространстве V_4 в старой весовой градуировке. Поэтому лемма 12 нуждается в небольшой коррекции. Пусть $\tilde V_5$ состоит из наборов (f, g, h), где $f = \tilde O(3),\ g = \tilde O(2),\ h = \tilde O(5)$ в соответствии с новым весом. Непосредственно убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 13: Если $\phi = (f, g, h) \in V_4 \cap \mathrm{Ker}\,\mathcal{L}$, то $\phi \in \tilde V_5$.
Доказательство: Если $\phi \in V_4$, то $\phi = \chi + \psi$, где $\psi \in \tilde V_5$, а $\chi = (0, 0, \gamma\,\zeta^4)$. Отделяя в соотношении $\mathcal{L}(\chi + \psi) = 0$ компоненту веса четыре, получаем $\mathcal{L}(\chi) = 0$. Откуда сразу следует, что $\chi = 0$.

Переходя к оценке размерности ядра оператора $\mathcal{L}$, отметим, что оператор зависит от параметров (k, m), ограничения на которые содержатся в лемме 5 (допустимые значения), и от трех коэффициентов квадратичной формы $R(z, z) = r_1\,z_1^2 + r_2\,z_1\,z_2 + r_3\,z_2^2$, которые не связаны никакими ограничениями. Также отметим, что независимо от значений параметров $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ содержит двумерное подпространство (тривиальные решения), которое, впрочем, не пересекается с $\tilde{V}_5$.

$$(f_1 = f_2 = g = 0, \quad h = t_1), \ t_1 \in \mathbf{R}, \tag{24}$$
$$(f_1 = t_2\, z_1, \ f_2 = t_2\, z_2, \ g = 0, \quad h = t_2^2\, w), \ t_2 \in \mathbf{R}.$$

Лемма 14: Пусть $\phi = (f, g, h) \in \phi \in \tilde{V}_5 \cap \operatorname{Ker}\mathcal{L}$.
(a) Если $(k = 1, m = 0)$ (пара номер 9 из леммы 8) и $R(z, z) = r_1\, z_1^2$, то

$$f_1 = i\,\bar{n}_1\, z_1^1, \quad f_2 = 2\, i\,\bar{n}_1\, z_1\, z_2 - \bar{n}_2\, z_1^2 + n_1\, w,$$
$$g = \frac{n_2\, z_1 - i\, n_1\, z_2 + 2\, i\,\bar{n}_1\, z_1\, \zeta}{1 + 2\,\bar{r}_1\, \zeta}, \quad h = 2\, i\,\bar{n}_1\, z_1\, w,$$

где n_1 и n_2 – комплексные числа. Соответственно $\dim(\tilde{V}_5 \cap \operatorname{Ker}\mathcal{L}) = 4$.
(b) Во всех остальных случаях $\phi = 0$. Соответственно $\dim(\tilde{V}_5 \cap \operatorname{Ker}\mathcal{L}) = 0$.
Доказательство: Доказательство представляет собой рутинное, но объемное вычисление, которое осуществляется средствами компьютерной алгебры (Maple). Это вычисление проводится отдельно для пар с номерами (1,2,3,4,5,6). И отдельно для номеров (7,8,9). Для единообразного рассмотрения пар (1,2,3) и (4,5,6) вводится параметр $\varepsilon = \pm 1$, учитывающий сигнатуру формы Леви. Введем также обозначения

$$(f_1(0,0,0,u), f_2(0,0,0,u)) = (a_1(u), a_2(u)) = a(u),$$
$$g(0,0,0,u) = b(u), \ h(0,0,0,u) = c(u),$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0,0,0,u) = a_{11}(u), \ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(0,0,0,u) = a_{21}(u),$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial z_2}(0,0,0,u) = a_{12}(u), \ \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(0,0,0,u) = a_{22}(u),$$
$$\frac{\partial g}{\partial z_1}(0,0,0,u) = b_1(u), \ \frac{\partial g}{\partial z_2}(0,0,0,u) = b_2(u), \ \frac{\partial^2 g}{\partial z_1^2}(0,0,0,u) = B(u).$$

Схема вычисления в первом и втором случаях отличается мелкими деталями. Опишем её на примере второго случая – пар (7,8,9). *Шаг первый.* Положим в соотношении

$$\mathcal{L}(f_1, f_2, g, h) = 0 \tag{25}$$

$\bar{z}=0,\ \bar{\zeta}=0$, получим выражение $h(z_1,z_2,\zeta,u)$ через $(a_1(u),a_2(u),b(u),c(u))$. Это выражение имеет вид

$$h(z_1,z_2,\zeta,u)=\bar{c}(u)+2\,i\,<z,\bar{a}(u)>+2\,i\,\bar{b}(u)\,K(z,z)$$

При этом, подставляя $(z=0,\zeta=0)$, убеждаемся, что $\bar{c}(u)=c(u)$.
Шаг второй. Подставляем полученное значение h в (25), вычисляем $\mathcal{L}'_{\bar{z}_1}$ и $\mathcal{L}'_{\bar{z}_2}$, подставляем $\bar{z}=0,\ \bar{\zeta}=0$ и из этих соотношений получаем выражения для f_1 и f_2 через $(a_1(u),a_2(u),b(u),c(u),a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})$. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
f_1 = {} & a_1(u)+2\,i\,\bar{b}'(u)\,m\,z_1\,z_2^2+2\,i\,\bar{b}'(u)\,z_1^3-4\,\bar{m}\,z_1\,\zeta\,\bar{b}(u)+c'(u)\,z_1+\\
& 2\,i\,\bar{a}_2'(u)\,z_1^2+2\,i\,\bar{a}_1'(u)\,z_1\,z_2-\bar{b}_2(u)\,m\,z_2^2-2\,\zeta\,\bar{a}_2(u)\,\bar{m}-\\
& \bar{b}_2(u)\,z_1^2-\bar{a}_{22}(u)\,z_1-\bar{a}_{12}(u)\,z_2,\\
f_2 = {} & a_2(u)+2\,i\,\bar{b}'(u)\,m\,z_2^3+2\,i\,\bar{b}'(u)\,z_1^2\,z_2-\bar{b}_1(u)\,m\,z_2^2-4\,m\,z_2\,\zeta\,\bar{b}(u)+\\
& c'(u)\,z_2+2\,i\,\bar{a}_2'(u)\,z_1\,z_2+2\,i\,\bar{a}_1'(u)\,z_2^2-\bar{b}_1(u)\,z_1^2-\\
& \bar{a}_{11}(u)\,z_2-\bar{a}_{21}(u)\,z_1-2\,\zeta\,\bar{a}_1(u).
\end{aligned}$$

Подставляя $(z=0,\zeta=0)$, получаем

$$a_{22}(u)=c'(u)-\bar{a}_{11}(u),\qquad \operatorname{Re}a_{12}(u)=\operatorname{Re}a_{21}(u)=0.$$

Шаг третий. Подставим полученные значения f_1 и f_2 в (25), вычислим $\mathcal{L}''_{\bar{z}_1^2}$, подставим $\bar{z}=0,\ \bar{\zeta}=0$ и из этого соотношения получим выражение для g через $(a_1(u),a_2(u),b(u),c(u),a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1(u),b_2(u),B(u))$.

$$\begin{aligned}
g = {} & \frac{1}{2\,(2\,\bar{r}_1\,\zeta+1)}\,(2\,b(u)+4\,i\,\bar{b}_1'(u)\,z_2\,z_1^2-\bar{B}(u)\,m\,z_2^2+12\,i\,\zeta\,\bar{a}_1'(u)\,z_2-2\,c'(u)\,\zeta+\\
& 4\,a_{22}(u)\,\zeta+2\,b_1(u)\,z_1-\bar{B}(u)\,z_1^2+2\,b_2(u)\,z_2-8\,\bar{b}_1(u)\,m\,\zeta\,z_2-\\
& 2\,i\,\bar{a}_{12}'(u)\,z_2\,z_1+2\,i\,\bar{a}_{12}'(u)\,z_1\,z_2+4\,i\,\bar{a}_2'(u)\,\zeta\,z_1+20\,i\,m\,z_2^2\,\zeta\,\bar{b}'(u)-2\,i\,a_{22}(u)\,z_2^2+\\
& 4\,i\,\bar{b}'(u)\,\zeta\,z_1^2+4\,\bar{b}''(u)\,z_2^4\,m+4\,\bar{b}''(u)\,z_2^2\,z_1^2+4\,\bar{a}_2'(u)\,z_2^2\,z_1+\\
& 2\,i\,\bar{a}_{11}'(u)\,z_2^2+4\,i\,\bar{b}_1'(u)\,z_2^3\,m+2\,\bar{a}_1''(u)\,z_2^3)
\end{aligned}$$

Подставляя $(z=0,\zeta=0)$, получаем $B=-\frac{1}{2}\,\bar{B}$, откуда следует, что $B=0$.
Шаг четвертый. После подстановки в (25) полученного выражения для g мы получаем соотношение, которое имеет вид вещественного полинома

по $(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta})$, коэффициенты которого суть дифференциальные полиномы от введенных функций переменного u и их производных. Приравниваем к нулю все коэффициенты. Анализ полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет завершить доказательство леммы.

2-невырожденные гиперповерхности специального вида

В соответствии с лемой 14 нетривиальное ядро имеется только для некоторого специального класса 2-невырожденных гиперповерхностей. Т.е. таких, что в каждой своей точке они могут быть заданы уравнением вида

$$v = 2\,\mathrm{Re}(z_1\,\bar{z}_2) + 2\,\mathrm{Re}(z_1^2\,\bar{\zeta}) + 2\,\mathrm{Re}(r_1\,z_1^2\,\bar{\zeta}^2) + \ldots$$

После замены $\zeta \to \zeta + \bar{r}_1\,\zeta^2$ уравнение принимает вид

$$v = 2\,\mathrm{Re}(z_1\,\bar{z}_2) + 2\,\mathrm{Re}(z_1^2\,\bar{\zeta}) + \text{мономы нового веса 7 и выше} \tag{26}$$

Для изучения таких гиперповерхностей нам будет удобно сделать перестановку координат и еще раз поменять веса. Пусть теперь

$$[z_1] = 2,\ [z_2] = [\zeta] = 1,\ [w] = [u] = 3.$$

Тогда гиперповерхность (взвешенная модельная поверхность) задаётся соотношением

$$Q = \{v = 2\,\mathrm{Re}(z_1\,\bar{\zeta} + z_2\,\bar{\zeta}^2)\} \tag{27}$$

при таком выборе весов Q – это график квазиоднородного вещественного полинома веса 3. Это позволяет применить рекурсию на глубину один и получить исчерпывающий ответ. Отметим также, что использование взвешенных модельных поверхностей применяется достаточно давно ([6], [9], [10]) и эта техника вполне стандартна.

Подгруппа $\mathcal{Q}$ автоморфизмов гиперповерхности Q, которая обеспечивает голоморфную однородность Q, состоит из преобразований вида

$$\begin{aligned} &z_1 \to a + z_1, \qquad z_2 \to b + 2\,\bar{a}\,\zeta + z_2, \qquad \zeta \to c + \zeta, \\ &w \to d + 2\,i\,(a\,\bar{b} + a^2\,\bar{c} + (\bar{b} + 2\,a\,\bar{c})\,z_1 + \bar{a}\,z_2 + \bar{a}^2\,\zeta + \bar{c}\,z_1^2) + w, \end{aligned} \tag{28}$$

где (a, b, c, d) – произвольная точка Q.

Пусть Γ_0 – росток гиперповерхности в начале координат вида

$$v = 2\,\mathrm{Re}(z_1\,\bar\zeta + z_2\,\bar\zeta^2) + O(4), \tag{29}$$

где $O(4)$ - это слагаемые веса четыре и выше. Рассмотрим отображение $\phi = (f, g, h, e)$ этого ростка на другой росток такого же вида. Причем

$$f = z_1 + f_3 + \dots,\ g = z_2 + g_2 + \dots,\ h = \zeta + h_2 + \dots,\ e = w + e_4 + \dots \tag{30}$$

(нижние индексы обозначают веса компонент). Тогда, записывая в виде аналитического соотношения тот факт, что это отображение переводит первую гипеповерхность во вторую и отделяя в нем μ-ю весовую компоненту, получаем

$$-\mathrm{Im}\, e_\mu + 2\,\mathrm{Re}(f_{\mu-1}\,\bar\zeta + g_{\mu-2}\,\bar\zeta^2 + h_{\mu-2}\,(\bar z_1 + 2\,\bar z_2\,\zeta)) = \dots$$

где $w = u + 2\,i\,\mathrm{Re}(z_1\,\bar\zeta + z_2\,\bar\zeta^2)\}$, а многоточие означает выражение, зависящее от компонент с меньших весов (т.е. для f – меньше $\mu - 1$, для g и h – меньше $\mu - 2$, для e – меньше μ.

Таким образом мы видим, что размерность семейства отображений вида (30) контролируется размерностью ядра гомологического оператора.

$$L(f, g, h, e) = 2\,\mathrm{Re}(i\,h + 2\,f\,\bar\zeta + 2\,g\,\bar\zeta^2 + 2\,h\,(\bar z_1 + 2\,\bar z_2\,\zeta)) \tag{31}$$

при $w = u + 2\,i\,\mathrm{Re}(z_1\,\bar\zeta + z_2\,\bar\zeta^2)$.

С другой стороны, если

$$X = 2\,\mathrm{Re}\left(f\,\frac{\partial}{\partial z_1} + g\,\frac{\partial}{\partial z_2} + h\,\frac{\partial}{\partial \zeta} + e\,\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

– росток векторного поля в начале координат, т.ч. (f, g, h, e) - голоморфно в нуле, тогда равенство $L(f, g, h, e) = 0$ равносильно тому, что X – элемент алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов Q в начале координат – $\mathrm{aut}\, Q$.

Веса, введенные нами для координат пространства, естественно продолжаются и на дифференцирования по этим координатам. Дифференцирование по z_1 имеет вес (-2), по z_2 и по ζ – вес (-1), по w – вес (-3). Это превращает $\mathrm{aut}\, Q$ в градуированную алгебру Ли вида $g_{-3} + g_{-2} + \dots$. Подалгебра g_0 содержит градуирующее поле

$$X_0 = 2\,\mathrm{Re}\left(2\,\frac{\partial}{\partial z_1} + 1\,\frac{\partial}{\partial z_2} + 1\,\frac{\partial}{\partial \zeta} + 3\,\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

В такой ситуации если некоторое поле есть элемент алгебры, то каждая его градуированная компонента – тоже. Рассуждение из работы В.Каупа [11], позволяет утверждать, что алгебра $\operatorname{aut} Q$, в таком случае, обязана быть конечно градуированной (полиномиальной). Но мы не будем использовать это утверждение, а вычислим алгебру явно.

Переходим к вычислению алгебры $\operatorname{aut} Q$, которая совпадает с ядром оператора (31). Процедура вычисления аналогична той, что описана в доказательстве леммы 14. Однако само вычисление проще.

Введем обозначения

$$f(0,0,0,u) = a(u),\ g(0,0,0,u) = b(u),\ h(0,0,0,u) = c(u),$$
$$e(0,0,0,u) = d(u),\ \frac{\partial f}{\partial z_1}(0,0,0,u) = a_1(u), \frac{\partial f}{\partial \zeta}(0,0,0,u) = a_3(u),$$
$$\frac{\partial g}{\partial z_1}(0,0,0,u) = b_1(u),\ \frac{\partial g}{\partial \zeta}(0,0,0,u) = b_3(u),$$
$$\frac{\partial h}{\partial z_1}(0,0,0,u) = c_1(u),\ \frac{\partial h}{\partial \zeta}(0,0,0,u) = c_3(u), \frac{\partial^2 g}{\partial z_1^2}(0,0,0,u) = B(u).$$

Положим в соотношении

$$\mathcal{L}(f,g,h,e) = 0 \tag{32}$$

$\bar z_1 = 0,\ \bar z_2 = 0,\ \bar\zeta = 0$, получим выражение для h. Это полином степени два от (z_1, z_2, ζ) с коэффициентами, зависящими от $(a(u), b(u), c(u), d(u))$. Подставляя это значение h в (32), вычисляем $\mathcal{L}'_{\bar\zeta}$, подставляем $\bar z = 0,\ \bar\zeta = 0$ и из найденного соотношения получаем выражение для f, которое является полиномом степени три с коэффициентами, зависящими от $(a, a', b', c', d, a_3, b_3, c_3)$. Вычисляем $\mathcal{L}'_{\bar z_1}$, подставляем $\bar z = 0,\ \bar\zeta = 0$ и из этого соотношения получаем выражение для h, которое является полиномом степени два с коэффициентами, зависящими от $(a, a', b', c, c', a_1, b_1, c_1)$. Подставляя эти значения f и h в (32), вычисляем $\mathcal{L}''_{\bar\zeta^2}$, положим $\bar z = 0,\ \bar\zeta = 0$ и из найденного соотношения получим выражение для g, которое является полиномом степени четыре с коэффициентами, зависящими от $(a', a'', b, b', b'', c', c'', d', a_1', b_1, b_3, b_1', c_1', c_3', B)$.

Дальнейший анализ соотношения (32) дает

$$\operatorname{Im} d = \operatorname{Re} c_1 = \operatorname{Re} B = 0,\ b_3 = i\, c',\ c_3 = d' - \bar a_1,$$
$$a' = b' = c'' = d'' = a_1' = a_3 = b_1' = c_1' = B' = 0.$$

Подсчитаем число сободных вещественных параметров

$a-2,\ b-2,\ c-4,\ d-2, a_1-2,\ a_3-0,\ b_1-2,\ b_3-0,\ c_1-1,\ c_3-0,\ B-1.$

Таким образом, получаем, что размерность $\mathrm{aut}\,Q$ не превосходит 16.

С другой стороны не трудно выписать несколько младших весовых компонент $\mathrm{aut}\,Q$. Вот эти компоненты:

$$\begin{gathered} g_{-3}=\{(0,\ 0,\ 0,\ d)\}, \quad d\in \mathbf{R}, \\ g_{-2}=\{(a,\ 0,\ 0,\ 2\,i\,\bar a\,\zeta)\}, \quad a\in\mathbf{C}, \\ g_{-1}=\{(-2\,\bar c\,z_2+i\,k\,\zeta,\ b,\ c,\ 2\,i\,\bar c\,z_1+2\,i\,\bar b\,\zeta^2)\}, \quad b,\ c\in\mathbf{C},\ k\in\mathbf{R}, \\ g_0=\{(M\,z_1+m\,\zeta^2\,(2\,M-3\,l)\,z_2-\bar m\,\zeta\,(3\,l-\bar M)\,\zeta, 3\,l\,w)\},\ M,\ m\in\mathbf{C},\ l\in\mathbf{R}, \\ g_1=\{(2\,i\,\bar N\,z_1\,\zeta+N\,w, 2\,i\,\bar N\,z_2\,\zeta-i\,N\,z_1+i\,n\,\zeta^2, i\,\bar N\,\zeta^2, 2\,i\,\bar N\,\zeta w)\}, \quad N\in\mathbf{C},\ n\in\mathbf{R}. \end{gathered} \tag{33}$$

И мы видим, что размерность суммы этих пяти компонент равна 16. Таким образом алгебра вычислена. Для дальнейшего нам будет удобно представить g_{-1} в виде прямой суммы $g'_{-1}+g''_{-1}$, где

$$g'_{-1}=\{(-2\,\bar c\,z_2,\ b,\ c,\ 2\,i\,\bar c\,z_1+2\,i\,\bar b\,\zeta^2)\},$$
$$g''_{-1}=\{(i\,k\,\zeta,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 15:
(a) Алгебра $\mathrm{aut}\,Q$ – это сумма пяти градуированных компонент $g_{-3}+g_{-2}+$ $+g_{-1}+g_0+g_1$, сами компоненты выписаны выше (33). $\dim\,\mathrm{aut}\,Q=16$.
(b) При этом $\mathrm{aut}_0\,Q$, стабилизатор начала координат в $\mathrm{aut}\,Q$ (т.е. поля из алгебры, обращающиеся в ноль в начале координат) – это $g''_{-1}+g_0+g_1$, его размерность равна 9.
(c) Подалгебра $g_{-3}+g_{-2}+g'_{-1}$ – это алгебра Ли подгруппы $\mathcal{Q}$ – группы "сдвигов". Причем Q находится в естественном взаимно-однозначном соответствии с $\mathcal{Q}$. Это позволяет перенести на $\mathcal{Q}$ структуру вложенной гиперповерхности.
(d) Если Γ_0 - росток гиперповерхности вида (33), имеет место оценка как для всей алгебры, так и отдельно для стабилизатора начала координат .

$$\dim\,\mathrm{aut}\,\Gamma_0\le 16, \quad \dim\,\mathrm{aut}_0\,\Gamma_0\le 9.$$

Для полноты картины выпишем автоморфизмы, порожденные этими полями. Как было отмечено, поля из $g''_{-1} + g_0 + g_1$ порождают $\mathcal{Q}$.

Поле $(i\,\zeta, 0,\ 0,\ 0)$ из g'_{-1} порождает преобразование

$$z_1 \to z_1 + i\,t\,\zeta,\ z_2 \to z_2, \zeta \to \zeta,\ w \to w.$$

Аналогично поле $(0,\ i\,\zeta^2,\ 0,\ 0)$ из g_1 порождает преобразование

$$z_1 \to z_1,\ z_2 \to z_2 + i\,t\,\zeta^2,\ \zeta \to \zeta,\ w \to w.$$

Для вычисления преобразований, порожденных g_0, положим $M = 2 - \mu/3$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} z_1 &\to \left(z_1 + m \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{\mu} \right) \zeta^2 \right) e^{(2l-\mu/3)t}, \\ z_2 &\to \left(z_2 - \bar{m} \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{\mu} \right) \zeta \right) e^{(l-2\mu/3)t}, \\ \zeta &\to \zeta\, e^{(l+\mu/3)t}, \quad w \to w\, e^{3lt}. \end{aligned}$$

И, наконец преобразования из g_1 при $n = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} z_1 &\to \frac{z_1}{(1 - i\,\bar{N}\,\zeta\,t)^2}, \quad z_2 \to \frac{z_2 - i\,N\,z_1\,t}{(1 - i\,\bar{N}\,\zeta\,t)^2}, \\ \zeta &\to \frac{\zeta}{1 - i\,\bar{N}\,\zeta\,t}, \quad w \to \frac{w}{(1 - i\,\bar{N}\,\zeta\,t)^2}. \end{aligned}$$

Гипеповерхность Q замечательна во многих отношениях. Она представляет собой общее начало двух последовательностей гипеповерхностей пространства $\mathbf{C}^N$ при $N \geq 4$ (больше у них персечений нет) . Первая последовательность была рассмотрена в работе А.Лабовского ([8], 1997) как пример голоморфно однородных l-невырожденных гиперповерхностей с произвольным l. Если эта гиперповерхность расположена в $\mathbf{C}^N$, то она равномерно $(N-2)$-невырождена.

С другой стороны, в недавней работе И.Зеленко и Д.Сайкса [12] была описана серия голоморфно однородных 2-невырожденных гиперповерхностей пространства $\mathbf{C}^N$ с алгеброй голоморфных автоморфизмов размерности $(N-1)^2 + 7$ и доказано, что эти гиперповерхности оптимальны в классе голоморфно однородных. Т.е. никакая голоморфно однородная гиперповерхность не может иметь автоморфизмы большей размерности. Отметим, что эта работа использует технику, весьма далекую от нашей. Это дифференциальная геометрия в стиле Э.Картана и Н.Танаки.

Утверждение 16: (a) Если вещественная гиперповерхность Γ всюду, кроме собственного аналитического подмножества, является 2-невырожденной, то для любой ее точки ξ размерность алгебры автоморфизмов ростка гиперповерхности в этой точке $\operatorname{aut}\Gamma_\xi$ не превосходит 17.
(b) Если же эта гиперповерхность в точке общего положения принадлежит специальному классу (26) (или более широкому классу (29)), то $\dim \operatorname{aut}\Gamma_\xi \leq 16$.
Доказательство: Размерность $\operatorname{aut}\Gamma$ не превосходит размерности гиперповерхности, которая равна 7 плюс размерность стабилизатора точки. Для оценки стабилизатора в произвольной точке достаточно провести оценку в точке 2-невырожденности. В соответствии с теоремой 1 и всеми последующими леммами размерность стабилизатора оценивается через размерность младшей струи (леммы 4 и 8) и размерность ядра $\mathcal{L}$ на $\tilde{V}_5$ (которая равна нулю). Размерность группы параметров (C, ρ, β) не превышает 3. Прараметры (a, α) дают еще 8. Итого $7 + 3 + 8 = 18$. Однако, что бы получить 18 надо, чтобы орбита начала координат была 7-мерной. Это означает голоморфную однородность. Но тогда, в соответствии с [12], размерность не выше 16-ти. Поэтому мы можем считать, что размерность орбиты меньше 7. Откуда получаем оценку $6 + 3 + 8 = 17$. В случае (b) мы можем воспользоваться теоремой 15 (d). Утверждение доказано.

Теорема 17: Пусть Γ – голоморфно невырожденная вещественно аналитическая гиперповерхность в $\mathbf{C}^4$, точка $\xi \in \Gamma$ и Γ_ξ – росток Γ в точке ξ. Пусть $\operatorname{aut}\Gamma_\xi$ – алгебра Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов ростка. Тогда:
(1)
$$\dim \operatorname{aut}\Gamma_\xi \leq 24.$$
(2) Если известно, что Γ 2-невырождена всюду, кроме собственного аналитического подмножества, то можно утверждать, что
$$\dim \operatorname{aut}\Gamma_\xi \leq 17.$$
(3) Если известно, что Γ 3-невырождена всюду, кроме собственного ана-

литического подмножества, то можно утверждать, что

$$\dim \operatorname{aut} \Gamma_\xi \leq 20.$$

Теорема 18: Пусть Γ_ξ – росток произвольной вещественно аналитической гиперповерхности в $\mathbf{C}^4$ т.ч $\dim \operatorname{aut} \Gamma_\xi = 24$, тогда Γ_ξ эквивалентен одной из двух стандартных невырожденных гиперквадрик (т.е. Леви-невырожден и сферичен).

Доказательство: Если Γ_ξ не является Леви-невырожденной в общей точке, то, как следует из теоремы 17, размерность не превосходит 20. Таким образом, Γ_ξ Леви-невырождена в общей точке. Если она там не сферична, то, как доказано в [14], размерность не превосходит 13-ти. Поэтому она сферична. Но тогда, в соответствии с другим результатом Б.Кругликова [13], если Γ_ξ не эквивалентна гиперквадрике (произвольной сигнатуры), то размерность не выше 17. Теорема доказана.

Аналогичные оценки для $\mathbf{C}^2$ и $\mathbf{C}^3$ – это 8 и 15. Они также достигаются только на гиперквадриках. Проблемными, как и в $\mathbf{C}^4$, являются гиперповерхности, которые в общей точке являются сферическими. Результат для $\mathbf{C}^2$ – это работа И.Коссовского и Р.Шафикова [4], а для $\mathbf{C}^3$ – А.Исаева и Б.Кругликова [5].

Эти результаты вместе с известным критерием конечномерности дают следующий список возможностей. Пусть $d = \dim \operatorname{aut} \Gamma_\xi$. Тогда

(1) $d = \infty$ тогда и только тогда, когда Γ голоморфно вырождена.
(2) $d = 24$ тогда и только тогда, когда Γ эквивалентна одной из двух невырожденных стандартных гиперквадрик.
(3) Если Γ_ξ несферичен, но Γ сферична в точке общего положения, то $d \leq 17$.
(4) Если Γ в точке общего положения 1-невырождена (Леви-невырождена) и несферична, то $d \leq 13$.
(5) Если Γ – 2-невырождена в точке общего положения, то $d \leq 17$.
(6) Если Γ – 2-невырождена в точке общего положения и однородна (в окрестности ξ), то $d \leq 16$.
(7) Если Γ – 3-невырождена в точке общего положения, то $d \leq 20$.

В этом списке пункты (1) и (2) вполне конкретны. То же следует сказать и о пункте (3). Действительно, в работе [13] имеется пример гиперповерхности такого типа, для которой оценка 17 реализуется. То же самое касается и пункта (4). В [14] имеется пример такой гиперповерхности, у которой размерность алгебры автоморфизмов равна 13. Пункт (6) также точен. Как было показано, он подкреплен примером. Поэтому для точной оценки из пункта (5) есть ровно две возможности – 16 и 17. Последний пункт (7) самый неопределенный. Пока можно сказать только, что максимум не меньше 8 и не больше 20.

Вопрос 19: Каковы точные значения максимумов из пунктов (5) и (7)?

Вопрос 20: Верно ли, что альтернатива остается верной для гиперповерхностей в размерности выше, чем 4? Т.е. либо бесконечность, либо не больше, чем у гиперквадрики, у которой в $\mathbf{C}^N$ размерность $(N+1)^2-1$.

У этого довольно старого вопроса [6] есть более свежая версия ([7], conjecture (5.a),(5.b)).

Список литературы

[1] H.Poincare, Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme, Rend. Circ. Mat., Palermo, 1907, pp.185 – 220.

[2] В.К.Белошапка, “Симметрии вещественных гиперповерхностей трехмерного комплексного пространства”, Матем. заметки, т.78, № 2 (2005), сс.171–179.

[3] M.S.Baouendi, P.Ebenfelt, L.P.Rothschild, CR automorphisms of real analytic manifolds in complex space, Comm. Anal. Geom. 6 (1998), no. 2, 291–315.

[4] I.Kossovskiy, R.Shafikov, Analytic differential equations and spherical real hypersurfaces. J. Differential Geom. 102 (2016), no. 1, pp.67 –126.

[5] A.Isaev, B. Kruglikov, On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds. Adv. Math. 322 (2017), 530–564.

[6] V.K.Beloshapka, Automorphisms of Degenerate Hypersurfaces in $\mathbf{C}^2$ and a Dimension Conjecture // Russian Journal of Mathematical Physic, 1996, vol.4, no.3, p.393 – 396.

[7] V.K.Beloshapka, CR-Manifolds of Finite Bloom–Graham Type: the Method of Model Surface // Russian Journal of Mathematical Physics vol. 27, no.2, pp.155–174 (2020).

[8] А.С.Лабовский, О размерности группы биголоморфных автоморфизмов вещественно-аналитических гиперповерхностей, Матем. заметки, 61:3 (1997), 349–358.

[9] А.Е.Ершова, Автоморфизмы 2-невырожденных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^3$, Матем. заметки, 69:2 (2001), 214–222.

[10] Kolar, M., Meylan, F., Zaitsev, D., Chern-Moser operators and polynomial models in CR geometry, Adv. Math. 263 (2014), 321–356.

[11] W. Kaup, Einige Bemerkungen uber polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten, Math. Ann. 204, 131 –144 (1973).

[12] D. Sykes and I. Zelenko, Maximal Dimension of Groups of Symmetries of Homogeneous 2-nondegenerate CR-structures of Hypersurface Type with a 1-dimensional Levi Kernel, 2021, https://arxiv.org/abs/2102.08599.

[13] B. Kruglikov, Blow-ups and infinitesimal automorphisms of CR-manifolds. Math. Z. 296 (2020), no. 3-4, 1701–1724.

[14] B. Kruglikov, Submaximally symmetric CR-structures. J. Geom. Anal. 26, 3090–3097 (2016).

[15] A.Santi, Homogeneous models for Levi-degenerate CR manifolds, Kyoto J.Math. 60(1), 291–334 (2020).

[16] G.Fels, W.Kaup, Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5, Acta Math., 201 (2008), 1–82.