УДК 517.55

**В. К. Белошапка**

# Модификация конструкции Пуанкаре и ее применение в $CR$-геометрии гиперповерхностей в $\mathbf{C}^4$

Обобщение гомологического оператора Пуанкаре – модифицированная конструкция Пуанкаре – была ранее использована для оценки размерности псевдогруппы локальных голоморфных автоморфизмов произвольного ростка вещественно аналитической гиперповерхности пространства $\mathbf{C}^4$. В настоящей работе доказана следующая альтернатива: либо эта размерность бесконечна, либо она не превосходит 24. При этом оценка 24 является точной и реализуется лишь для обеих невырожденных гиперквадрик. Если гиперповерхность 2-невырождена в точке общего положения, то оценку можно улучшить до 17, а если 3-невырождена, то до 20.

Библиография: 18 наименований.

**Ключевые слова:** $CR$-многообразие, автоморфизмы, модельные поверхности.

DOI: https://doi.org/10.4213/im9249

## § 1. Введение

Ведущим элементом метода модельной поверхности является конструкция Пуанкаре, которую он применял как в небесной механике, так и в $CR$-геометрии (гомологический оператор Пуанкаре или Пуанкаре–Дюлака). Применение в $CR$-геометрии представлено в работе 1907 г. [1] (см. также [2]). Эта конструкция, по существу, представляет собой версию теоремы о неявном отображении в классе формальных степенных рядов.

Обычно в $CR$-геометрии эта конструкция используется так. Пусть имеется некоторое нелинейное дифференциальное или функциональное соотношение $F(x,\phi(x))=0$. Пусть в кольце формальных степенных рядов от $x$ введена некоторая градуировка (вес), причем $\mu$-я компонента нашего соотношения имеет вид

$$L(x,\phi_\mu(x)) = \text{выражению, зависящему от } \phi_\nu \text{ при } \nu\leqslant\mu-1,$$

где $L(x,y)$ линейно зависит от $y$. Тогда, очевидно, размерность линейного пространства решений уравнения $L(x,\phi(x))=0$ мажорирует размерность семейства решений исходного уравнения $F(x,\phi(x))=0$.

В работе [3] для оценки размерности алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов произвольной голоморфно невырожденной вещественной гиперповерхности пространства $\mathbf{C}^3$ была использована некоторая модификация этой конструкции (редукция на глубину два). А именно, пусть $\mu$-я компонента нашего соотношения $F(x,\phi(x))=0$ имеет вид

$$L_1(x,\phi_\mu(x))+L_2(x,\phi_{\mu-1}(x)) = \text{выражению, зависящему от } \phi_\nu \text{ при } \nu\leqslant\mu-2,$$

где $L_1(x,y)$ и $L_2(x,y)$ линейно зависят от $y$. Тогда, очевидно, размерность линейного пространства решений уравнения $L_1(x,\phi(x)) + L_2(x,\phi(x)) = 0$ мажорирует размерность семейства решений исходного уравнения $F(x,\phi(x)) = 0$. Аналогично определяется обобщение этой конструкции – редукция на произвольную глубину $k$.

В данной работе мы даем еще одну демонстрацию применения редукции на глубину два и три. С помощью этой модификации конструкции Пуанкаре дается оценка сверху на размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов произвольной голоморфно невырожденной вещественной гиперповерхности пространства $\mathbf{C}^4$ (теорема 2).

Этот результат подтверждает старую гипотезу [4]: либо размерность группы автоморфизмов произвольного ростка вещественно аналитической гиперповерхности не превышает размерности для любой невырожденной стандартной гиперквадрики (в $\mathbf{C}^4$ она равна 24), либо она бесконечна.

Отметим, что для получения известной оценки для гиперповерхностей пространства $\mathbf{C}^2$ достаточно обычной (однократной) конструкции Пуанкаре. Для получения же такой оценки в пространстве размерности $(n+1)$ потребуется использование всех вариантов редукции на глубину от 1 до $n$.

Поскольку $k$-кратная конструкция Пуанкаре отличается от классической, изложим схему ее применения в общем виде. Пусть $V$ – линейное пространство бесконечных последовательностей вещественных чисел, пусть $x \in V$. Пусть далее эта последовательность разбита на конечные отрезки, которые мы будем обозначать $x_j$. Соответственно $x = (x_1, x_2, \dots)$, при этом $x_j$ – элемент некоторого конечномерного вещественного линейного пространства. Фиксируем некоторое натуральное число $k$. Вот общая формулировка, которую естественно назвать схемой рекурсии на глубину $k$. Ниже предполагается, что индексы всех переменных группы $x$ положительны, и, если в записи появляется переменная с неположительным индексом, то полагаем, что ее нет.

Теорема 1. *Пусть имеется бесконечная система полиномиальных соотношений вида*

$$\begin{aligned}\Theta_j(x_1,\dots,x_j) = L_{j1}(x_j) + \dots + L_{jk}(x_{j-k+1})\\ + \theta_j(x_{j-k}, x_{j-k-1}, \dots, x_1) = 0, \qquad j = k, k+1, \dots,\end{aligned} \tag{1.1}$$

*где $(L_{j1},\dots,L_{jk})$ – линейны, причем*

$$L_j(x) = L_{j1}(x_j) + L_{j2}(x_{j-1}) + \dots + L_{jk}(x_{j-k+1}), \qquad L(x) = (L_1(x), L_2(x), \dots).$$

*И пусть известно, что* $\operatorname{Ker} L$ *содержится в конечномерном подпространстве пространства $V$ вида $\widetilde{V}_l = \{(x_1,\dots,x_l,0,0,\dots)\}$. Тогда число параметров, от которых зависит общее решение* (1.1), *не превосходит размерности* $\operatorname{Ker} L$.

Доказательство. Пусть $W$ – прямое дополнение $\operatorname{Ker} L$ до $V$. Это дополнение можно определить так. В конечномерном пространстве $\widetilde{V}_l$ произвольно выберем прямое дополнение $\widetilde{W}$ к $\operatorname{Ker} L$ и дополним его подпространством $V_l = \{(0,\dots,0,x_{l+1},x_{l+2},\dots)\}$. Таким образом, уравнение $L(x) = 0$ имеет в пространстве $W$ единственное решение $x = 0$. Просматривая последовательно уравнения $\Theta_j(x) = L_j(x) + \theta_j(x) = 0$, убеждаемся, что эта система также имеет в $W$ не более одного решения. Произвольный вектор $x' \in V$ имеет вид $x + a$, где $x \in W$, $a \in \operatorname{Ker} L$. Рассмотрим нашу систему при фиксированном $a$. Получаем $\Theta_j(x+a) = L_j(x) + \theta_j(x+a) = 0$. Также видим, что эта система имеет не более одного решения. Таким образом, совокупность решений (1.1) параметризуется некоторым подмножеством $\operatorname{Ker} L$. Теорема доказана.

Пусть $\Gamma$ – вещественно аналитическая гиперповерхность в области пространства $\mathbf{C}^4$, $\Gamma_\xi$ – росток этой гиперповерхности в точке $\xi$. Пусть далее $\operatorname{aut}\Gamma_\xi$ – алгебра Ли, состоящая из ростков вещественных вещественно аналитических векторных полей в точке $\xi$, касательных к $\Gamma_\xi$. Если $\Gamma$ вне собственного аналитического подмножества Леви-невырождена, то в рамках стандартного подхода (однократная редукция) мы получаем стандартную оценку: $\dim \operatorname{aut}\Gamma_\xi$ не превосходит размерности алгебры автоморфизмов касательной невырожденной гиперквадрики, которая, независимо от сигнатуры, равна 24.

Рассчитывать на получение оценки мы можем только в случае, если $\Gamma$ – голоморфно невырождена. Для гиперповерхности в $\mathbf{C}^4$ голоморфная невырожденность эквивалентна $l$-невырожденности вне собственного аналитического подмножества, причем $l \leqslant 3$ (см. [5]). Таким образом, для получения общей оценки нам необходимо рассмотреть две разных ситуации: 1) $\Gamma$ равномерно 2-невырождена в окрестности $\xi$, 2) $\Gamma$ равномерно 3-невырождена в окрестности $\xi$.

Примеров равномерно 2-невырожденных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^4$ достаточно много. Например, они содержатся в известной работе Г. Фелса и В. Каупа [6]. В частности, там описаны трубчатые гиперповерхности над вещественными конусами и их голоморфные автоморфизмы. В $\mathbf{C}^4$ группы таких конусов имеют размерность 15. Примеров равномерно 3-невырожденных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^4$ нам известно два. Один от В. Каупа [6] и один от А. Санти [7]. Оба – голоморфно однородные, причем в примере Санти известна размерность алгебры автоморфизмов, которая равна 8.

Рассмотрим оба случая – 3-невырожденный и 2-невырожденный – последовательно. Отметим, что для получения оценки нам пришлось не только использовать гомологический оператор на глубину больше, чем один. Также для анализа 2-невырожденных мы использовали двухкратную процедуру. А именно, рекуррентная процедура с одним весом, затем смена веса и анализ ядра старого гомологического оператора с точки зрения новой весовой рекурсии, что ведет к новому гомологическому оператору. Далее для анализа специального случая (большое ядро) – еще одна смена веса и новая рекурсия.

В итоге мы получим две оценки размерности. Для 2-невырожденных – 17, а для 3-невырожденных – 20. При этом для 2-невырожденных наша техника дает оценку 18, но использование недавнего результата И. Зеленко и Д. Сайкса [8] позволило улучшить ее до 17.

## § 2. 3-невырожденные гиперповерхности

Обозначим координаты в $\mathbf{C}^4$ через $(z, \zeta, \eta, w = u + iv)$. Пусть $\Gamma$ – *равномерно* 3-*невырождена* в окрестности $\xi \in \Gamma$. Имея в виду нашу цель – получение оценки на размерность группы автоморфизмов, – мы можем ограничиться так называемыми жесткими гиперповерхностями. Действительно, если алгебра автоморфизмов содержит поле, трансверсальное комплексной касательной, то после локального распрямления мы можем полагать, что группа содержит сдвиги вдоль оси $u$ и, тем самым, локальное уравнение $\Gamma$ имеет вид

$$v = F(z, \bar z, \zeta, \bar\zeta, \eta, \bar\eta),$$

т. е. правая часть не зависит от $u$. В силу 3-невырожденности ранг формы Леви в общей точке равен единице, и мы можем записать локальное уравнение $\Gamma$ в виде $v = |z|^2 + F_3 + F_4 + \dots$, где $F_j(z, \bar z, \zeta, \bar\zeta, \eta, \bar\eta)$ – однородный полином степени $j$. При этом простыми преобразованиями мы можем удалить все плюригармонические компоненты правой части уравнения, а также все члены, линейные по $z$ и $\bar z$, за исключением $|z|^2$.

Необходимым условием равномерной 3-невырожденности является условие, что ранг комплексного гессиана $F(z, \bar z, \zeta, \bar\zeta, \eta, \bar\eta)$ всюду не превосходит единицы. Это условие, учитывая, что $F_{z\bar z}$ в нуле равна единице, можно записать как условие равенства нулю трех миноров второго порядка. А именно,

$$\begin{aligned} \delta_1(F) &= F_{z\bar z}F_{\zeta\bar\zeta} - |F_{z\bar\zeta}|^2 = 0,\\ \delta_2(F) &= F_{z\bar z}F_{\zeta\bar\eta} - F_{\zeta\bar z}F_{z\bar\eta} = 0,\\ \delta_3(F) &= F_{z\bar z}F_{\eta\bar\eta} - |F_{z\bar\eta}|^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Если $\Gamma$ равномерно 3-невырождена, то уравнение этой гиперповерхности после полиномиальной замены можно записать в виде*

$$v = |z|^2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + O(7), \tag{2.2}$$

*где*

$$\begin{aligned} F_3 &= 2\,\mathrm{Re}(z^2\bar\zeta), \qquad F_4 = 2\,\mathrm{Re}(z^3\bar\eta) + 4|z|^2|\zeta|^2,\\ F_5 &= 2\,\mathrm{Re}(r_1\bar z^4\zeta + r_2\bar z^4\eta + r_3 z\bar\zeta^2\bar\eta^2 + r_4 z\bar\eta^4 + 4z^2\zeta\bar\zeta^2 + 6z^2\bar z\zeta\bar\eta),\\ F_6 &= 2\,\mathrm{Re}(8\bar r_1 z^3\bar z\zeta\bar\zeta + 8\bar r_2 z^3\bar z\zeta\bar\eta + 2r_3 z\eta^2\bar\zeta\zeta^2 + 2r_4 z\eta^4\bar\zeta + s_1 z\bar z^4\zeta + s_2\bar z^5\zeta\\ &\quad + s_3 z\bar z^4\eta + s_4\bar z^5\eta + s_5\bar z^4\zeta^2 + s_6\bar z^4\zeta\eta + s_7\bar z^4\eta^2 + s_8\bar z\eta^5 + 12\bar z^3\zeta\bar\zeta\eta\\ &\quad + 12z\bar z^2\zeta^2\bar\eta) + 16|z|^2|\zeta|^4 + 9|z|^4|\eta|^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем общий вид $F_3$ с учетом наших упрощений. Выделяя в соотношениях (2.1) компоненту степени один, получаем, что $F_3 = 2\,\mathrm{Re}(a_1\zeta + a_2\eta)\bar z^2$. Поскольку $F_3$ не есть тождественный нуль, то $(a_1, a_2) \neq 0$ и мы можем заменить $a_1\zeta + a_2\eta$ на новую переменную $\zeta$. Теперь простым преобразованием можно удалить из всех последующих компонент $F$ слагаемые вида $2\,\mathrm{Re}(A(z,\zeta,\eta)\bar z^2)$ с голоморфным коэффициентом $A$.

Запишем общий вид $F_4$ с учетом наших упрощений. Выделяя в соотношениях (2.1) компоненту степени два, получаем, что $F_4 = 2\,\mathrm{Re}\,\bar z^3(a_3\eta + a_4\zeta) + 4|z|^2|\zeta|^2$. Из равномерной 3-невырожденности следует, что $a_3 \neq 0$ и мы можем заменить $a_3\eta + a_4\zeta$ на новую переменную $\eta$. Простым преобразованием удаляем из всех последующих компонент $F$ слагаемые вида $2\,\mathrm{Re}(B(z,\zeta,\eta)\bar z^3)$

с голоморфным коэффициентом $B$. Выделяя компоненту степени три, получаем указанный вид $F_5$. А затем из компоненты степени четыре – вид $F_6$. Лемма доказана.

Рассмотрим отображение ростка одной гиперповерхности $\Gamma$ в начале координат вида (2.2) на другую такую гиперповерхность $\widetilde{\Gamma}$. Пусть координаты ростка отображения в начале координат имеют вид

$$\Phi = (z \to f(z,\zeta,\eta,w),\ \zeta \to g(z,\zeta,\eta,w),\ \eta \to h(z,\zeta,\eta,w),\ w \to e(z,\zeta,\eta,w)).$$

Будем считать эти гиперповерхности фиксированными. Введем в пространстве степенных рядов от $(z,\overline{z},\zeta,\overline{\zeta},\eta,\overline{\eta},u)$, а также от $(z,\overline{z},\zeta,\overline{\zeta},\eta,\overline{\eta},w,\overline{w}\,)$ градуировку, назначая веса переменным:

$$[z]=[\overline{z}\,]=[\zeta]=[\overline{\zeta}\,]=[\eta]=[\overline{\eta}\,]=1, \qquad [w]=[\overline{w}\,]=[u]=2.$$

Набор весовых компонент $(f_{\mu-1},g_{\mu-2},h_{\mu-3},e_\mu)$ обозначим через $\phi_\mu$ ($\mu$-я весовая компонента $\Phi$). Запишем соотношение, отражающее тот факт, что $\Phi$ отображает $\Gamma$ на $\widetilde{\Gamma}$:

$$\begin{aligned}\Theta(z,\overline{z},\zeta,\overline{\zeta},u) &= -2\operatorname{Im} e(z,\zeta,\eta,w)+2|f|^2+4\operatorname{Re}(f^2\overline{g}\,)+4\operatorname{Re}(f^3\overline{h}\,)\\ &\quad+8|f|^2|g|^2+2F_4(f,\overline{f},g,\overline{g},h,\overline{h}\,)+2F_5(f,\overline{f},g,\overline{g},h,\overline{h}\,)\\ &\quad+2F_6(f,\overline{f},g,\overline{g},h,\overline{h}\,)+\dots=0\\ \text{при}\quad w&=u+i\bigl(|z|^2+2\operatorname{Re}(z^2\overline{\zeta}\,)+2\operatorname{Re}(z^3\overline{\eta}\,)+4|z|^2|\zeta|^2+\cdots\bigr).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Среди всех голоморфных в начале координат отображений выделим класс отображений вида

$$\mathcal{V}_5=\bigl\{\Phi=\mathrm{Id}+\phi_5+\dots=\bigl(z+O(4),\ \zeta+O(3),\ \eta+O(2),\ w+O(5)\bigr)\bigr\}. \tag{2.4}$$

Оценку размерности семейства таких отображений $\Gamma$ на $\widetilde{\Gamma}$ проведем по схеме кратной рекурсии глубины $k=3$ (см. теорему 1). Для этого выделим в $\Theta_\mu$ – $\mu$-й весовой компоненте (2.3) – члены, зависящие от $(\phi_\mu,\phi_{\mu-1},\phi_{\mu-2})$, т. е. от

$$(e_\mu,e_{\mu-1},e_{\mu-2},f_{\mu-1},f_{\mu-2},f_{\mu-3},g_{\mu-2},g_{\mu-3},g_{\mu-4},h_{\mu-3},h_{\mu-4},h_{\mu-5}).$$

Введем обозначения $\Delta_1\psi(u)=iF_3\psi'(u)$, $\Delta_2\psi(u)=iF_4\psi'(u)$. Выделим последовательно в слагаемых выражения $\Theta$, начиная от $-2\operatorname{Im} e$ до $F_6$, члены указанного вида, получим следующий результат.

Лемма 2. *Для всех $\mu\geqslant 5$ $\mu$-я компонента $\Theta$ имеет вид*

$$\Theta_\mu=L_1(\phi_\mu)+L_2(\phi_{\mu-1})+L_3(\phi_{\mu-2})+\theta_\mu(\phi_{\nu<\mu-2}),$$

*где* $w=u+i|z|^2Z$,

$$\begin{aligned}&L_1(\phi)=2\operatorname{Re}(ie+2\overline{z}f+2\overline{z}^{\,2}g+2\overline{z}^{\,3}h),\\ &L_2(\phi)=\Delta_1(L_1(\phi))+l_2(\phi),\\ &L_3(\phi)=\Delta_1(L_2(\phi))+\Delta_2(L_1(\phi))+\Delta_1^2(L_1(\phi))+l_3(\phi),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_2(\phi) &= 2\,\mathrm{Re}\{4z\overline{\zeta}f + 8z\overline{z}\,\overline{\zeta}\eta g + (4\overline{z}^{\,4}r_2 + 4\overline{z}\,\zeta^2\eta r_3 + 8\overline{z}\,\eta^3 r_4 + 12\overline{\zeta}\overline{z}^{\,2}z)h\},\\
l_3(\phi) &= 2\,\mathrm{Re}\{(8\overline{\zeta}\overline{z}\,\zeta + 6\overline{\eta}z^2)f + (4\overline{z}^{\,4}r_1 + 4\overline{z}\,\zeta^2\eta r_3 + 12\overline{\eta}\,\overline{z}\,z^2 + 8\overline{\zeta}^{\,2}z + 16\overline{\zeta}\overline{z}\,\zeta)g\\
&\qquad + (16\overline{\zeta}\overline{z}^{\,3}zr_2 + 8\overline{\zeta}\zeta^2\eta zr_3 + 16\overline{\zeta}\eta^3 zr_4 + 2\overline{z}^{\,5}s_4 + 2\overline{z}^{\,4}\zeta s_6 + 4\overline{z}^{\,4}\eta s_7\\
&\qquad + 2\overline{z}^{\,4}zs_3 + 10\overline{z}\,\eta^4 s_8 + 24\overline{\zeta}^{\,2}cz^2z + 24\overline{\zeta}\overline{z}^{\,3}\zeta + 18\overline{\eta}\,\overline{z}^{\,2}z^2)h\}.
\end{aligned}
$$

Отметим, что выражение $L(\phi) = L_1(\phi) + L_2(\phi) + L_3(\phi)$ линейно по $\phi$ и не зависит от $\mu$.

Пусть $V_5$ – линейное пространство, состоящее из ростков формальных степенных рядов в начале координат вида

$$
\Phi = \phi_5 + \phi_6 + \cdots = (f_4 + f_5 + \cdots\,,\ g_3 + g_4 + \cdots\,,\ h_2 + h_3 + \cdots\,,\ e_5 + e_6 + \cdots).
$$

Тогда в соответствии с теоремой 1 размерность семейства отображений $\Gamma$ на $\widetilde{\Gamma}$ из $\mathcal{V}_5$ не превосходит размерности ядра $L$ на $V_5$.

Перейдем к оценке размерности ядра оператора $L$, т. е. пространства решений соотношения

$$
L(\phi) = 0, \quad \text{где} \quad \phi \in V_5. \tag{2.5}
$$

Обозначим

$$
f(0,0,0,u) = a(u), \quad g(0,0,0,u) = b(u), \quad h(0,0,0,u) = c(u), \quad e(0,0,0,u) = d(u).
$$

Положим в (2.5) $\overline{z} = \overline{\zeta} = \overline{\eta} = 0$, получим соотношение, из которого сразу находим

$$
\begin{aligned}
e(z,\zeta,\eta,u) &= d(u) + 2iz\overline{a}\,(u) + 2iz^2\overline{b}\,(u) + 2iz^3\overline{c}\,(u)\\
&\qquad + 4iz^4(\overline{r}_2\overline{c}\,(u) + \overline{r}_1\overline{b}\,(u)) + 2i\overline{s}_4 z^5\overline{c}\,(u),
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

причем $d(u)$ – вещественна.

Обозначим

$$
\begin{aligned}
&f'_z(0,0,0,u) = k_1(u), && g'_z(0,0,0,u) = k_2(u), && h'_z(0,0,0,u) = k_3(u),\\
&f'_\zeta(0,0,0,u) = m_1(u), && g'_\zeta(0,0,0,u) = m_2(u), && h'_\zeta(0,0,0,u) = m_3(u),\\
&f'_\eta(0,0,0,u) = n_1(u), && g'_\eta(0,0,0,u) = n_2(u), && h'_\eta(0,0,0,u) = n_3(u).
\end{aligned}
$$

Подставляем полученное значение $e$ в $L$ (обозначение $L$ сохраняем). Подставим $\overline{z} = \overline{\zeta} = \overline{\eta} = 0$ в $L_{\overline{z}}$, $L_{\overline{\zeta}}$, $L_{\overline{\eta}}$, получаем

$$
\begin{aligned}
&2z^2\overline{k}_2(u) + 2z^3\overline{k}_3(u) + 10\eta^4 s_8 h(z,\zeta,\eta,u) + 24\overline{c}\,(u)\zeta^2z^2 + 2z^5\overline{s}_4\overline{k}_3(u)\\
&\quad + 8h(z,\zeta,\eta,u)\eta^3\overline{r}_4 + 4z^4\overline{r}_2\overline{k}_3(u) + 2\overline{c}\,(u)z^4\overline{s}_3 + 4z^4\overline{r}_1\overline{k}_2(u) - 2a(u)\\
&\quad + 2z\overline{k}_1(u) + 8\zeta^2\overline{b}\,(u) + 4\zeta\overline{a}\,(u) - 2d'(u)z + 2f(z,\zeta,\eta,u) + 12\zeta z^2\overline{c}\,(u)\\
&\quad - 4iz^2a'(u) - (4i)z^4\overline{c}\,'(u) - 4iz^3\overline{b}\,'(u) + 4h(z,\zeta,\eta,u)\zeta^2\eta r_3 + 16\overline{c}\,(u)\zeta z^3\overline{r}_2\\
&\quad - 8iz^5\overline{r}_2\overline{c}\,'(u) - 8i\overline{r}_1z^5\overline{b}\,'(u) - 4i\overline{s}_4z^6\overline{c}\,'(u) + 4\zeta^2\eta r_3 g(z,\zeta,\eta,u) = 0,
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&16h(z,\zeta,\eta,u)\eta^3zr_4 - 4iz^5\overline{c}\,'(u) - 2iz^7\overline{s}_4c'(u) - 4iz^6\overline{r}_1\overline{b}\,'(u) + 2z^2\overline{m}_2(u)\\
&\quad + 2z^3\overline{m}_3(u) + 2z\overline{m}_1(u) - 2z^2e'(u) + 4zf(z,\zeta,\eta,u) + 8h(z,\zeta,\eta,u)\zeta^2\eta zr_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\overline{c}\,(u)z^4\overline{s}_6+24\overline{c}\,(u)\zeta z^3-4iz^4\overline{b}\,'(u)-4iz^3a'(u)-8iz^6\overline{r}_2\overline{c}\,'(u)\\
&+4z^4\overline{r}_2\overline{m}_3(u)+2z^5\overline{s}_4\overline{m}_3(u)+8\zeta z\overline{a}\,(u)+16\zeta z\overline{b}\,(u)+4z^4\overline{r}_1\overline{m}_2(u)=0,\\
4z^4&\overline{r}_1\overline{n}_2(u)+4z^4\overline{s}_7\overline{c}\,(u)+2z^5\overline{s}_4\overline{n}_3(u)+6z^2f(z,\zeta,\eta,u)+4z^4\overline{r}_2\overline{n}_3(u)\\
&-4iz^5\overline{b}\,'(u)-4iz^4a'(u)-4iz^7\overline{r}_2\overline{c}\,(u)-2z^3e'(u)-4iz^7\overline{r}_1\overline{b}\,'(u)\\
&-2iz^8\overline{s}_4\overline{c}\,'(u)-4iz^6\overline{c}\,'(u)+2z\overline{n}_1(u)+2z^2\overline{n}_2(u)+2z^3\overline{n}_3(u)=0.
\end{aligned}
$$

Из третьего соотношения (2.7) следует, что $n_1(u)=0$ и

$$
\begin{aligned}
3f(z,\zeta,\eta,u)&=-\overline{n}_2(u)+z\big(e'(u)-\overline{n}_3(u)\big)\\
&+2z^2\big(-\overline{r}_1\overline{n}_2(u)-\overline{s}_7\overline{c}\,(u)-\overline{r}_2\overline{n}_3(u)+i\overline{a}\,'(u)\big)+z^3\big(2i\overline{b}\,'(u)-\overline{s}_4\overline{n}_3(u)\big)\\
&+2iz^4\overline{c}\,'(u)+2iz^5\big(\overline{r}_2\overline{c}\,'(u)+\overline{r}_1\overline{b}\,'(u)\big)+iz^6\overline{s}_4\overline{c}\,'(u).
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Подставляя полученное значение $f$ в первое и второе соотношения (2.7) и выделяя старшую компоненту по $\eta$, получаем, что

$$
\begin{gathered}
2r_3\zeta^2g(z,\zeta,\eta,u)+(2r_3\zeta^2+5s_8\eta^2)h(z,\zeta,\eta,u)=0,\\
(r_3\zeta^2+2r_4\eta^2)h(z,\zeta,\eta,u)=0.
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Оставшиеся после выполнения (2.9) условия, обеспечивающие выполнение (2.7), сводятся к следующей системе соотношений:

$$
\begin{gathered}
a=b=c=n_1=n_2=k_3=0,\\
d'=-2\operatorname{Re}n_3,\qquad k_2=\frac{2}{3}\,r_2n_3,\qquad m_2=\frac{1}{3}(n_3-\overline{n}_3),\qquad m_3=\frac{4}{3}\,r_2n_3,\\
r_1r_2n_3=0,\qquad s_4n_3=0,\qquad (r_1-s_4+4r_2^2)n_3=r_1\overline{n}_3.
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

При этом

$$
e(z,\zeta,\eta,u)=d(u),\qquad f(z,\zeta,\eta,u)=\frac{d'(u)-\overline{n}_3(u)}{3}z-\frac{2}{3}\,\overline{r}_2\overline{n}_3(u)z^2-\frac{\overline{s}_4\overline{n}_3(u)}{3}z^4.
$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $r_3\neq 0$, тогда из (2.9) сразу следует, что $g=h=0$. Оставшиеся соотношения позволяют заключить, что $f=0$ и $d$ – вещественная константа. Итак, в этом случае $\operatorname{Ker}L=V^0=\{(0,0,0,d_0)\}$, причем $d_0\in\mathbf{R}$.

2. Пусть $r_3=0$. Пусть $(r_4,s_8)\neq 0$, тогда из (2.9) следует, что $h=0$. Возвращаясь к соотношениям (2.7), получаем $n_3=n_2=d'=0$. Откуда $f=0$, а $e$ – вещественная константа. Обозначим $g''_{zz}(0,0,0,u)$ через $k_{22}(u)$. Вычисляя теперь $L''_{\overline{z}\,\overline{z}}$ при $\overline{z}=\overline{\zeta}=\overline{\eta}=0$, получаем

$$
g(z,\zeta,\eta,u)=2iz^5\overline{r}_1\overline{k}_2'(u)-z^4\overline{r}_1\overline{k}_{22}(u)+iz^3\overline{k}_2'(u)-\frac{1}{2}z^2\overline{k}_{22}(u)-4\zeta^2\overline{k}_2(u).
$$

Подставляя это значение $g$ в $L$ и приравнивая к нулю коэффициенты при $z^2\overline{\zeta}^{\,2}$ и $z^2\overline{z}\,|\zeta|^2$, получаем, что $k_2=k_{22}=0$, т. е. $g=0$. Следовательно, $\operatorname{Ker}L=V^0$.

Пусть $r_4=s_8=0$. Обозначим

$$
h''_{zz}(0,0,0,u)=k_{32}(u),\qquad h'''_{zzz}(0,0,0,u)=k_{33}(u).
$$

Вычисляя $L''_{\bar z \bar z}$ при $\bar z = \bar\zeta = \bar\eta = 0$, как и ранее, получаем выражение для $g$, вычисляя $L'''_{\bar z \bar z \bar z}$ при $\bar z = \bar\zeta = \bar\eta = 0$, получаем выражение для $h$. После чего анализ младших коэффициентов $L$ дает $n_3 = d' = k_2 = k_{22} = k_{32} = k_{33} = 0$, откуда получаем $f = g = h = 0$, $e$ – вещественная константа. Следовательно, $\operatorname{Ker} L = V^0$.

Таким образом, нами доказана и лемма 3.

Лемма 3. *Если $L(\phi) = 0$, то $\phi = (0, 0, 0, d_0)$, где $d_0$ – вещественная постоянная. В частности, на пространстве $V_5$ ядро тривиально.*

Выясним, как устроены младшие струи отображения $\Gamma$ на $\widetilde\Gamma$, сохраняющего нуль на месте. Выделяя компоненты (2.3) веса один и два, сразу получаем, что

$$e_1 = 0, \qquad e_2 = |\lambda|^2 w, \qquad f_1 = \lambda z, \qquad \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

Пусть далее

$$e_3 = |\lambda|^2(d_3 + d_1 w), \qquad f_2 = \lambda(aw + a_2), \qquad g_1 = b_1,$$

где $d_3$, $d_1$, $a_2$, $b_1$ – однородные голоморфные формы от $(z, \zeta, \eta)$ соответствующих степеней, $a$ – постоянная. Третья весовая компонента (2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} &|\lambda|^2 \operatorname{Im}\bigl[i2\operatorname{Re}\bigl(z^2\bar\zeta + d_1(z,\zeta,\eta)(u + i|z|^2)\bigr)\bigr] \\ &\qquad = |\lambda|^2 2\operatorname{Re}[(a(u+i|z|^2) + a_2(z,\zeta,\eta))\bar z\,] + 2\operatorname{Re}[\lambda^2 z^2 \bar b_1(\bar z, \bar\zeta, \bar\eta\,)]. \end{aligned}$$

Выделяя члены, линейные по $u$, получаем $d_1 = 2i\bar a\, z$. Теперь среди членов бистепени $(2, 1)$ выпишем по отдельности компоненты, линейные по $\bar z$, по $\bar\zeta$ и по $\bar\eta$. Получим

$$a_2(z,\zeta,\eta) = \left(2i\bar a - \frac{\lambda}{\bar\lambda}\,\bar b_1^{\,1}\right) z^2, \qquad b_1^2 = \frac{\lambda}{\bar\lambda}, \quad b_1^3 = 0,$$

где $b_1 = b_1^1 z + b_1^2\zeta + b_1^3\eta$. Здесь и далее верхними индексами указываем на связь коэффициентов и переменных. Пусть $b_1^1 = \alpha\lambda/\bar\lambda$, получаем

$$e_3 = 2i|\lambda|^2 \bar a\, zw, \qquad f_2 = \lambda\bigl(aw + (2i\bar a - \bar\alpha\,)z^2\bigr), \qquad g_1 = \frac{\lambda}{\bar\lambda}(\alpha z + \zeta).$$

Пусть далее

$$\begin{gathered} e_4 = |\lambda|^2(d_4 + d_2 w + d_0 w^2), \qquad f_3 = \lambda(a_3 + a_1 w), \\ g_2 = \frac{\lambda}{\bar\lambda}(b_2 + b_0 w), \qquad h_1 = \frac{\lambda}{\bar\lambda^2} c_1, \end{gathered}$$

где коэффициенты – это голоморфные однородные формы от $(z,\zeta,\eta)$ соответствующих степеней. Выпишем компоненту (2.3) веса четыре (общий множитель $|\lambda|^2$ убираем):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}[d_4(z,\zeta,\eta)+d_2(z,\zeta,\eta)(u+i|z|^2)+d_0(u^2+2i|z|^2u-|z|^4)\\
&\qquad+2\overline{a}z(z^2\overline{\zeta}+\overline{z}^{\,2}\zeta)+i(z^3\overline{\eta}+\overline{z}^{\,3}\eta)+4|z|^2|\zeta|^2]\\
&\ =2\operatorname{Re}[(a_3(z,\zeta,\eta)+a_1(z,\zeta,\eta)(u+i|z|^2))\overline{z}\,]+|a|^2(u^2+|z|^4)\\
&\qquad-2\operatorname{Re}[(a(u+i|z|^2)(2ia+\alpha)\overline{z}^{\,2})]+|2ia+\alpha|^2|z|^4+2\operatorname{Re}\big[a\big(2i\operatorname{Re}(z^2\overline{\zeta}\,)\big)\big]\\
&\qquad+2\operatorname{Re}\big[2\big(a(u+i|z|^2)+(2i\overline{a}-\overline{\alpha}\,)z^2\big)z(\overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\zeta}\,)\big]\\
&\qquad+2\operatorname{Re}\big[\big(b_2(z,\zeta,\eta)+b_0(u+i|z|^2)\big)\overline{z}^{\,2}\big]+2\operatorname{Re}[c_1(z,\zeta,\eta)\overline{z}^{\,3}]+4|z|^2|\alpha z+\zeta|^2.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Отделяя в (2.11) коэффициент при $u^2$, получаем $\operatorname{Im} d_0=|a|^2$. Положим $d_0=\gamma+i|a|^2$. Отделяя в (2.11) коэффициент при $u$, получаем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}[d_2(z,\zeta,\eta)]+|a|^2|z|^2&=2\operatorname{Re}[a_1(z,\zeta,\eta)\overline{z}\,]-2\operatorname{Re}[a(2ia+\alpha)\overline{z}^{\,2}]\\
&\qquad+2\operatorname{Re}[az(\overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\zeta}\,)]+2\operatorname{Re}[b_0\overline{z}^{\,2}].
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$d_2=(2i\overline{a}^2-\overline{a}\,\overline{\alpha}+\overline{\beta}\,)z^2,\qquad a_1=\big((|a|^2-2\operatorname{Re}(a\overline{\alpha}\,))+i\delta\big)z+\overline{a}\,\zeta,$$

где $\beta=b_0$, $\delta=\operatorname{Im}a_1^1$. Компонента бистепени $(4,0)$ сразу дает $d_4=0$. В бистепени $(3,1)$ получаем

$$\begin{aligned}
id_2(z,\zeta,\eta)|z|^2-\overline{a}\,z^3\overline{\zeta}+z^3\overline{\zeta}&=a_3(z,\zeta,\eta)\overline{z}\\
&\quad+i\overline{a}(-2i\overline{a}+\overline{\alpha}\,)z^3\overline{z}-i\overline{\beta}\,z^3\overline{z}+z^3\overline{c_1(z,\zeta,\eta)}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$a_3=(-4\overline{a}^2-2i\overline{a}\,\overline{\alpha}+2\overline{\beta}-\overline{\nu}\,)z^3,\qquad c_1=\nu z-a\zeta+\eta,$$

где $\nu=c_1^1$. В бистепени $(2,2)$ имеем

$$\begin{aligned}
&2\operatorname{Re}[-i\overline{a}\,z\zeta\overline{z}^{\,2}+ia_1z\overline{z}^{\,2}+2iaz^2\overline{z}\,(\overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\zeta}\,)+b_2\overline{z}^{\,2}+4\alpha z^2\overline{z}\,\overline{\zeta}\,]\\
&\qquad+(|a|^2+4|\alpha|^2+|2ia+\alpha|^2)|z|^4=0.
\end{aligned}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned}
b_2&=\left(\delta-2|\alpha|^2-\frac{|a|^2}{2}-\frac{1}{2}\,|2ia+\alpha|^2-2\operatorname{Re}(ia\overline{\alpha}+i\kappa)\right)z^2+(ia+2\alpha)z\zeta,\\
c_1&=\nu z-a\zeta+\eta,
\end{aligned}$$

где $\kappa=\operatorname{Im}b_2^{11}$.

Итак, нами доказана следующая лемма.

Лемма 4. a) *Всякое локально обратимое отображение* $\Gamma$ *на* $\widetilde{\Gamma}$, *сохраняющее начало координат, представимо в виде композиции отображения вида*

$$\begin{aligned}
z &\to \lambda\big(z + aw + (2i\overline{a} - \overline{\alpha}\,)z^2 + (-4\overline{a}^2 + 2i\overline{a}\,\overline{\alpha} + 2\overline{\beta} - \overline{\nu}\,)z^3 \\
&\qquad + \big((|a|^2 - 2\operatorname{Re}(a\overline{\alpha}\,) + i\delta)z + \overline{a}\zeta\big)w\big), \\
\zeta &\to \frac{\lambda}{\overline{\lambda}}\big(\zeta + \alpha z + \tau z^2 + (ia + 2\alpha)z\zeta + \beta w\big), \\
\eta &\to \frac{\lambda}{\overline{\lambda}^2}(\eta + \nu z - a\zeta), \\
w &\to |\lambda|^2\big(w + 2i\overline{a}\,zw + (2i\overline{a}^{\,2} - \overline{a}\,\overline{\alpha} + \overline{\beta}\,)z^2 w + (\gamma + i|a|^2)w^2\big), \\
\tau &= \left(\delta - 2|\alpha|^2 - \frac{|a|^2}{2} - \frac{1}{2}\,|2ia + \alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(ia\overline{\alpha} + i\kappa)\right),
\end{aligned}$$

*и отображения*

$$z \to z + O(4), \quad \zeta \to \zeta + O(3), \quad \eta \to \eta + O(2), \quad w \to w + O(5).$$

b) *Причем*

$$\lambda \in \mathbf{C}^*, \quad a, \alpha, \beta, \nu \in \mathbf{C}, \quad \gamma, \delta, \kappa \in \mathbf{R}.$$

*Что дает* 13 *вещественных параметров.*

c) *Такое отображение однозначно определяется заданием* 3*-струи в начале координат.*

Теперь мы готовы доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если* $\Gamma$ – *вещественно аналитическая гиперповерхность пространства* $\mathbf{C}^4$, *которая в точке общего положения является* 3*-невырожденной, то размерность псевдогруппы локальных голоморфных автоморфизмов в любой точке не превосходит* 20.

Доказательство. Размерность группы в произвольной точке не превосходит суммы размерности гиперповерхности и размерности стабилизатора в точке общего положения. Размерность гиперповерхности равна 7. Размерность стабилизатора в силу теоремы 1 и лемм 1–4 не превосходит 13. Поскольку $7 + 13 = 20$, утверждение доказано.

## § 3. Общие 2-невырожденные гиперповерхности

Обозначим координаты в $\mathbf{C}^4$ через $(z = (z_1, z_2),\ \zeta,\ w = u + iv)$ и перейдем к рассмотрению 2-невырожденного случая. Так же, как и выше, мы можем ограничиться жесткими гиперповерхностями. Пусть $\Gamma$ – равномерно 2-невырождена в окрестности $\xi \in \Gamma$. Форма Леви равномерно 2-невырожденной гиперповерхности повсюду имеет минимальное вырождение, а именно, ее ранг равен 2. Таким образом, мы можем записать локальное уравнение $\Gamma$ в виде

$$v = \langle z, \overline{z}\,\rangle + F_3(z, \overline{z}, \zeta, \overline{\zeta}\,) + F_4(z, \overline{z}, \zeta, \overline{\zeta}\,) + \cdots, \tag{3.1}$$

где $F_j$ – однородный вещественный полином степени $j$, а $\langle z, \overline{z}\,\rangle$ – невырожденная эрмитова форма от переменного $z \in \mathbf{C}^2$. Простыми треугольно-полиномиальными заменами переменных $z$ и $w$ можно добиться того, что правая часть уравнения $\Gamma$

$$F = \langle z, \overline{z}\,\rangle + F_3 + F_4 + \cdots$$

не будет содержать плюригармонических слагаемых (т. е. слагаемых бистепеней $(m, 0)$ и $(0, m)$) и слагаемых, линейно зависящих от $z$ и $\overline{z}$, за исключением формы $\langle z, \overline{z}\,\rangle$. Выпишем слагаемые, которые после этого останутся в $F_3$ и $F_4$:

$$\begin{aligned} F_3 &= 2\operatorname{Re}\bigl(K(z,z)\overline{\zeta} + A_1(z)|\zeta|^2 + A_2\zeta^2\overline{\zeta}\,\bigr), \\ F_4 &= 2\operatorname{Re}\bigl((P(z,z,\overline{z}\,) + Q(z,z,z))\overline{\zeta} + R(z,z)\overline{\zeta}^{\,2}\bigr) + S(z,\overline{z}\,)|\zeta|^2 + T(z,z,\overline{z},\overline{z}\,) \\ &\qquad + 2\operatorname{Re}\bigl(B_1(z,z)|\zeta|^2 + B_2(z)\zeta^2\overline{\zeta} + B_3(z)\zeta\overline{\zeta}^{\,2}\bigr). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Отметим, что из условия 2-невырожденности $\Gamma$ следует, что форма $K(z, z)$ не равна нулю тождественно. Для дальнейших вычислений нам потребуется приведение пары форм $(\langle z, \overline{z}\rangle, K(z, z))$ на $\mathbf{C}^2$ комплексно линейными заменами к виду, содержащему минимум параметров. Имеет место следующая классификация (см. также [9]).

Лемма 5. *Пусть $\langle z, \overline{z}\,\rangle$ невырождена, а $K(z, z)$ отлична от тождественного нуля, тогда невырожденным комплексно-линейным преобразованием можно привести эту пару к одной из следующего списка*:

1*) $(|z_1|^2 + |z_2|^2,\ kz_1^2 + mz_2^2)$, $k, m > 0$, $k \neq m$;
2*) $(|z_1|^2 + |z_2|^2,\ k(z_1^2 + z_2^2))$, $k > 0$;
3*) $(|z_1|^2 + |z_2|^2,\ kz_1^2)$, $k > 0$;
4*) $(|z_1|^2 - |z_2|^2,\ kz_1^2 + mz_2^2)$, $k, m > 0$, $k \neq m$;
5*) $(|z_1|^2 - |z_2|^2,\ k(z_1^2 + z_2^2))$, $k > 0$;
6*) $(|z_1|^2 - |z_2|^2,\ kz_1^2)$, $k > 0$;
7*) $(2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2),\ z_1^2 + mz_2^2)$, $m \notin \mathbf{R}$;
8*) $(2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2),\ z_1^2 + mz_2^2)$, $m \in \mathbf{R}^*$;
9*) $(2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2),\ z_1^2)$.

Доказательство. Пусть $\langle z, \overline{z}\rangle$ положительно определена и $\nu$ – собственный вектор оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} k & l \\ l & m \end{bmatrix}.$$

Выбирая в качестве первого вектора нового базиса вектор

$$\frac{\nu}{\sqrt{\langle \nu, \overline{\nu}\,\rangle}}$$

и подбирая второй из условия ортонормированности, получаем в зависимости от ранга $K$ пары 1*)–3*). Положительности параметров $k$ и $m$ можно добиться поворотами в плоскостях $z_1$ и $z_2$.

Пусть $\langle z, \overline{z}\,\rangle$ имеет сигнатуру $(1,1)$. Если оператор имеет собственный вектор $\nu$ такой, что $\langle \nu, \overline{\nu}\,\rangle \neq 0$, то годится то же самое рассуждение, и это дает пары $4^*$)–$6^*$).

Пусть $(e_1, e_2)$ – базис $\mathbf{C}^2$, в котором $K(z,z)$ диагональна, т.е. $K(z,z) = kz_1^2 + mz_2^2$, причем $\langle e_1, \overline{e}_1\rangle = \langle e_2, \overline{e}_2\rangle = 0$. Тогда если $z = z_1 e_1 + z_2 e_2$, то

$$\langle z, \overline{z}\,\rangle = 2\,\mathrm{Re}(\langle e_1, \overline{e}_2\rangle z_1 \overline{z}_2).$$

После растяжения по $z_1$ эрмитова форма принимает вид $\langle z, \overline{z}\,\rangle = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$. Используя преобразование

$$z_1 \to \lambda z_1, \quad z_2 \to \frac{z_2}{\overline{\lambda}}, \qquad \lambda \in \mathbf{C}^*,$$

которое не меняет эрмитовой формы получаем пары $7^*$)–$9^*$). Лемма доказана.

Лемма 6. *Если форма Леви гиперповерхности* $\Gamma$, *заданной уравнением* (3.1), *тождественно вырождена, то* $F_3$ *и* $F_4$ *можно записать в виде* (3.2), *причем* $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = B_3 = 0$, *а форма* $S$ *в зависимости от номера пары из леммы* 5 *имеет следующий вид*:

$1^*$) $S = 4(k^2|z_1|^2 + m^2|z_2|^2)$;
$2^*$) $S = 4k^2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$;
$3^*$) $S = 4k^2|z_1|^2$;
$4^*$) $S = 4(k^2|z_1|^2 - m^2|z_2|^2)$;
$5^*$) $S = 4k^2(|z_1|^2 - |z_2|^2)$;
$6^*$) $S = 4k^2|z_1|^2$;
$7^*$) $S = 4(\overline{m}\, z_1\overline{z}_2 + m z_2\overline{z}_1)$;
$8^*$) $S = 4m(z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1)$;
$9^*$) $S = 0$.

Доказательство. Вычисляя определитель матрицы комплексного гессиана по переменным $(z_1, z_2, \zeta)$ и отделяя в нем компоненты степени один, получаем, что $A_1 = A_2 = 0$ . Отделяя далее компоненты степени два, получаем $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ и указанный вид формы $S$. Лемма доказана.

Теперь можем написать

$$\begin{aligned} &F_3 = 2\,\mathrm{Re}[K(z,z)\overline{\zeta}\,],\\ &F_4 = 2\,\mathrm{Re}\big[(P(z,z,\overline{z}\,) + Q(z,z,z))\overline{\zeta} + R(z,z)\overline{\zeta}^{\,2}\big] + S(z,\overline{z}\,)|\zeta|^2 + T(z,z,\overline{z},\overline{z}\,), \end{aligned}$$

т.е. уравнение гиперповерхности имеет вид

$$\begin{aligned} v = \langle z, \overline{z}\,\rangle &+ 2\,\mathrm{Re}[K(z,z)\overline{\zeta}\,] + 2\,\mathrm{Re}\big[(P(z,z,\overline{z}\,) + Q(z,z,z))\overline{\zeta} + R(z,z)\overline{\zeta}^{\,2}\big]\\ &+ S(z,\overline{z}\,)|\zeta|^2 + T(z,z,\overline{z},\overline{z}\,) + O(5). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Введем в пространстве степенных рядов от $(z, \overline{z}, \zeta, \overline{\zeta}, u)$, а также от $(z, \overline{z}, \zeta, \overline{\zeta}, w, \overline{w}\,)$ градуировку, назначая веса переменным

$$[z] = [\overline{z}\,] = [\zeta] = [\overline{\zeta}\,] = 1, \qquad [w] = [\overline{w}\,] = [u] = 2.$$

Пусть $\Gamma$ и $\widetilde{\Gamma}$ – гиперповерхности, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} v &= \langle z, \overline{z}\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}(K(z,z)\overline{\zeta}\,) + O(4), \\ v &= \langle z, \overline{z}\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\widetilde{K}(z,z)\overline{\zeta}\,) + O(4), \end{aligned} \tag{3.4}$$

и

$$\phi = (z \to f = f_1 + f_2 + O(3),\ \zeta \to g = g_1 + O(2),\ w \to h = h_1 + h_2 + h_3 + O(4))$$

– локально обратимое голоморфное отображение первой на вторую, оставляющее начало координат на месте. Причем компоненты координат отображения – это компоненты фиксированного веса и $O(j)$ – сумма слагаемых веса не ниже $j$.

То, что это отображение переводит $\Gamma$ в $\widetilde{\Gamma}$, аналитически можно записать в виде следующего соотношения:

$$\begin{gathered} \Theta = -2\,\mathrm{Im}\,h + 2\langle f, \overline{f}\,\rangle + 4\,\mathrm{Re}(\widetilde{K}(f,f)\overline{g}\,) + \widetilde{F}_4 + \dots = 0 \\ \text{при } w = u + i(\langle z, \overline{z}\,\rangle + 2\,\mathrm{Re}(K(z,z)\overline{\zeta}\,) + F_4 + O(5)). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Отделяя в этом соотношении компоненту веса 1, получаем $h_1 = A(z) + B\zeta = 0$.

Пусть $h_2 = \Phi_2(z,\zeta) + \rho w$, $f_1 = Cz + d\zeta$, где $\Phi_2$ – форма степени два от $(z,\zeta)$. Отделяя в (3.5) компоненту веса 2, получаем $\Phi_2(z,\zeta) = 0$, $\langle Cz, \overline{Cz}\,\rangle = \rho\langle z, \overline{z}\rangle$, т. е. $f_1 = Cz$, $h_2 = \rho w$. Отметим, что в силу обратимости отображения матрица $C$ – невырождена и $\rho \neq 0$.

Пусть далее

$$\begin{gathered} h_3 = \rho\big(\Phi_3 + (A(z) + B\zeta)w\big), \qquad f_2 = C\big(aw + b(z,z) + c(z)\zeta + d\zeta^2\big), \\ g_1 = \langle z, \overline{\alpha}\,\rangle + \beta\zeta, \end{gathered}$$

где $\Phi_3$ – форма степени три от $(z,\zeta)$. Тогда, отделяя в (3.5) компоненту веса 3, получаем

$$\begin{gathered} h_3 = 2i\rho\langle z, \overline{a}\,\rangle w, \qquad f_2 = C\big(aw + 2i\langle z, \overline{a}\,\rangle z - K(z,z)\mu\big), \\ g_1 = \langle z, \overline{\alpha}\,\rangle + \beta\zeta, \end{gathered}$$

причем в силу обратимости отображения $\beta \neq 0$.

Из наших вычислений видно, что при определении весовой $j$-струи удобно принять следующую точку зрения:

$$\phi = \sum \phi_j, \qquad \phi_j = (f_{j-1}, g_{j-2}, h_j).$$

Таким образом, весовая $j$-струя отображения понимается как набор струй координат, где у $h$ берем $j$-ю весовую струю, у $f$ – $(j-1)$-ю, у $g$ берем $(j-2)$-ю. Проведенное выше вычисление дает описание действия голоморфных отображений на 3-струю уравнения гиперповерхности вида (3.4).

Лемма 7. а) *На совокупности весовых 3-струй 2-невырожденных гиперповерхностей вида (3.4) псевдогруппа локально обратимых голоморфных отображений, сохраняющих начало координат, действует следующим образом*:

$$\begin{aligned} z &\to C\big(z + aw + 2i\langle z, \overline{a}\,\rangle z - K(z,z)\alpha\big) + O(3), \\ \zeta &\to \langle z, \overline{\alpha}\,\rangle + \beta\zeta + O(2), \\ w &\to \rho(w + 2i\langle z, \overline{a}\,\rangle w) + O(4), \end{aligned}$$

*причем* $C \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$, $\rho \in \mathbf{R}^*$, $a, \alpha \in \mathbf{C}^2$, $\beta \in \mathbf{C}^*$, *а также*

$$\langle z, \overline{z}\,\rangle = \rho\langle C^{-1}z, \overline{C^{-1}z}\,\rangle, \qquad \widetilde{K}(z,z) = \frac{\rho}{\overline{\beta}}\,K(C^{-1}z, C^{-1}z). \tag{3.6}$$

b) *Любое обратимое голоморфное отображение* $\Gamma$ *на* $\widetilde{\Gamma}$, *сохраняющее начало координат, с точностью до этого действия имеет вид*

$$z \to z + O(3), \qquad \zeta \to \zeta + O(2), \qquad w \to w + O(4). \tag{3.7}$$

Пусть речь идет об отображении гиперповерхности $\Gamma$ на себя. Тогда рассмотрим подгруппу группы автоморфизмов $\Gamma$, состоящую из линейных автоморфизмов вида

$$\begin{gathered} G_0 = \{(z \to Cz,\, \zeta \to \beta\zeta,\, w \to \rho w)\} \text{ с условием} \\ \langle Cz, \overline{Cz}\,\rangle = \rho\langle z, \overline{z}\,\rangle, \qquad K(Cz, Cz) = \frac{\rho}{\overline{\beta}}\,K(z,z). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Вычислим размерность этой группы для каждой из шести пар форм, перечисленных в лемме 6.

Лемма 8. *Пусть* $G_0^j$ *– это группа* $G_0$ *для* $j$*-й пары из списка леммы* 6. *Тогда*

$$\dim G_0^1 = 2, \qquad \dim G_0^2 = 3, \qquad \dim G_0^3 = 3, \qquad \dim G_0^4 = 2, \qquad \dim G_0^5 = 3,$$
$$\dim G_0^6 = 3, \qquad \dim G_0^7 = 3, \qquad \dim G_0^8 = 3, \qquad \dim G_0^9 = 3,$$

*т.е. в любом случае* $\dim G_0 \leqslant 3$.

Доказательство. Для пар $1^*)$–$3^*)$ $\langle z, \overline{z}\,\rangle = |z_1|^2 + |z_1|^2$, тогда $C = \lambda U$, $\rho = |\lambda|^2$, где $U \in SU(2)$, а $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Записывая $U$ в виде

$$\begin{bmatrix} p & q \\ -\overline{q} & \overline{p} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad |p|^2 + |q|^2 = 1,$$

и подставляя это во второе соотношение, получаем, что

$$(kp^2 + m\overline{q}^{\,2},\, -4i\,\mathrm{Im}\,pq,\, kq^2 + m\overline{p}^{\,2}) = \frac{|\lambda|^2}{\overline{\beta}}\,(k, 0, m).$$

Откуда $\mathrm{Im}\,pq = 0$, т.е. $q = \sigma\overline{p}$, где $\sigma$ вещественно, при этом $|p|^2(1+\sigma^2) = 1$. Пусть $p = \exp(i\phi)/\sqrt{1+\sigma^2}$, тогда имеем

$$\exp(4i\phi) = \frac{k\sigma^2 + m}{k + m\sigma^2}\,\frac{k}{m}.$$

Откуда следует, что для $U$ из малой окрестности единицы $\phi = 0$. Далее имеем либо $k = m$, либо $\sigma = 0$. Так же получаем ответ для третьей пары. Для пары $1^*)$ свободный параметр – это $\lambda$, для $2^*)$ – $(\lambda, \sigma)$, для $3^*)$ – $(\lambda, \phi)$.

Пары $4^*)$–$6^*)$ рассматриваются вполне аналогично с учетом того, что $U$ – псевдоунитарная матрица вида

$$\begin{bmatrix} p & q \\ \overline{q} & \overline{p} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad |p|^2 - |q|^2 = 1.$$

Свободные параметры – те же.

Для эрмитовой формы пар 7*)–9*) псевдоунитарная матрица с единичным определителем, близкая к единичной, имеет вид

$$\begin{bmatrix} p & i\sigma p \\ \dfrac{ir}{(1+r\sigma)p} & \dfrac{1}{(1+r\sigma)p} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad r,\sigma \in \mathbf{R}, \quad p>0.$$

Откуда получаем значения размерностей. Для пары 7*) свободные параметры – это $(\lambda, p)$, для 8*) – $(\lambda, r)$, для 9*) – $(\lambda, p)$. Лемма доказана.

Зафиксируем гиперповерхности $\Gamma$ и $\widetilde{\Gamma}$ вида (3.4) и дадим оценку числа параметров, от которых зависит отображение одной на другую вида (3.7) в соответствии со схемой рекурсии глубины $k=2$ (теорема 1). С этой целью опишем вид $\mu$-й компоненты соотношения (3.5). При этом явно выпишем слагаемые, зависящие от $\phi_\mu$ и $\phi_{\mu-1}$, игнорируя члены, зависящие от $\phi_\nu$ при $\nu \leqslant \mu-2$. Пусть $f=(f^1,f^2)$. Введем также обозначение $\Delta\psi(u) = 2i\operatorname{Re}(K(z,z)\overline{\zeta}\,)\psi'(u)$.

Лемма 9. *$\mu$-я весовая компонента выражения (3.5) $\Theta_\mu$ имеет вид*

$$\Theta_\mu = L_1(\phi_\mu) + L_2(\phi_{\mu-1}) + \theta_\mu(\phi_{\nu<\mu-1}),$$

*причем*

$$\begin{aligned} L_1(\phi) &= 2\operatorname{Re}\bigl(ih + 2\langle f,\overline{z}\,\rangle + 2\overline{K}(\overline{z},\overline{z}\,)g\bigr), \\ L_2(\phi) &= \Delta L_1(\phi) + 2\operatorname{Re}\bigl\{4K(f,z)\overline{\zeta} + 2\bigl(\overline{P}(\overline{z},\overline{z},z) + \overline{Q}(\overline{z},\overline{z},\overline{z}\,) \\ &\qquad + 2\overline{R}(\overline{z},\overline{z}\,)\zeta + S(z,\overline{z}\,)\overline{\zeta}\,\bigr)g\bigr\}, \\ &\qquad\qquad \textit{где} \quad w = u + i\langle z,\overline{z}\,\rangle. \end{aligned}$$

Отметим, что выражение $L(\phi) = L_1(\phi) + L_2(\phi)$ линейно по $\phi$ и не зависит от $\mu$. Пусть $V_4$ – линейное пространство, состоящее из ростков формальных степенных рядов в начале координат вида

$$\Phi = \phi_4 + \phi_5 + \cdots = (f_3 + f_4 + \cdots\,,\, g_2 + g_3 + \cdots\,,\, h_4 + h_5 + \cdots).$$

В соответствии с теоремой 1 число параметров, от которых может зависеть отображение вида (3.7) $\Gamma$ на $\widetilde{\Gamma}$ не превосходит размерности $\operatorname{Ker} L$ на пространстве $V_4$. Это, вместе с оценкой числа параметров в 3-струе, даст общую оценку числа параметров, от которых может зависеть отображение и, в частности, оценку размерности группы локальных автоморфизмов гиперповерхности $\Gamma$. Таким образом, для получения оценки размерности автоморфизмов 2-невырожденной гиперповерхности нам осталось дать оценку размерности $\operatorname{Ker} L$ на $V_4$.

Оператор $L$ содержит большое число произвольных постоянных. Для того чтобы упростить работу по оценке размерности ядра применим к уравнению $L(f,g,h)=0$ тот же самый прием, т. е. рекурсию на глубину два, но предварительно поменяв веса основных переменных. Зададим новые веса так:

$$[z] = [\overline{z}\,] = 2, \qquad [\zeta] = [\overline{\zeta}\,] = 1, \qquad [w] = [u] = 4.$$

Если теперь, используя новое весовое разложение $\phi = (f, g, h)$, положить $\phi_\mu = (f_{\mu-2}, g_{\mu-4}, h_\mu)$, то $\mu$-я весовая компонента $L(\phi) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} L_\mu = {} & 2\,\mathrm{Re}[ih_\mu + i\Delta(h_{\mu-1})] + 2\,\mathrm{Re}[2\langle f_{\mu-2}, \bar z\,\rangle + 2\langle \Delta(f_{\mu-3}), \bar z\,\rangle + 4K(f_{\mu-3}, z)\bar\zeta\,] \\ & + 2\,\mathrm{Re}\big[2\overline{K}(\bar z, \bar z\,)g_{\mu-4} + 2\overline{K}(\bar z, \bar z\,)\Delta(g_{\mu-5}) + \big(2\overline{R}(\bar z, \bar z\,)\zeta + S(z, \bar z\,)\bar\zeta\,\big)g_{\mu-5} \\ & + \big(2\overline{P}(\bar z, \bar z, z) + \overline{Q}(\bar z, \bar z, \bar z\,)\big)g_{\mu-6}\big], \quad \text{где} \quad w = u + i\langle z, \bar z\,\rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Лемма 10. *Размерность пространства решений* (3.9) *не превосходит размерности пространства решений* $\mathcal{L}(f, g, h) = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f, g, h) = {} & 2\,\mathrm{Re}[ih + i\Delta(h)] + 2\,\mathrm{Re}[2\langle f, \bar z\,\rangle + 2\langle \Delta f, \bar z\,\rangle + 4K(f, z)\bar\zeta\,] \\ & + 2\,\mathrm{Re}[2\overline{K}(\bar z, \bar z\,)g + 2\overline{K}(\bar z, \bar z\,)\Delta(g) + 2\overline{R}(\bar z, \bar z\,)\zeta g \\ & + S(z, \bar z\,)\bar\zeta\, g], \quad \text{где} \quad w = u + i\langle z, \bar z\,\rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Доказательство сразу следует из теоремы 1.

Отметим при этом, что рекурсия, описанная оператором $\mathcal{L}$, стартует с $\mu = 5$. При этом нас интересует размерность ядра $L$ на пространстве $V_4$ в старой весовой градуировке. Поэтому лемма 10 нуждается в небольшой коррекции. Пусть $\widetilde{V}_5$ состоит из наборов $(f, g, h)$, где $f = \widetilde{O}(3)$, $g = \widetilde{O}(2)$, $h = \widetilde{O}(5)$ в соответствии с новым весом. Непосредственно убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 11. *Если* $\phi = (f, g, h) \in V_4 \cap \mathrm{Ker}\,\mathcal{L}$, *то* $\phi \in \widetilde{V}_5$.

Доказательство. Если $\phi \in V_4$, то $\phi = \chi + \psi$, где $\psi \in \widetilde{V}_5$, а $\chi = (0, 0, \gamma\zeta^4)$. Отделяя в соотношении $\mathcal{L}(\chi + \psi) = 0$ компоненту веса четыре, получаем $\mathcal{L}(\chi) = 0$. Откуда сразу следует, что $\chi = 0$. Лемма доказана.

Переходя к оценке размерности ядра оператора $\mathcal{L}$, отметим, что оператор зависит от параметров $(k, m)$, ограничения на которые содержатся в лемме 4 (допустимые значения), и от трех коэффициентов квадратичной формы $R(z, z) = r_1 z_1^2 + r_2 z_1 z_2 + r_3 z_2^2$, которые не связаны никакими ограничениями. Также отметим, что независимо от значений параметров $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}$ содержит двумерное подпространство (тривиальные решения), которое, впрочем, не пересекается с $\widetilde{V}_5$:

$$\begin{aligned} &(f_1 = f_2 = g = 0,\ h = t_1), && t_1 \in \mathbf{R}, \\ &(f_1 = t_2 z_1,\ f_2 = t_2 z_2,\ g = 0,\ h = t_2^2 w), && t_2 \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Лемма 12. *Пусть* $\phi = (f, g, h) \in \phi \in \widetilde{V}_5 \cap \mathrm{Ker}\,\mathcal{L}$.
a) *Если* $(k = 1, m = 0)$ *(пара* $9^*$*) из леммы* 6*) и* $R(z, z) = r_1 z_1^2$, *то*

$$f_1 = i\bar n_1 z_1^1, \qquad f_2 = 2i\bar n_1 z_1 z_2 - \bar n_2 z_1^2 + n_1 w,$$
$$g = \frac{n_2 z_1 - i n_1 z_2 + 2i\bar n_1 z_1 \zeta}{1 + 2\bar r_1 \zeta}, \qquad h = 2i\bar n_1 z_1 w,$$

*где* $n_1$ *и* $n_2$ *– комплексные числа. Соответственно* $\dim(\widetilde{V}_5 \cap \mathrm{Ker}\,\mathcal{L}) = 4$.
b) *Во всех остальных случаях* $\phi = 0$. *Соответственно* $\dim(\widetilde{V}_5 \cap \mathrm{Ker}\,\mathcal{L}) = 0$.

Доказательство представляет собой рутинное, но объемное вычисление, которое осуществляется средствами компьютерной алгебры (Maple). Это вычисление проводится отдельно для пар 1*)–6*) и отдельно для 7*)–9*). Для единообразного рассмотрения пар 1*)–3*) и 4*)–6*) вводится параметр $\varepsilon = \pm 1$, учитывающий сигнатуру формы Леви. Введем также обозначения

$$\begin{gathered}\big(f_1(0,0,0,u), f_2(0,0,0,u)\big) = \big(a_1(u), a_2(u)\big) = a(u),\\ g(0,0,0,u) = b(u), \qquad h(0,0,0,u) = c(u),\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0,0,0,u) = a_{11}(u), \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(0,0,0,u) = a_{21}(u),\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(0,0,0,u) = a_{12}(u), \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(0,0,0,u) = a_{22}(u),\\ \frac{\partial g}{\partial z_1}(0,0,0,u) = b_1(u), \qquad \frac{\partial g}{\partial z_2}(0,0,0,u) = b_2(u), \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial z_1^2}(0,0,0,u) = B(u).\end{gathered}$$

Схема вычисления в первом и втором случаях отличается мелкими деталями. Опишем ее на примере второго случая (пар 7*)–9*)).

*Шаг* 1. Положим в соотношении

$$\mathcal{L}(f_1, f_2, g, h) = 0 \tag{3.12}$$

$\overline{z} = 0$, $\overline{\zeta} = 0$, получим выражение $h(z_1, z_2, \zeta, u)$ через $(a_1(u), a_2(u), b(u), c(u))$. Это выражение имеет вид

$$h(z_1, z_2, \zeta, u) = \overline{c}\,(u) + 2i\langle z, \overline{a}\,(u)\rangle + 2i\overline{b}\,(u) K(z, z).$$

При этом, подставляя $(z = 0,\ \zeta = 0)$, убеждаемся, что $\overline{c}\,(u) = c(u)$.

*Шаг* 2. Подставляем полученное значение $h$ в (3.12), вычисляем $\mathcal{L}'_{\overline{z}_1}$ и $\mathcal{L}'_{\overline{z}_2}$, подставляем $\overline{z} = 0$, $\overline{\zeta} = 0$, и из этих соотношений получаем выражения для $f_1$ и $f_2$ через $(a_1(u), a_2(u), b(u), c(u), a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. Они имеют вид

$$\begin{aligned}f_1 = a_1(u) &+ 2i\overline{b}\,'(u) m z_1 z_2^2 + 2i\overline{b}\,'(u) z_1^3 - 4\overline{m}\, z_1 \zeta \overline{b}\,(u) + c'(u) z_1 + 2i\overline{a}_2'(u) z_1^2\\ &+ 2i\overline{a}_1'(u) z_1 z_2 - \overline{b}_2(u) m z_2^2 - 2\zeta \overline{a}_2(u)\overline{m} - \overline{b}_2(u) z_1^2 - \overline{a}_{22}(u) z_1 - \overline{a}_{12}(u) z_2,\\ f_2 = a_2(u) &+ 2i\overline{b}\,'(u) m z_2^3 + 2i\overline{b}\,'(u) z_1^2 z_2 - \overline{b}_1(u) m z_2^2 - 4m z_2 \zeta \overline{b}\,(u) + c'(u) z_2\\ &+ 2i\overline{a}_2'(u) z_1 z_2 + 2i\overline{a}_1'(u) z_2^2 - \overline{b}_1(u) z_1^2 - \overline{a}_{11}(u) z_2 - \overline{a}_{21}(u) z_1 - 2\zeta \overline{a}_1(u).\end{aligned}$$

Подставляя $(z = 0,\ \zeta = 0)$, получаем

$$a_{22}(u) = c'(u) - \overline{a}_{11}(u), \qquad \operatorname{Re} a_{12}(u) = \operatorname{Re} a_{21}(u) = 0.$$

*Шаг* 3. Подставим полученные значения $f_1$ и $f_2$ в (3.12), вычислим $\mathcal{L}''_{\overline{z}_1^2}$, подставим $\overline{z} = 0$, $\overline{\zeta} = 0$, и из этого соотношения получим выражение для $g$ через $(a_1(u), a_2(u), b(u), c(u), a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1(u), b_2(u), B(u))$:

$$\begin{aligned}g = \frac{1}{2(2\overline{r}_1\zeta + 1)}\big(&2\,b(u) + 4i\overline{b}_1'(u) z_2 z_1^2 - \overline{B}(u) m z_2^2 + 12 i\zeta \overline{a}_1'(u) z_2 - 2c'(u)\zeta\\ &+ 4a_{22}(u)\zeta + 2b_1(u) z_1 - \overline{B}(u) z_1^2 + 2b_2(u) z_2 - 8\overline{b}_1(u) m\zeta z_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&{}_2i\overline{a}_{12}'(u)z_2z_1+2i\overline{a}_{12}'(u)z_1z_2+4i\overline{a}_2'(u)\zeta z_1+20imz_2^2\zeta\overline{b}'(u)-2ia_{22}(u)z_2^2\\
&+4i\overline{b}'(u)\zeta z_1^2+4\overline{b}''(u)z_2^4m+4\overline{b}''(u)z_2^2z_1^2+4\overline{a}_2'(u)z_2^2z_1\\
&+2i\overline{a}_{11}'(u)z_2^2+4i\overline{b}_1'(u)z_2^3m+2\overline{a}_1''(u)z_2^3\big).
\end{aligned}
$$

Подставляя $(z=0,\,\zeta=0)$, получаем $B=-(1/2)\overline{B}$, откуда следует, что $B=0$.

*Шаг* 4. После подстановки в (3.12) полученного выражения для $g$ мы получаем выражение, которое имеет вид вещественного полинома по $(z,\overline{z},\zeta,\overline{\zeta}\,)$, коэффициенты которого суть дифференциальные полиномы от введенных функций переменного $u$ и их производных. Приравниваем к нулю все коэффициенты. Анализ полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет завершить доказательство леммы.

## § 4. 2-невырожденные гиперповерхности специального вида

В соответствии с леммой 12 нетривиальное ядро имеется только для некоторого специального класса 2-невырожденных гиперповерхностей таких, что в каждой своей точке они могут быть заданы уравнением вида

$$
v=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)+2\operatorname{Re}(z_1^2\overline{\zeta}\,)+2\operatorname{Re}(r_1z_1^2\overline{\zeta}^{\,2})+\cdots.
$$

После замены $\zeta\to\zeta+\overline{r}_1\zeta^2$ уравнение принимает вид

$$
v=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)+2\operatorname{Re}(z_1^2\overline{\zeta}\,)+\text{мономы нового веса 7 и выше.} \tag{4.1}
$$

Для изучения таких гиперповерхностей нам будет удобно сделать перестановку координат и еще раз поменять веса. Пусть теперь

$$
[z_1]=2,\qquad [z_2]=[\zeta]=1,\qquad [w]=[u]=3.
$$

Тогда гиперповерхность (взвешенная модельная поверхность) задается соотношением

$$
Q=\big\{v=2\operatorname{Re}(z_1\overline{\zeta}+z_2\overline{\zeta}^{\,2})\big\}, \tag{4.2}
$$

при таком выборе весов $Q$ – это график квазиоднородного вещественного полинома веса 3, что позволяет применить рекурсию на глубину один и получить исчерпывающий ответ. Отметим также, что использование взвешенных модельных поверхностей применяется достаточно давно (см. [4], [10], [11]), и эта техника вполне стандартна.

Подгруппа $\mathcal{Q}$ автоморфизмов гиперповерхности $Q$, которая обеспечивает голоморфную однородность $Q$, состоит из преобразований вида

$$
\begin{gathered}
z_1\to a+z_1,\qquad z_2\to b+2\overline{a}\,\zeta+z_2,\qquad \zeta\to c+\zeta,\\
w\to d+2i\big(a\overline{b}+a^2\overline{c}+(\overline{b}+2a\overline{c}\,)z_1+\overline{a}z_2+\overline{a}^2\zeta+\overline{c}\,z_1^2\big)+w,
\end{gathered} \tag{4.3}
$$

где $(a,b,c,d)$ – произвольная точка $Q$.

Пусть $\Gamma_0$ – росток гиперповерхности в начале координат вида

$$v = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{\zeta} + z_2\overline{\zeta}^2) + O(4), \tag{4.4}$$

где $O(4)$ – слагаемые веса четыре и выше. Рассмотрим отображение $\phi = (f, g, h, e)$ этого ростка на другой росток такого же вида. Причем

$$f = z_1 + f_3 + \cdots, \quad g = z_2 + g_2 + \cdots, \quad h = \zeta + h_2 + \cdots, \quad e = w + e_4 + \cdots \tag{4.5}$$

(нижние индексы обозначают веса компонент). Тогда, записывая в виде аналитического соотношения тот факт, что это отображение переводит первую гиперповерхность во вторую, и отделяя в нем $\mu$-ю весовую компоненту, получаем

$$-\operatorname{Im} e_\mu + 2\operatorname{Re}(f_{\mu-1}\overline{\zeta} + g_{\mu-2}\overline{\zeta}^2 + h_{\mu-2}(\overline{z}_1 + 2\overline{z}_2\zeta)) = \cdots,$$

где $w = u + 2i\operatorname{Re}(z_1\overline{\zeta} + z_2\overline{\zeta}^2)$, а многоточие означает выражение, зависящее от компонент с меньшим весом (т. е. для $f$ – меньше $\mu-1$, для $g$ и $h$ – меньше $\mu-2$, для $e$ – меньше $\mu$).

Таким образом, мы видим, что размерность семейства отображений вида (4.5) контролируется размерностью ядра гомологического оператора

$$L(f, g, h, e) = 2\operatorname{Re}\bigl(ih + 2f\overline{\zeta} + 2g\overline{\zeta}^2 + 2h(\overline{z}_1 + 2\overline{z}_2\zeta)\bigr) \tag{4.6}$$

при $w = u + 2i\operatorname{Re}(z_1\overline{\zeta} + z_2\overline{\zeta}^2)$.

С другой стороны, если

$$X = 2\operatorname{Re}\left(f\,\frac{\partial}{\partial z_1} + g\,\frac{\partial}{\partial z_2} + h\,\frac{\partial}{\partial \zeta} + e\,\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

есть росток векторного поля в начале координат такой, что $(f, g, h, e)$ – голоморфно в нуле, тогда равенство $L(f, g, h, e) = 0$ равносильно тому, что $X$ – элемент алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов $Q$ в начале координат: $\operatorname{aut} Q$.

Веса, введенные нами для координат пространства, естественно продолжаются и на дифференцирования по этим координатам. Дифференцирование по $z_1$ имеет вес $(-2)$, по $z_2$ и по $\zeta$ – вес $(-1)$, по $w$ – вес $(-3)$. Это превращает $\operatorname{aut} Q$ в градуированную алгебру Ли вида $g_{-3} + g_{-2} + \cdots$. Подалгебра $g_0$ содержит градуирующее поле

$$X_0 = 2\operatorname{Re}\left(2\,\frac{\partial}{\partial z_1} + 1\,\frac{\partial}{\partial z_2} + 1\,\frac{\partial}{\partial \zeta} + 3\,\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

В такой ситуации, если некоторое поле есть элемент алгебры, то каждая его градуированная компонента – тоже. Рассуждение из работы В. Каупа [12] позволяет утверждать, что алгебра $\operatorname{aut} Q$ в таком случае обязана быть конечно градуированной (полиномиальной). Но мы не будем использовать это утверждение, а вычислим алгебру явно.

Переходим к вычислению алгебры $\operatorname{aut} Q$, которая совпадает с ядром оператора (4.6). Процедура вычисления аналогична той, что описана в доказательстве леммы 12. Однако само вычисление проще.

Введем обозначения

$$f(0,0,0,u)=a(u),\qquad g(0,0,0,u)=b(u),\qquad h(0,0,0,u)=c(u),$$
$$e(0,0,0,u)=d(u),\qquad \frac{\partial f}{\partial z_1}(0,0,0,u)=a_1(u),\qquad \frac{\partial f}{\partial \zeta}(0,0,0,u)=a_3(u),$$
$$\frac{\partial g}{\partial z_1}(0,0,0,u)=b_1(u),\qquad \frac{\partial g}{\partial \zeta}(0,0,0,u)=b_3(u),$$
$$\frac{\partial h}{\partial z_1}(0,0,0,u)=c_1(u),\qquad \frac{\partial h}{\partial \zeta}(0,0,0,u)=c_3(u),\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial z_1^2}(0,0,0,u)=B(u).$$

Положим в соотношении

$$\mathcal{L}(f,g,h,e)=0 \tag{4.7}$$

$\overline{z}_1=0$, $\overline{z}_2=0$, $\overline{\zeta}=0$, получим выражение для $h$. Это полином степени два от $(z_1,z_2,\zeta)$ с коэффициентами, зависящими от $(a(u),b(u),c(u),d(u))$. Подставляя это значение $h$ в (4.7), вычисляем $\mathcal{L}'_{\overline{\zeta}}$, подставляем $\overline{z}=0$, $\overline{\zeta}=0$, и из найденного соотношения получаем выражение для $f$, которое является полиномом степени три с коэффициентами, зависящими от $(a,a',b',c',d,a_3,b_3,c_3)$. Вычисляем $\mathcal{L}'_{\overline{z}_1}$, подставляем $\overline{z}=0$, $\overline{\zeta}=0$, и из этого соотношения получаем выражение для $h$, которое является полиномом степени два с коэффициентами, зависящими от $(a,a',b',c,c',a_1,b_1,c_1)$. Подставляя эти значения $f$ и $h$ в (4.7), вычисляем $\mathcal{L}''_{\overline{\zeta}^2}$, положим $\overline{z}=0$, $\overline{\zeta}=0$, и из найденного соотношения получим выражение для $g$, которое является полиномом степени четыре с коэффициентами, зависящими от $(a',a'',b,b',b'',c',c'',d',a_1',b_1,b_3,b_1',c_1',c_3',B)$.

Дальнейший анализ соотношения (4.7) дает

$$\operatorname{Im} d=\operatorname{Re} c_1=\operatorname{Re} B=0,\qquad b_3=ic',\qquad c_3=d'-\overline{a}_1,$$
$$a'=b'=c''=d''=a_1'=a_3=b_1'=c_1'=B'=0.$$

Подсчитаем число свободных вещественных параметров:

$$a-2,\quad b-2,\quad c-4,\quad d-2,\quad a_1-2,\quad a_3-0,\quad b_1-2,\quad b_3-0,\quad c_1-1,\quad c_3-0,\quad B-1.$$

Таким образом, получаем, что размерность $\operatorname{aut} Q$ не превосходит 16.

С другой стороны, не трудно выписать несколько младших весовых компонент $\operatorname{aut} Q$. Вот эти компоненты:

$$\begin{aligned}
g_{-3}&=\{(0,\,0,\,0,\,d)\},\\
g_{-2}&=\{(a,\,0,\,0,\,2i\overline{a}\,\zeta)\},\\
g_{-1}&=\{(-2\overline{c}\,z_2+ie\zeta,\,b,\,c,\,2i\overline{c}\,z_1+2i\overline{b}\,\zeta^2)\},\\
g_0&=\{(\alpha_1 z_1-\overline{\alpha}_2\zeta^2,\,(2\alpha_2-\alpha_3)z_2+\alpha_2\zeta,\,(\alpha_3-\overline{\alpha}_1)\zeta,\,\alpha_3 w)\},\\
g_1&=\{(2i\overline{\beta}_1 z_1\zeta+\beta_1 w,\,2i\overline{\beta}_1 z_2\zeta-i\beta_1 z_1+i\beta_2\zeta^2,\,i\overline{\beta}_1\zeta^2,\,2i\overline{\beta}_1\zeta w)\},\\
&\qquad a,b,c,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\in\mathbf{C},\qquad d,e,\alpha_3,\beta_2\in\mathbf{R}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Видим, что размерность суммы этих пяти компонент равна 16. Таким образом, алгебра вычислена. Для дальнейшего нам будет удобно представить $g_{-1}$ в виде прямой суммы $g_{-1}'+g_{-1}''$, где

$$g_{-1}'=\{(-2\overline{c}\,z_2,\,b,\,c,\,2i\overline{c}\,z_1+2i\overline{b}\,\zeta^2)\},\qquad g_{-1}''=\{(ie\zeta,\,0,\,0,\,0)\}.$$

Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 2. a) *Алгебра* $\operatorname{aut} Q$ *– это сумма пяти градуированных компонент* $g_{-3} + g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1$, *сами компоненты выписаны выше* (4.8), $\dim \operatorname{aut} Q = 16$.

b) *При этом* $\operatorname{aut}_0 Q$, *стабилизатор начала координат в* $\operatorname{aut} Q$, *т. е. поля из алгебры, обращающиеся в нуль в начале координат – это* $g''_{-1} + g_0 + g_1$, *его размерность равна* 9.

c) *Подалгебра* $g_{-3} + g_{-2} + g'_{-1}$ *– это алгебра Ли подгруппы* $\mathcal{Q}$ *(группы "сдвигов"). Причем* $Q$ *находится в естественном взаимно однозначном соответствии с* $\mathcal{Q}$. *Это позволяет перенести на* $\mathcal{Q}$ *структуру* CR-*многообразия (гиперповерхности в* $\mathbf{C}^4$).

d) *Если* $\Gamma_0$ *– росток гиперповерхности вида* (4.4), *имеет место оценка как для всей алгебры, так и отдельно для стабилизатора начала координат*:

$$\dim \operatorname{aut} \Gamma_0 \leqslant 16, \qquad \dim \operatorname{aut}_0 \Gamma_0 \leqslant 9.$$

Для полноты картины выпишем автоморфизмы, порожденные этими полями.

Алгебра $g_{-3}+g_{-2}+g'_{-1}$ соответствует группе "сдвигов" $\mathcal{Q}$ . Она параметризуется набором $(a, b, c, d)$, соответственно $\dim gs = 7$. Сама подгруппа $\mathcal{Q}$, которая обеспечивает голоморфную однородность $Q$, состоит из преобразований вида

$$\begin{gathered} z_1 \to A + z_1, \qquad z_2 \to B + 2\overline{A}\,\zeta + z_2, \qquad \zeta \to C + \zeta, \\ w \to D + 2i(A\overline{B} + A^2\overline{C} + (\overline{B} + 2A\overline{C}\,)z_1 + \overline{A}\,z_2 + \overline{A}^{\,2}\zeta + \overline{C}\,z_1^2) + w, \end{gathered} \tag{4.9}$$

где $(A, B, C, D)$ – произвольная точка $Q$;

$\dim g''_{-1} = 1$, поле $(i\zeta, 0, 0, 0)$ порождает подгруппу, которая имеет вид

$$z_1 \to z_1 + it\zeta, \qquad z_2 \to z_2, \qquad \zeta \to \zeta, \qquad w \to w.$$

Алгебра $g_0$ параметризуется набором $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, соответственно $\dim g_0 = 5$. Для вычисления группы $G_0$, соответствующей $g_0$, положим $\gamma = \alpha_1 + \overline{\alpha}_1 - \alpha_3$. Если $\gamma \neq 0$, то получаем

$$\begin{gathered} z_1 \to \left(z_1 - \overline{\alpha}_2\left(\frac{e^{\gamma t} - 1}{\gamma}\right)\zeta^2\right)e^{\alpha_1 t}, \\ z_2 \to \left(z_2 + \alpha_2\left(\frac{e^{1-\overline{\gamma}\,t}}{\overline{\gamma}}\right)\zeta\right)e^{(2\alpha_1 - \alpha_3)t}, \\ \zeta \to \zeta e^{(\alpha_3 - \overline{\alpha}_1)t}, \qquad w \to we^{\alpha_3 t}. \end{gathered}$$

Вырожденные направления $\gamma = 0$ получаем предельным переходом.

Подалгебра $g_+$ состоит из единственной компоненты $g_1$, которая параметризуется набором $(\beta_1, \beta_2)$, соответственно $\dim g_1 = 3$. Поле $(0, i\zeta^2, 0, 0)$ из $g_1$ $(\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1)$ порождает преобразование

$$z_1 \to z_1, \qquad z_2 \to z_2 + it\zeta^2, \qquad \zeta \to \zeta, \qquad w \to w. \tag{4.10}$$

Преобразования из $g_1$ при $\beta_2 = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} z_1 &\to \frac{z_1}{(1-i\overline{\beta}_1\zeta t)^2}, \qquad & z_2 &\to \frac{z_2 - i\beta_1 z_1 t}{(1-i\overline{\beta}_1\zeta t)^2}, \\ \zeta &\to \frac{\zeta}{1-i\overline{\beta}_1\zeta t}, \qquad & w &\to \frac{w}{(1-i\overline{\beta}_1\zeta t)^2}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Преобразования (4.10) и (4.11) порождают группу $G_+$, соответствующую $g_+$.

Гиперповерхность $Q$ замечательна во многих отношениях. Она представляет собой общее начало двух последовательностей гиперповерхностей пространства $\mathbf{C}^N$ при $N \geqslant 4$ (больше у них пересечений нет). Первая последовательность была рассмотрена в работе А. Лабовского [13] как пример голоморфно однородных $l$-невырожденных гиперповерхностей с произвольным $l$. Если эта гиперповерхность расположена в $\mathbf{C}^N$, то она равномерно $(N-2)$-невырождена.

С другой стороны, в недавней работе И. Зеленко и Д. Сайкса [8] была описана серия голоморфно однородных 2-невырожденных гиперповерхностей пространства $\mathbf{C}^N$ с алгеброй голоморфных автоморфизмов размерности $(N-1)^2+7$ и доказано, что эти гиперповерхности оптимальны в классе голоморфно однородных. Таким образом, никакая голоморфно однородная гиперповерхность не может иметь алгебру автоморфизмов большей размерности. Отметим, что эта работа использует технику, весьма далекую от нашей. Это дифференциальная геометрия в стиле Э. Картана и Н. Танаки.

Утверждение 2. a) *Если вещественная гиперповерхность* $\Gamma$ *всюду, кроме собственного аналитического подмножества, является* 2*-невырожденной, то для любой ее точки* $\xi$ *размерность алгебры автоморфизмов ростка гиперповерхности в этой точке* $\operatorname{aut}\Gamma_\xi$ *не превосходит* 17.

b) *Если же эта гиперповерхность в точке общего положения принадлежит специальному классу* (4.1) (*или более широкому классу* (4.4)), *то* $\dim\operatorname{aut}\Gamma_\xi \leqslant 16$.

Доказательство. Размерность $\operatorname{aut}\Gamma$ не превосходит размерности гиперповерхности, которая равна 7 плюс размерность стабилизатора точки. Для оценки стабилизатора в произвольной точке достаточно провести оценку в точке 2-невырожденности. В соответствии с теоремой 1 и всеми последующими леммами размерность стабилизатора оценивается через размерность младшей струи (леммы 3 и 6) и размерность ядра $\mathcal{L}$ на $\widetilde{V}_5$ (которая равна нулю). Размерность группы параметров $(C,\rho,\beta)$ не превышает 3. Параметры $(a,\alpha)$ дают еще 8. Итого $7+3+8=18$. Однако, чтобы получить 18 надо, чтобы орбита начала координат была 7-мерной. Это означает голоморфную однородность. Но тогда, в соответствии с [8], размерность не выше 16. Поэтому мы можем считать, что размерность орбиты меньше 7. Откуда получаем оценку $6+3+8=17$.

В случае b) мы можем воспользоваться теоремой 2, d).

Утверждение доказано.

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma$ *– голоморфно невырожденная вещественно аналитическая гиперповерхность в* $\mathbf{C}^4$, *точка* $\xi \in \Gamma$ *и* $\Gamma_\xi$ *– росток* $\Gamma$ *в точке* $\xi$. *Пусть* $\operatorname{aut}\Gamma_\xi$ *– алгебра Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов ростка. Тогда*

1) $\dim \operatorname{aut} \Gamma_\xi \leqslant 24$;

2) *если известно, что* $\Gamma$ *является* 2*-невырожденной всюду, кроме собственного аналитического подмножества, то можно утверждать, что* $\dim \operatorname{aut} \Gamma_\xi \leqslant 17$;

3) *если известно, что* $\Gamma$ *является* 3*-невырожденной всюду, кроме собственного аналитического подмножества, то можно утверждать, что* $\dim \operatorname{aut} \Gamma_\xi \leqslant 20$.

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma_\xi$ *– росток произвольной вещественно аналитической гиперповерхности в* $\mathbf{C}^4$ *такой, что* $\dim \operatorname{aut} \Gamma_\xi = 24$, *тогда* $\Gamma_\xi$ *эквивалентен одной из двух стандартных невырожденных гиперквадрик* (*т. е. Леви-невырожден и сферичен*).

Доказательство. Если $\Gamma_\xi$ не является Леви-невырожденной в общей точке, то, как следует из теоремы 3, размерность не превосходит 20. Таким образом, $\Gamma_\xi$ Леви-невырождена в общей точке. Если она там не сферична, то, как доказано в [14], размерность не превосходит 13. Поэтому она сферична. Но тогда, в соответствии с результатом Б. Кругликова [15], если $\Gamma_\xi$ не эквивалентна гиперквадрике (произвольной сигнатуры), то размерность не выше 17. Теорема доказана.

Аналогичные оценки для $\mathbf{C}^2$ и $\mathbf{C}^3$ – это 8 и 15. Они также достигаются только на гиперквадриках. Проблемными, как и в $\mathbf{C}^4$, являются гиперповерхности, которые в общей точке являются сферическими. Результат для $\mathbf{C}^2$ – это работа И. Коссовского и Р. Шафикова [16], а для $\mathbf{C}^3$ – А. Исаева и Б. Кругликова [17].

Эти результаты вместе с известным критерием конечномерности дают следующий список возможностей. Пусть $d = \dim \operatorname{aut} \Gamma_\xi$. Тогда

1) $d = \infty$ тогда и только тогда, когда $\Gamma$ голоморфно вырождена;

2) $d = 24$ тогда и только тогда, когда $\Gamma$ эквивалентна одной из двух невырожденных стандартных гиперквадрик;

3) если $\Gamma_\xi$ несферичен, но $\Gamma$ сферична в точке общего положения, то $d \leqslant 17$;

4) если $\Gamma$ в точке общего положения 1-невырождена (Леви-невырождена) и несферична, то $d \leqslant 13$;

5) если $\Gamma$ – 2-невырождена в точке общего положения, то $d \leqslant 17$;

6) если $\Gamma$ – 2-невырождена в точке общего положения и однородна (в окрестности $\xi$), то $d \leqslant 16$;

7) если $\Gamma$ – 3-невырождена в точке общего положения, то $d \leqslant 20$.

В этом списке оценки пунктов 1) и 2) точны. То же следует сказать и о п. 3). Действительно, в работе [15] имеется пример гиперповерхности такого типа, для которой оценка 17 реализуется. То же самое касается и п. 4). В [14] имеется пример такой гиперповерхности, у которой размерность алгебры автоморфизмов равна 13. Пункт 6) также точен и подкреплен примером. Поэтому для точной оценки из п. 5) есть ровно две возможности – 16 и 17. Последний п. 7) самый неопределенный. Пока можно сказать только, что максимум не меньше 8 и не больше 20. Поэтому уместно сформулировать следующий вопрос.

Вопрос 1. Каковы точные значения максимумов из пунктов 5) и 7)?

Вопрос 2. Верно ли, что альтернатива остается верной для гиперповерхностей размерности 5 и выше? А именно, либо бесконечность, либо не больше, чем у гиперквадрики, у которой в $\mathbf{C}^N$ размерность $(N+1)^2-1$.

У этого довольно старого вопроса [4] есть более общая версия (см. [18, предположения (5.a), (5.b)]). Верно ли, что максимум размерности локальных автоморфизмов достигается на невырожденных модельных поверхностях?

## Список литературы


1. H. Poincare, "Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **23** (1907), 185–220.
2. S. S. Chern, J. K. Moser, "Real hypersurfaces in complex manifolds", *Acta Math.*, **133** (1974), 219–271.
3. В. К. Белошапка, "Симметрии вещественных гиперповерхностей трехмерного комплексного пространства", *Матем. заметки*, **78**:2 (2005), 171–179; англ. пер.: V. K. Beloshapka, "Symmetries of real hypersurfaces in complex 3-space", *Math. Notes*, **78**:2 (2005), 156–163.
4. V. K. Beloshapka, "Automorphisms of degenerate hypersurfaces in $\mathbf{C}^2$ and a dimension conjecture", *Russ. J. Math. Phys.*, **4**:3 (1996), 393–396.
5. M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild, "CR automorphisms of real analytic manifolds in complex space", *Comm. Anal. Geom.*, **6**:2 (1998), 291–315.
6. G. Fels, W. Kaup, "Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5", *Acta Math.*, **201**:1 (2008), 1–82.
7. A. Santi, "Homogeneous models for Levi degenerate CR manifolds", *Kyoto J. Math.*, **60**:1 (2020), 291–334.
8. D. Sykes, I. Zelenko, *Maximal dimension of groups of symmetries of homogeneous* 2*-nondegenerate CR-structures of hypersurface type with a* 1*-dimensional Levi kernel*, arXiv: 2102.08599.
9. Г. Е. Изотов, "О совместном приведении квадратичной и эрмитовой форм", *Изв. вузов. Матем.*, 1957, № 1, 143–159.
10. А. Е. Ершова, "Автоморфизмы 2-невырожденных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$", *Матем. заметки*, **69**:2 (2001), 214–222; англ. пер.: A. E. Ershova, "Automorphisms of 2-nondegenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$", *Math. Notes*, **69**:2 (2001), 188–195.
11. M. Kolar, F. Meylan, D. Zaitsev, "Chern–Moser operators and polynomial models in CR geometry", *Adv. Math.*, **263** (2014), 321–356.
12. W. Kaup, "Einige Bemerkungen über polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten", *Math. Ann.*, **204** (1973), 131–144.
13. А. С. Лабовский, "О размерности группы биголоморфных автоморфизмов вещественно-аналитических гиперповерхностей", *Матем. заметки*, **61**:3 (1997), 349–358; англ. пер.: A. S. Labovskii, "On dimensions of the groups of biholomorphic automorphisms of real-analytic hypersurfaces", *Math. Notes*, **61**:3 (1997), 287–294.
14. B. Kruglikov, "Submaximally symmetric CR-structures", *J. Geom. Anal.*, **26**:4 (2016), 3090–3097.
15. B. Kruglikov, "Blow-ups and infinitesimal automorphisms of CR-manifolds", *Math. Z.*, **296**:3-4 (2020), 1701–1724.
16. I. Kossovskiy, R. Shafikov, "Analytic differential equations and spherical real hypersurfaces", *J. Differential Geom.*, **102**:1 (2016), 67–126.

17. A. Isaev, B. Kruglikov, "On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds", *Adv. Math.*, **322** (2017), 530–564.
18. V. K. Beloshapka, "$CR$-manifolds of finite Bloom–Graham type: the model surface method", *Russ. J. Math. Phys.*, **27**:2 (2020), 155–174.

Валерий Константинович Белошапка
(Valerii K. Beloshapka)
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
*E-mail*: vkb@strogino.ru

Поступило в редакцию
22.07.2021
30.09.2021