В. К. Белошапка, С. Н. Бычков, Об одном свойстве выпуклых гиперповерхностей в $\mathbf{C}^n$, *Матем. заметки*, 1986, том 40, выпуск 5, 621–626

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 40, № 5 (1986)

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbf{C}^n$

В. К. Белошапка, С. Н. Бычков

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выпуклая гиперповерхность G в $\mathbf{C}^n$ расслаивается на комплексные гиперплоскости. Тогда все эти гиперплоскости параллельны между собой.*

Теорема представляет комплексный аналог известного результата из дифференциальной геометрии (см., например, [1, с. 297]): *среди линейчатых поверхностей в* $\mathbf{R}^3$ *выпуклыми могут быть только развертывающиеся поверхности* (т. е. *цилиндры, конусы и поверхности касательных*).

Доказательство теоремы 1 удобно разобрать сначала на примере дважды дифференцируемых выпуклых гиперповерхностей в $\mathbf{C}^2$. Этот частный случай рассматривается особенно просто благодаря возможности аналитического выражения условия выпуклости в терминах второй квадратичной формы. Доказательство общего случая, когда на гиперповерхность G, помимо того, что она является границей (или частью границы) некоторой выпуклой области, не накладывается никаких дополнительных ограничений на гладкость, получается путем надлежащего обобщения этих рассуждений.

1. Гиперповерхность G в $\mathbf{C}^2$, расслаивающаяся на комплексные прямые $\pi(t)$, может быть представлена в виде

$$\mathbf{r}(t, u, v) = \boldsymbol{\rho}(t) + \mathbf{a}(t)(u + iv), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\rho}(t)$ — кривая, пересекающая каждую комплексную прямую $\pi(t)$ в одной точке, $\mathbf{a}(t)$ — «направляющий» вектор комплексной прямой $\pi(t)$, $u+iv$ — комплексный параметр, область изменения которого, вообще говоря, зависит от t[1]).

Выпуклость дважды гладкой гиперповерхности (1) равносильна неотрицательности ее второй квадратичной формы

$$d^2\mathbf{r}\mathbf{n}=\mathbf{r}_{tt}\mathbf{n}\,dt^2+2\mathbf{r}_{ut}\mathbf{n}\,du\,dt+2\mathbf{r}_{vt}\mathbf{n}\,dv\,dt,$$

где $\mathbf{n}=(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$ — единичный вектор внутренней нормали. Отсюда в свою очередь вытекает, что

$$\mathbf{r}_{ut}\mathbf{n}=\mathbf{a}_t\mathbf{n}=0,\quad \mathbf{r}_{vt}\mathbf{n}=(i\mathbf{a}_t)\,\mathbf{n}=0. \tag{2}$$

Без ограничения общности можно считать, что $n_1^2+n_2^2\neq 0$, а направляющий вектор $\mathbf{a}(t)=(\alpha+i\beta,\ 1+i0)=(\alpha,\ \beta,\ 1,\ 0)$. В этом случае равенства (2) записываются в виде

$$\begin{cases}\dot{\alpha}n_1+\dot{\beta}n_2=0,\\ -\dot{\beta}n_1+\dot{\alpha}n_2=0.\end{cases}$$

Так как определитель системы $n_1^2+n_2^2\neq 0$, то

$$\dot{\alpha}=\dot{\beta}=0,$$

что означает параллельность комплексных прямых в случае, когда гиперповерхность G дважды дифференцируема.

2. Доказательство теоремы для выпуклых гиперповерхностей произвольной размерности легко выводится из частного случая $n=2$ и отнесено в конец доказательства теоремы 1. Последующее изложение имеет целью обобщить рассуждения п. 1 на выпуклые гиперповерхности в $\mathbf{C}^2$ общего вида (т. е. не обязательно гладкие).

Кривую $\boldsymbol{\rho}(t)$ и вектор $\mathbf{a}(t)$ в представлении (1) удобно для дальнейшего выбрать следующим образом. В качестве $\boldsymbol{\rho}(t)$ возьмем пересечение гиперповерхности G с комплексной прямой $z_2=0$ (параметр t при этом пусть изменяется вдоль координатной оси Ox_1, так что точка $\boldsymbol{\rho}(t)$ проектируется в точку t на оси). Вектор $\mathbf{a}(t)$, параллель-

---

[1]) Векторы $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{a}$, входящие в соотношение (1), можно рассматривать и как элементы $\mathbf{C}^2$, и как векторы в $\mathbf{R}^4$ (умножение на i в последнем случае понимается как линейное преобразование в $\mathbf{R}^4$, индуцированное комплексным линейным преобразованием $\mathbf{a}\mapsto i\mathbf{a}$ в $\mathbf{C}^2$). Данное обстоятельство позволяет рассматривать вторую квадратичную форму гиперповерхности G непосредственно в представлении (1).

ный комплексной прямой $\pi(t)$, выберем так, чтобы конец вектора $\boldsymbol{\rho}(t)+\mathbf{a}(t)$ совпадал с точкой пересечения комплексных прямых $\pi(t)$ и $z_2=1$ (предположение о том, что гиперповерхность G пересекает плоскость $z_2=1$, очевидно, не ограничивает общности). В таком случае $\mathbf{a}(t)=(\alpha+i\beta,\ 1+i0)$.

Пусть E — множество значений параметра t, при которых вектор-функции $\boldsymbol{\rho}(t)$ и $\mathbf{a}(t)$ дифференцируемы. Покажем, что при $t^* \in E$

$$\dot{\alpha}(t^*)=\dot{\beta}(t^*)=0. \tag{3}$$

Так как гиперповерхность G выпукла, то скалярное произведение приращения

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t^*+\Delta t,\ \Delta u,\ \Delta v)-\mathbf{r}(t^*,\ 0,\ 0)$$

вектор-функции (1) и вектора $\mathbf{n}$ внутренней нормали (выпуклая гиперповерхность G имеет единственную опорную гиперплоскость в точке $\mathbf{r}(t^*, 0, 0)$ в силу дифференцируемости $\boldsymbol{\rho}(t)$) неотрицательно при любых допустимых приращениях Δt, Δu, Δv. В силу дифференцируемости $\boldsymbol{\rho}(t)$ и $\mathbf{a}(t)$ $\Delta\mathbf{r}$ можно представить в виде

$$\Delta\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}_t\,\Delta t+\mathbf{a}(\Delta u+i\Delta v)+\mathbf{a}_t\Delta t\,(\Delta u+i\Delta v)+o(\Delta t).$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{\rho}_t$, $\mathbf{a}$ и $i\mathbf{a}$ лежат в опорной гиперплоскости к G, проведенной в точке $\mathbf{r}(t^*, 0, 0)$, то они ортогональны $\mathbf{n}$ и

$$\Delta\mathbf{r}\mathbf{n}=\mathbf{a}_t\mathbf{n}\Delta u\Delta t+(i\mathbf{a}_t)\,\mathbf{n}\Delta v\Delta t+o(\Delta t)\geqslant 0. \tag{4}$$

Соотношения

$$\mathbf{a}_t\mathbf{n}=(i\mathbf{a}_t)\,\mathbf{n}=0,$$

вытекающие из неравенства (4) и выполняющиеся при $t^* \in E$, обобщают равенства (2), выведенные в предположении, что G — дважды гладкая гиперповерхность, на выпуклые гиперповерхности общего вида. Повторяя рассуждения из п. 1, следующие за (2), мы докажем в итоге (3).

ЛЕММА. *Функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ удовлетворяют условию Липшица.*

Доказательство. Выпуклая поверхность $G'=G\cap\{\mathrm{Im} z_2=0\}$ расслаивается на отрезки $l(t)$, лежащие на прямых с направляющими векторами $\mathbf{a}'(t)=(\alpha,\ \beta,\ 1)$. Уменьшая, если необходимо, область изменения параметра t, можно считать, что выпуклая поверхность G' однозначно проектируется на плоскости Ox_1x_3 и Ox_2x_3.

Спроектируем поверхность G' на плоскость Ox_1x_3. Из биективности проекции следует, что проекции $\tilde{l}(t)$ отрезков $l(t)$ не имеют точек пересечения внутри некоторой полосы $-\varepsilon \leqslant x_3 \leqslant \varepsilon$ (без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon = 1$). Пусть A_1 и A_2 — точки пересечения отрезков $\tilde{l}(t_1)$ и $\tilde{l}(t_2)$ с прямой $x_3 = 1$ (их координаты $(t_1 + \alpha(t_1), 0,1)$ и $(t_2 + \alpha(t_2), 0, 1)$). Так как отрезки $\tilde{l}(t_1)$ и $\tilde{l}(t_2)$ пересекаются вне полосы $-1 \leqslant x_3 \leqslant 1$, то длина отрезка A_1A_2 не превосходит удвоенного расстояния между точками пересечения этих отрезков с прямой $x_3 = 0$ (расстояние между ними равно $|t_2 - t_1|$). Отсюда вытекает, что $|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \leqslant |t_2 - t_1|$.

Совершенно аналогично доказывается, что вторая компонента β вектора $\mathbf{a}'$ удовлетворяет условию Липшица относительно переменной x_2 — второй координаты точки $\rho(t)$. В силу локального характера задачи кривую $\rho(t)$ можно рассматривать как график выпуклой функции $x_2 = \varphi(t)$, которая, очевидно, является липшицевой относительно t. Отсюда следует, что сложная функция $\beta[x_2(t)]$ также удовлетворяет условию Липшица. Лемма доказана.

Из леммы следует, что функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ абсолютно непрерывны. Так как абсолютно непрерывная функция почти в каждой точке имеет конечную производную, то множество E, определенное выше, имеет полную меру (функция $\rho(t)$ дифференцируема всюду, за исключением, быть может, счетного числа точек в силу выпуклости кривой $\rho(t)$). Ввиду того, что производные абсолютно непрерывных функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ обращаются в нуль согласно (3) при $t^* \in E$, а множество E имеет полную меру, эти функции должны быть постоянными для всех t (см. [2, с. 229]). Тем самым для $n = 2$ теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы для случая, когда выпуклая гиперповерхность $G \subset \mathbf{C}^n$ легко получается из разобранного частного случая $n = 2$.

Рассечем гиперповерхность G произвольной двумерной комплексной плоскостью σ. Комплексные прямые, на которые расслаивается выпуклая поверхность $\bar{G} = G \cap \sigma$, дожны быть параллельны между собой в силу доказанного выше. Так как выбор σ произволен, то отсюда следует параллельность комплексных гиперплоскостей, на которые расслаивается исходная гиперповерхность $G \subset \mathbf{C}^n$. Теорема 1 доказана.

3. Доказанный результат может быть использован при исследовании частного случая одной задачи комплексного анализа, восходящей к У. Рудину [3]: насколько мала (в том или ином смысле) может быть граница Шилова области в $\mathbf{C}^n$ [1])?

А. Г. Витушкин предположил [5], что метрическая размерность границы Шилова области $D \subset \mathbf{C}^n$ не меньше n (история вопроса и связь гипотезы Витушкина с исходной формулировкой Рудина изложена в [6]). Для частного случая, когда D — выпуклая область в $\mathbf{C}^2$, предположение Витушкина доказано в [6]. Следующее утверждение уточняет последний результат.

ТЕОРЕМА 2. *Двумерная мера Хаусдорфа границы Шилова $S(D)$ ограниченной выпуклой области D в* $\mathbf{C}^2$ *удовлетворяет неравенству*

$$\Lambda^2(S(D)) \geqslant c\sqrt{V}, \tag{5}$$

где V — объем области D, c — положительная константа, одна и та же для всех областей.

Для выпуклых многогранников в $\mathbf{C}^2$, граница Шилова которых совпадает с объединением их двумерных некомплексных граней [7], сформулированное утверждение доказано в [8] (с константой $c = 1/40$). Теорема 1 позволяет обобщить неравенство (5) с частного случая многогранников на произвольные выпуклые области в $\mathbf{C}^2$.

Граница Шилова ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbf{C}^2$ допускает простое геометрическое описание [6]: ее дополнение $\partial D \setminus S(D)$ состоит из таких точек, в окрестности которых граница ∂D области расслаивается на комплексные прямые, т. е. может быть представлена в виде (1). Из теоремы 1 вытекает, что комплексные прямые, на которые расслаивается каждая из связных компонент дополнения $\partial D \setminus S(D)$, параллельны между собой. Ввиду того, что доказательство неравенства (5) для много-

---

[1]) *Границей Шилова области* $D \subset \mathbf{C}^n$ называется такое замкнутое множество $S \subset \partial D$, что 1) для любой функции $f(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$,

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in S} |f(z)|,$$

и 2) любое замкнутое множество $\widetilde{S}$, обладающее свойством 1), содержит S [4, с. 33].

гранников (см. [8, с. 54—72]) опирается по существу только на указанное свойство параллельности комплексных прямых (для многогранников этот факт очевиден, поскольку в вещественной гиперплоскости в $\mathbf{C}^2$ содержится только одна, с точностью до параллельного переноса, комплексная прямая), оно без каких-либо изменений переносится на выпуклые области общего вида с тем же самым значением константы c.

Интересной, но весьма трудной представляется задача определения точного значения константы c в неравенстве (5). Кажется правдоподобным, что наименьшую двумерную хаусдорфову меру среди выпуклых областей заданного объема имеют бидиски, что соответствует значению $c = 4\pi$. Если бы данное предположение оказалось верным, оно давало бы комплексный аналог известного «изопериметрического неравенства».

Отметим, что требование выпуклости в сформулированном выше предположении является существенным: можно построить пример невыпуклой области в $\mathbf{C}^2$, объем которой равен 1, а двумерная мера границы Шилова меньше любого наперед заданного положительного числа [8, с. 72].

Авторы благодарят А. Г. Витушкина за внимание, проявленное к работе.

Поступило
18.05.84
Переработанный
вариант
10.02.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979.
[2] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
[3] Function Algebras/Ed. F. Birtel. Chicago: Scott-Foresman. 1966. P. 349. Problem 3.
[4] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, ч. II. М.: Наука, 1976.
[5] Витушкин А. Г. Об одной задаче В. Рудина // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 1. С. 14—15.
[6] Бычков С. Н. О геометрических свойствах границы области голоморфности. Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44. № 1. С. 46—62.
[7] Bremermann H. Die Charakterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen // Math. Ann. 1958. V. 136. P. 173—186.
[8] Бычков С. Н. Диссертация, М., 1980.