ОДНОРОДНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{C}^4$, АССОЦИИРОВАННЫЕ С 5-МЕРНОЙ ВПОЛНЕ НЕВЫРОЖДЕННОЙ КУБИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ CR-ТИПА $(1,3)$.

В.К.БЕЛОШАПКА И МАСУД САБЗЕВАРИ

Аннотация. Рассматривается действие на пространстве $\mathbb{C}^4$ 7-мерной группы Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов вполне невырожденной кубической модельной поверхности Q CR-типа $(1,3)$. Найдены все орбиты данного действия и дана их биголоморфная классификация. Одна из орбит совпадает с поверхностью Q (5-мерная орбита), две из них 6-мерны, а вся оставшаяся часть пространства $\mathbb{C}^4$, за вычетом упомянутых орбит, слоится на 7-мерные вещественные орбиты. Также доказано, что алгебра инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов всех орбит, за исключением двенадцати голоморфно вырожденных орбит, совпадает с алгеброй поверхности Q.

Пусть M_ξ – росток гладкого вещественного порождающего подмногообразия пространства $\mathbb{C}^N$. Пусть n – это его CR-размерность, а d – коразмерность. В этом случае $n+d=N$. Пару (n,d) мы называем CR-типом.

Пусть $\operatorname{aut} M_\xi$ – это алгебра Ли, состоящая из ростков вещественных векторных полей, порождающих однопараметрические группы голоморфных преобразований в окрестности точки ξ, сохраняющих M_ξ; $\operatorname{aut}_\xi M_\xi$ – подалгебра алгебры $\operatorname{aut} M_\xi$, состоящая из полей $X \in \operatorname{aut} M_\xi$, т.ч. $X(\xi)=0$; $\operatorname{Aut} M_\xi$ – локальная группа, порожденная полями из $\operatorname{aut} M_\xi$; $\operatorname{Aut}_\xi M_\xi$ состоит из преобразований $\phi \in \operatorname{Aut} M_\xi$, т.ч. $\phi(\xi)=\xi$. Если M_ξ имеет конечный тип по Блуму-Грэму, тогда с этим ростком можно связать некоторую вещественно алгебраическую поверхность Q того же типа – касательную модельную поверхность [5]. Модельные поверхности интересны по многим причинам. Например,

$$\dim \operatorname{Aut} M_\xi \leq \dim \operatorname{Aut} Q.$$

В [3], [4], было изучено действие группы голоморфных автоморфизмов модельной поверхности CR-типа $(1,2)$ в $\mathbb{C}^3$ и описаны все его орбиты. В данной работе мы рассматриваем аналогичный вопрос, имеющий отношение к пространству $\mathbb{C}^4$. А именно, для модельной поверхности Q

Date: 2020-10-15.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32V40, 22F30, 32A38.

CR-типа $(1,3)$ мы изучаем действие 7-мерной группы ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,Q$ в пространстве $\mathbb{C}^4$ и вычисляем все его орбиты.

С точностью до биголоморфной эквивалентности существует лишь одна вполне невырожденная 5-мерная модельная поверхность Q типа $(1,3)$. В координатах $(z, w_j := u_j + iv_j), j = 1,2,3$ пространства $\mathbb{C}^4$ она задана соотношениями

$$(1)\qquad \begin{cases} v_1 = z\overline{z}, \\ v_2 = z^2\overline{z} + z\overline{z}^2, \\ v_3 = -i\,(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2). \end{cases}$$

Локальная группа всех обратимых в начале координат голоморфных преобразований $\mathbb{C}^4$, сохраняющих росток Q в начале координат, представляет собой 7-мерную группу Ли $\mathrm{Aut}\,Q$ треугольно-полиномиальных преобразований вида

$$(2)\qquad \begin{aligned} &z \mapsto \lambda\,\gamma\,z + p,\\ &w_1 \mapsto 2\,i\,\lambda\,\gamma\,\overline{p}\,z + \lambda^2 w_1 + i\,|p|^2 + q_1,\\ &w_2 \mapsto 2\,i\,\lambda\,\gamma\big(2\,|p|^2 + \overline{p}^2\big)\,z + 2\,i\,\lambda^2\gamma^2\overline{p}\,z^2\\ &\qquad\qquad + 4\,\lambda^2\mathrm{Re}p\,w_1 + \lambda^3\big(\mathrm{Re}\gamma\,w_2 - \mathrm{Im}\gamma\,w_3\big) + 2\,i\,\mathrm{Re}(p^2\overline{p}) + q_2,\\ &w_3 \mapsto 2\,\lambda\,\gamma\big(2\,|p|^2 - \overline{p}^2\big)\,z + 2\,\lambda^2\gamma^2\overline{p}\,z^2\\ &\qquad\qquad + 4\,\lambda^2\mathrm{Im}p\,w_1 + \lambda^3\big(\mathrm{Im}\gamma\,w_2 + \mathrm{Re}\gamma\,w_3\big) + 2\,i\,\mathrm{Im}(p^2\overline{p}) + q_3, \end{aligned}$$

где $\gamma, p \in \mathbb{C}$ и $\lambda, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ при $|\gamma| = 1$ и $\lambda > 0$. Эту группу в дальнейшем мы будем обозначать через G. Нетрудно заметить, что орбита начала координат действия группы G совпадает с Q.

Алгебра Ли $\mathrm{aut}\,Q$, соответствующая группе Ли G, порождена полями

$$(3)\qquad \begin{aligned} &X_1 := 2\,\mathrm{Re}\,(\partial_{w_1}),\\ &X_2 := 2\,\mathrm{Re}\,(\partial_{w_2}),\\ &X_3 := 2\,\mathrm{Re}\,(\partial_{w_3}),\\ &X_4 := 2\,\mathrm{Re}\,(\partial_z + (2iz)\,\partial_{w_1} + (2iz^2 + 4w_1)\,\partial_{w_2} + 2z^2\,\partial_{w_3}),\\ &X_5 := 2\,\mathrm{Re}\,(i\,\partial_z + (2z)\,\partial_{w_1} + (2z^2)\,\partial_{w_2} - (2iz^2 - 4w_1)\,\partial_{w_3}),\\ &X_6 := 2\,\mathrm{Re}\,(z\,\partial_z + 2w_1\,\partial_{w_1} + 3w_2\,\partial_{w_2} + 3w_3\,\partial_{w_3}),\\ &X_7 := 2\,\mathrm{Re}\,(iz\,\partial_z - w_3\,\partial_{w_2} + w_2\,\partial_{w_3}). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем обозначать эту алгебру через g.

Если ввести веса переменных и дифференцирований следующим образом: $[z] = 1$, $[w_1] = 2$, $[w_2] = [w_3] = 3$, $[\partial_z] = -1$, $[\partial_{w_1}] = -2$, $[\partial_{w_2}] = [\partial_{w_3}] = -3$, то она становится градуированной алгеброй Ли вида:

$$(4)\qquad \mathrm{aut}\,Q = \underbrace{g_{-3} + g_{-2} + g_{-1}}_{g_-} + g_0,$$

где g_t – это поля веса t. В соответствии с этой градуировкой $[X_2] = [X_3] = -3$, $[X_1] = -2$, $[X_4] = [X_5] = -1$, $[X_6] = [X_7] = 0$.

Обозначим через G_- и G_0 группы Ли, соответствующие алгебрам Ли g_- и g_0. При этом G_0 – это стабилизатор группы автоморфизмов поверхности Q в начале координат. Эта подгруппа состоит из преобразований

$$
\begin{gathered}
z \mapsto \lambda\,\gamma\, z, \quad w_1 \mapsto \lambda^2 w_1, \\
w_2 \mapsto \lambda^3\big(\mathrm{Re}\gamma\, w_2 - \mathrm{Im}\gamma\, w_3\big), \quad w_3 \mapsto \lambda^3\big(\mathrm{Im}\gamma\, w_2 + \mathrm{Re}\gamma\, w_3\big),
\end{gathered} \tag{5}
$$

где $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$, $\lambda > 0$.

Приведем небольшой список очевидных свойств введенных объектов:

Утверждение 1:
(a) $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ - базис g_-, (X_6, X_7) - базис g_0;
(b) $G = G_- \ltimes G_0$. Топологически G_- - это $\mathbb{R}^5$. Группа G_0 изоморфна мультипликативной группе комплексных чисел $\mathbb{C}^*$. Таким образом G - связна (но не односвязна) и порождается полями из g.
(c) Группа G_- действует на Q - транзитивно, т.е. Q совпадает с орбитой начала координат. Более того, на G_- можно ввести структуру вложенного в $\mathbb{C}^4$ CR-многообразия эквивалентного Q.

Положим

$$
\begin{aligned}
\Phi(z, \overline{z}, v_1, v_2, v_3) &:= v_1 - z\overline{z}, \\
\Psi_1(z, \overline{z}, v_1, v_2, v_3) &:= v_2 + z^2\overline{z} + z\overline{z}^2 - 2\, v_1(z + \overline{z}), \\
\Psi_2(z, \overline{z}, v_1, v_2, v_3) &:= v_3 - i\,(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2) + 2i\, v_1(z - \overline{z}),
\end{aligned}
$$

тогда $Q = \{\Phi = \Psi_1 = \Psi_2 = 0\}$.

Сформулируем основной результат данной работы.

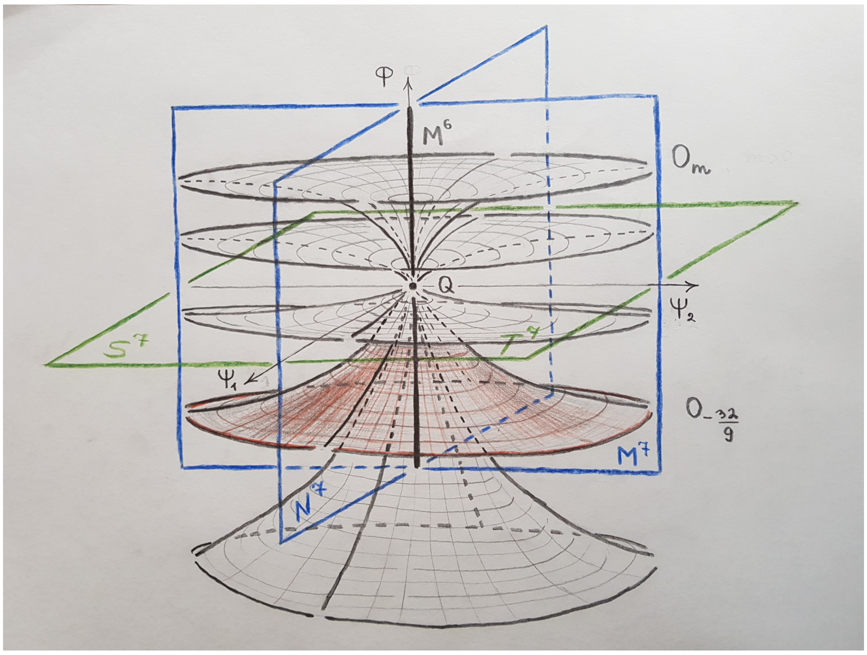
Теорема: (a) С точностью до локально биголоморфной эквивалентности все орбиты действия $G = \mathrm{Aut}\, Q$ в пространстве $\mathbb{C}^4$ распадаются на пять типов, представленных в таблице:

dim	Орбита	Соотношения	dim aut	Вырожденность
5	Q	$\Phi = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$	7	Вполне невырожденна
6	$+M^6$ $-M^6$	$\Phi > 0,\ \Psi_1 = \Psi_2 = 0$ $\Phi < 0,\ \Psi_1 = \Psi_2 = 0$	7	Вполне невырожденна
7	M^7	$\Psi_1 = 0\ \Psi_2 > 0$	∞	Голоморфно вырожденна
7	$O_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} > 0$ $O_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} < 0$	$\mathbf{m}\Phi^3 = \Psi_1^2 + \Psi_2^2,$ $\Phi > 0, \Psi_1 > 0, \Psi_2 > 0$ $\mathbf{m}\Phi^3 = \Psi_1^2 + \Psi_2^2,$ $\Phi < 0, \Psi_1 > 0, \Psi_2 > 0$	7 $7,\ \mathbf{m} \neq -\frac{32}{9}$ $\infty,\ \mathbf{m} \neq -\frac{32}{9}$	Леви-невырожденна Леви-невырожденна при $\mathbf{m} \neq -\frac{32}{9}$ Голоморфно вырожденна при $\mathbf{m} = -\frac{32}{9}$
7	S^7	$\Phi = 0, \Psi_1 > 0, \Psi_2 > 0$	∞	Голоморфно вырожденна

Каждому типу M^7, S^7, и $O_{\mathbf{m}}$ соответствует четыре голоморфно эквивалентных орбиты. Орбиты остальных типов представлены в таблице явно.

(b) Орбиты разных типов попарно голоморфно неэквивалентны. То же касается орбит $O_{\mathbf{m}}$ для разных $\mathbf{m}$.
(c) Ни одна из орбит, кроме Q, не является *сферической* (т.е. не эквивалентна своей касательной модельной поверхности).
(d) Все орбиты имеют конечный тип по Блуму-Грэму. Блум-Грэм-тип Q равен $(2,3,3)$, для $\pm M^6$ – $(2,2)$, тип $M^7, O_{\mathbf{m}}, S^7$ – (2). Среди орбит присутствуют все возможные в $\mathbb{C}^4$ CR-типы, а именно, тип Q равен $(1,3)$, для $\pm M^6$ – $(2,2)$, тип $M^7, O_{\mathbf{m}}, S^7$ – $(3,1)$.

Приведенный ниже рисунок условно демонстрирует разбиение пространства на орбиты. Мы даем картину в $\mathbb{R}^3$ с координатами (Ψ_1, Ψ_2, Φ).



Доказательство этой теоремы будет дано ниже.

Ясно, что орбиты действия группы G не менее чем пятимерны, и не более чем семимерны.

Сформулируем следующее, вполне очевидное, вспомогательное утверждение:

Лемма 2: Пусть B – гладкое многообразие, на котором диффеоморфизмами действует связная группа Ли $\mathscr{L}$, и l – ее алгебра Ли, состоящая из векторных полей. Пусть K_j – связная компонента множества точек B, в которых алгебра l имеет ранг j. Если K_j - это подмногообразие размерности j, то K_j – орбита действия группы $\mathscr{L}$.
Доказательство: Из того, что ранг l в произвольной точке K_j равен j следует, что действие G на K_j – локально транзитивно. Поэтому орбита

произвольной точки открыта в K_j. В силу связности K_j отсюда следует, что орбита совпадает с K_j. Лемма доказана.

Переходя к вещественным координатам $z = x+iy$ и $w_j = u_j+iv_j,\ j = 1,2,3$, запишем образующие алгебры g в виде матрицы:
(6)

$$\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ X_3\\ X_4\\ X_5\\ X_6\\ X_7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2y & 4u_1-4xy & 2x^2-2y^2 & 2x & 2x^2-2y^2+4v_1 & 4xy\\ 0 & 1 & 2x & 2x^2-2y^2 & 4xy+4u_1 & 2y & 4xy & 2y^2-2x^2+4v_1\\ x & y & 2u_1 & 3u_2 & 3u_3 & 2v_1 & 3v_2 & 3v_3\\ -y & x & 0 & -u_3 & u_2 & 0 & -v_3 & v_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x\\ \partial_y\\ \partial_{u_1}\\ \partial_{u_2}\\ \partial_{u_3}\\ \partial_{v_1}\\ \partial_{v_2}\\ \partial_{v_3} \end{pmatrix}.$$

Опишем разбиение пространства $\mathbb{C}^4$ на подмножества $R_j,\ j = 5,6,7$, постоянного ранга матрицы $\mathbf{A}$. Сделаем два предварительных замечания.

Всякие подмножества пространства $\mathbb{R}^\nu$ с координатами $x = (x_1,\ldots,x_\nu)$ заданные конечной системой уравнений и неравенств на полиномы от x, а также их конечные объединения, пересечения и дополнения называются *полуалгебраическими* множествами. Если множество S задано системой соотношений $F(x) = 0$, $G(x) > 0$ и $H(x) < 0$, то через $-S$ обозначим полуалгебраическое множество, определенное системой $F(x) = 0$, $G(x) < 0$ и $H(x) > 0$. При одновременном рассмотрении множеств S и $-S$ мы будем использовать обозначение $\pm S$.

В результате вычислений, выполненных с использованием компьютерной системы Maple, а также алгоритма описанного [6] получаем, что $R_6 = \{\Phi \neq 0,\ \Psi_1 = \Psi_2 = 0\}$. Очевидно, что $R_7 = \mathbb{C}^4 \setminus (R_5 \bigcup R_6)$. Как было замечено выше, Q представляет собой орбиту, состоящую из точек, где ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен пяти, т.е. $R_5 = Q$. Таким образом мы получаем.

Предложение 3: Пространство $\mathbb{R}^8 = \mathbb{C}^4$ распадается на три подмножества: R_5, R_6, R_7. Они представляют собой G-инвариантные полуалгебраические множества вида

$$R_5 = \{\Phi = \Psi_1 = \Psi_2 = 0\} = Q,$$
$$R_6 = \{\Phi \neq 0,\ \Psi_1 = \Psi_2 = 0\},$$
$$R_7 = \{\Psi_1 \neq 0 \text{ или } \Psi_2 \neq 0\}.$$

Переходим к доказательству теоремы.

Множество R_5, как было сказано выше, представляет собой орбиту, совпадающую с Q.

Множество R_6 состоит из двух связных компонент $\pm M^6$, где

$$M^6 = \{\ \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = 0, \quad \Phi > 0\}\ .$$

которые представляют собой вещественно полуалгебраические порождающие CR-многообразия CR-типа $(2,2)$. В соответствии с леммой 2 каждая из них представляет собой орбиту действия группы G. Отметим, что ранг шесть алгебры g в точках R_6 обеспечивается шестью векторными полями $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$.

Открытое множество R_7 задано условием, что хотя бы одна из функций Ψ_1 или Ψ_2 отлична от нуля. Рассмотрим сначала подмножество R_7 вида $\{\Psi_1 = 0,\, \Psi_2 \neq 0\} \bigcup \{\Psi_1 \neq 0,\, \Psi_2 = 0\}$. Оно представляет собой объединение четырех связных 7-мерных гиперповерхностей $\pm M^7$ и $\pm N^7$, заданных системами:

$$M^7 = \left\{ \ \Psi_1 = 0,\, \Psi_2 > 0 \ \right\}, \quad N^7 = \left\{ \ \Psi_1 > 0,\, \Psi_2 = 0 \ \right\}.$$

Из леммы 2 следует, что эти гиперповерхности являются орбитами действия G. Голоморфное преобразование

$$(z, w_1, w_2, w_3) \mapsto (-z, w_1, -w_2, -w_3), \tag{7}$$

осуществляет следующую биголоморфную эквивалентность:

$$M^7 \sim -M^7, \qquad N^7 \sim -N^7.$$

Рассматривая голоморфное преобразование

$$(z, w_1, w_2, w_3) \mapsto (-iz, w_1, w_3, -w_2), \tag{8}$$

получаем также, что M^7 и N^7 эквивалентны. Итак, все четыре указанных орбиты голоморфно эквивалентны. Для каждой голоморфной функции $f(z, w_1, w_2, w_3)$ голоморфное векторное поле $f\partial_{w_3}$ касательно к M^7. Поэтому M^7, а значит, и все четыре рассмотренных орбиты *голоморфно вырожденны*, откуда получаем, что их алгебры инфинитезимальных автоморфизмов *бесконечномерны* (см. [1]).

То, что осталось, имеет вид

$$\mathscr{P} = \left\{ \ \Psi_1 \neq 0,\, \Psi_2 \neq 0 \ \right\}. \tag{9}$$

Пусть $(a, b_1, b_2, b_3) = \mathbf{p}_0 \in \mathscr{P}$. Имеем:

$$\begin{cases} \mathrm{Im} b_2 \neq -(a^2\overline{a} + a\overline{a}^2) + 2\,\mathrm{Im} b_1 (a + \overline{a}), \\ \\ \mathrm{Im} b_3 \neq i\,(a^2\overline{a} - a\overline{a}^2) - 2\,i\,\mathrm{Im} b_1 (a - \overline{a}). \end{cases} \tag{10}$$

$\mathscr{O}_{\mathbf{p}_0}$ - орбита точки $\mathbf{p}_0$ представляет собой множество точек $\mathbf{p} = (z, w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^4$ вида:

$$\begin{aligned} z &= \lambda\,\gamma\,a + p, \\ w_1 &= 2\,i\,\lambda\,\gamma\,\overline{p}\,a + \lambda^2 b_1 + i\,|p|^2 + q_1, \\ w_2 &= 2\,i\,\lambda\,\gamma\big(2\,|p|^2 + \overline{p}^2\big)\,a + 2\,i\,\lambda^2\gamma^2\overline{p}\,a^2 \\ &\qquad + 4\,\lambda^2 \mathrm{Re} p\, b_1 + \lambda^3\big(\mathrm{Re}\gamma\, b_2 - \mathrm{Im}\gamma\, b_3\big) + 2\,i\,\mathrm{Re}(p^2\overline{p}) + q_2, \\ w_3 &= 2\,\lambda\,\gamma\big(2\,|p|^2 - \overline{p}^2\big)\,a + 2\,\lambda^2\gamma^2\overline{p}\,a^2 \\ &\qquad + 4\,\lambda^2 \mathrm{Im} p\, b_1 + \lambda^3\big(\mathrm{Im}\gamma\, b_2 + \mathrm{Re}\gamma\, b_3\big) + 2\,i\,\mathrm{Im}(p^2\overline{p}) + q_3, \end{aligned} \tag{11}$$

для некоторых $\gamma, p \in \mathbb{C}$ и $\lambda, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ при $|\gamma| = 1$ и $\lambda > 0$. Поскольку группа содержит все вещественные сдвиги по переменным w_1, w_2, w_3, то мы можем исключить параметры q_1, q_2, q_3, переходя к мнимым частям второго, третьего и четвертого уравнения (11). Из первого выражения (11) получаем, что $p = z - \lambda\gamma a$. Подставляя данное выражение для p в мнимую часть второго выражения (11), получаем:

$$v_1 - z\overline{z} = \lambda^2\,(\mathrm{Im} b_1 - a\overline{a}). \tag{12}$$

Это означает, что $v_1 - z\overline{z}$ – относительный инвариант действия группы.

Рассмотрим случаи $\Phi(\mathbf{p}_0) \neq 0$ и $\Phi(\mathbf{p}_0) = 0$.

Случай 1. $\Phi(\mathbf{p}_0) \neq 0$. В этом случае из равенства (12) получаем, что для каждой точки $\mathbf{p} = (z, w_1, w_2, w_3) \in \mathscr{O}_{\mathbf{p}_0}$ знак выражения $v_1 - z\overline{z}$ совпадает со знаком выражения $\Phi(\mathbf{p}_0)$. Следовательно, если $\Phi(\mathbf{p}_0) > 0$, то $\mathbf{p}$ можно перевести только в точки (z, w_1, w_2, w_3), для которых $v_1 - z\overline{z} > 0$. Аналогичное утверждение верно и в случае $\Phi(\mathbf{p}_0) < 0$. В соответствии с этим выделим два подслучая: $\Phi(\mathbf{p}_0) > 0$ и $\Phi(\mathbf{p}_0) < 0$. В свою очередь, искомые орбиты делятся на два типа: лежащие в связной компоненте $v_1 - z\overline{z} > 0$ (орбиты "вне шара") и лежащие в связной компоненте $v_1 - z\overline{z} < 0$ (орбиты "внутри шара"). В каждом из этих случаев можно придать b_1 произвольное значение. С учетом предположения $\lambda > 0$, из (11) получаем:

$$\lambda = \sqrt{\frac{v_1 - z\overline{z}}{\mathrm{Im}\, b_1 - a\overline{a}}} = \sqrt{\frac{\Phi(\mathbf{p})}{\Phi(\mathbf{p}_0)}}.$$

Теперь, используя выражения для p и λ, после упрощений из мнимых частей третьего и четвертого уравнений (11) получаем:

$$\left[\begin{array}{l} v_2 + z^2\overline{z} + z\overline{z}^2 - 2\,v_1(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}\lambda^3(\Omega\gamma + \overline{\Omega}\,\overline{\gamma}) \\[2ex] v_3 - i\,(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2) + 2i\,v_1(z-\overline{z}) = -\frac{i}{2}\,\lambda^3(\Omega\gamma - \overline{\Omega}\,\overline{\gamma}), \end{array}\right. \tag{13}$$

где

$$\Omega = \mathrm{Im} b_2 + i\,\mathrm{Im} b_3 + 2\,a^2\overline{a} - 4\,a\,\mathrm{Im} b_1 = \Psi_1(\mathbf{p_0}) + i\,\Psi_2(\mathbf{p_0}).$$

Из (10) следует, что $\Omega \neq 0$. Умножая второе уравнение на i и прибавляя его к первому, получаем:

$$v_2 + i\,v_3 + 2\,z^2\overline{z} - 4\,zv_1 = \lambda^3\gamma\,\Psi_1(\mathbf{p_0}) + i\,\Psi_2(\mathbf{p_0}).$$

Подставляя $\lambda = \sqrt{\frac{v_1 - z\overline{z}}{\Phi(\mathbf{p}_0)}}$, выражаем параметр γ:

$$\gamma = \frac{(\Psi_1(\mathbf{p}) + i\,\Psi_2(\mathbf{p}))}{\Psi_1(\mathbf{p_0}) + i\,\Psi_2(\mathbf{p_0})} \cdot \left(\frac{\Phi(\mathbf{p})}{\Phi(\mathbf{p}_0)}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Условие $\gamma\overline{\gamma} = 1$ накладывает ограничения на изменение мнимых частей переменных b_2 и b_3. А именно, отображение $(\mathrm{Im} b_2, \mathrm{Im} b_3) \mapsto (v_2, v_3)$ возможно только если параметр γ удовлетворяет условию:

$$(\Psi_1(\mathbf{p})^2 + \Psi_2(\mathbf{p})^2)\big(\Phi(\mathbf{p})\big)^{-3} = (\Psi_1(\mathbf{p}_0)^2 + \Psi_2(\mathbf{p}_0)^2)\Phi(\mathbf{p}_0)^{-3}.$$

Из того, что $\lambda \neq 0$, следует, что на орбите точки $\mathbf{p}_0$ выражение $v_1 - z\overline{z}$ отлично от нуля. Поэтому на 8-мерном подмножестве

$$\mathscr{P}' = \{\ \Phi \neq 0,\ \Psi_1 \neq 0,\ \Psi_2 \neq 0\ \} \tag{14}$$

множества $\mathscr{P}$ функция:

$$F(\mathbf{p}) = (\Psi_1(\mathbf{p})^2 + \Psi_2(\mathbf{p})^2)\big(\Phi(\mathbf{p})\big)^{-3}$$

инвариантна под действием группы G. В частности, для каждой точки $\mathbf{p}_0 \in \mathscr{P}'$, 7-мерное полуалгебраическое подмногообразие – линия уровня F:

$$F(\mathbf{p}) = |\Psi_1(\mathbf{p_0}) + i\,\Psi_2(\mathbf{p_0})|^2 \Phi(\mathbf{p}_0)^{-3}$$

вместе с тремя определяющими неравенствами (14) также инвариантна. По лемме 2 всякая связная компонента этого полуалгебраического многообразия есть орбита действия группы G в точках $\mathscr{P}' \subset \mathbb{C}^4$. Отсюда получаем, что в соответствии со знаками трех ненулевых вещественных чисел $(\Phi(\mathbf{p}_0), \Psi_1(\mathbf{p}_0), \Psi_2(\mathbf{p}_0))$, 7-мерная орбита $\mathscr{O}_{\mathbf{p}_0}$ принадлежит одному из следующих восьми типов: $O^7_{\pm,\pm,\pm}$, где знаки означают выбор соответствующего неравенства.

С помощью голоморфного преобразования (7) получаем набор эквивалентностей:

$$O^7_{+++} \equiv O^7_{+--}, \qquad O^7_{-++} \equiv O^7_{---}, \qquad O^7_{++-} \equiv O^7_{+-+}, \qquad O^7_{-+-} \equiv O^7_{--+}.$$

Далее, посредством голоморфного преобразования (8) получаем эквивалентности:

$$O^7_{+++} \equiv O^7_{++-}, \qquad O^7_{-++} \equiv O^7_{-+-}.$$

Поэтому мы можем рассматривать только два типа 7-мерных орбит: O^7_{+++} и O^7_{-++}, которые различаются знаком выражения $\Phi(\mathbf{p}_0)$ (в нашей нумерации – знаком в первой позиции). Для каждой точки $\mathbf{p}_0 \in \mathscr{P}'$ определим величину

$$\mathbf{m} = (\Psi_1(\mathbf{p}_0)^2 + \Psi_2(\mathbf{p}_0)^2)(\Phi(\mathbf{p}_0))^{-3}.$$

$\mathbf{m}$ – инвариант действия группы G на подмногообразии $\mathscr{P}'$. Поэтому мы можем параметризовать найденные орбиты данным параметром, который может принимать все вещественные значения, за исключением нуля. Представителем орбит, где $\mathbf{m} > 0$, является O^7_{+++}, а орбит, где $\mathbf{m} < 0$ – орбита O^7_{-++}. Через $O_{\mathbf{m}}$ обозначим орбиту с соответствующим значением $\mathbf{m}$.

Поскольку орбиты голоморфно однородны, Леви-невырожденность в одной точке эквивалентна Леви невырожденности всюду. Вычисляя матрицу Леви гиперповерхностей $O_{\mathbf{m}}$ и вычисляя ее определитель в произвольной точке, получаем, что Леви-невырожденными являются все орбиты $O_{\mathbf{m}}$, за исключением случая $\mathbf{m} = -\frac{32}{9}$. В этом случае можно проверить, что $O_{-\frac{32}{9}}$ также голоморфно вырожденна. Поэтому эта орбита не является голоморфно эквивалентной ни одной из остальных орбит и ее алгебра Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов бесконечномерна.

Пространство $\mathbb{R}^8$ разбито особыми орбитами на 12 частей. Пусть $D(j, \pm, \pm)$, $j = 1, 2, 3$, – область, каждая из которых задана тремя неравенствами. Второй и третий аргумент D кодирует знак Ψ_1 и Ψ_2 соответственно, и в зависимости от j выполнено одно из неравенств:

$$\text{если } j = 1, \quad (\Psi_1(\mathbf{p})^2 + \Psi_2(\mathbf{p})^2)(\Phi(\mathbf{p}))^{-3} < -32/9,$$
$$\text{если } j = 2, \quad -32/9 < (\Psi_1(\mathbf{p})^2 + \Psi_2(\mathbf{p})^2)(\Phi(\mathbf{p}))^{-3} < 0,$$
$$\text{если } j = 3, \quad 0 < (\Psi_1(\mathbf{p})^2 + \Psi_2(\mathbf{p})^2)(\Phi(\mathbf{p}))^{-3}.$$

Каждая из этих областей слоится на орбиты, которые являются Леви-невырожденными гиперповерхностями фиксированной сигнатуры. При этом имеются как строго псевдовыпуклые, так и знаконеопределенные поверхности.

Докажем далее, что орбиты для разных $\mathbf{m}$ попарно голоморфно неэквивалентны.

Для дальнейшего нам потребуется некоторое рассуждение, которое применялось ранее (см. [4, Lemma 3.1]) и доказательство которых восходит к В. Каупу (см., например, [9]). Это рассуждение мы сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 4: Для каждого ненулевого значения параметра $\mathbf{m} \neq -\frac{32}{9}$ алгебра Ли $\operatorname{aut} O_{\mathbf{m}}$ конечномерна и полиномиальна.

Доказательство: Конечномерность алгебр $\operatorname{aut} O_{\mathbf{m}}$ при $\mathbf{m} \neq -\frac{32}{9}$ следует из Леви-невырожденности орбит $O_{\mathbf{m}}$. Для доказательства их полиномиальности заметим, что они содержат поле

$$D = z\,\partial_z + 2w_1\,\partial_{w_1} + 3w_2\,\partial_{w_2} + 3w_3\,\partial_{w_3},$$

удовлетворяющее равенствам

$$[D, Y_k] = k\,Y_k$$

для каждого взвешенно однородного векторного поля Y_k веса k. Предположим, что Y лежит в комплексификации алгебры $\operatorname{aut} O_{\mathbf{m}}$, имеющей сходящееся разложение $Y := Y_{-3} + Y_{-2} + Y_{-1} + \cdots$ по весовым компонентам. Имеем:

$$[D, Y] = \sum_{k=-3}^{\infty} kY_k.$$

Пусть P – минимальный многочлен присоединенного оператора ad_D указанной комплексифицированной алгебры. Тогда:

$$0 = P(\operatorname{ad}_D)\,(Y) = \sum_{k=-3}^{\infty} P(k)Y_k.$$

Но P имеет лишь конечное число корней. Поэтому для достаточно большого k_o выполнено $Y_k \equiv 0$ при всех $k > k_o$. Следовательно, Y полиномиально.

Лемма 5: Для ненулевых вещественных значений $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \neq -\frac{32}{9}$ всякое биголоморфное отображение $F : O_{\mathbf{m}} \to O_{\mathbf{m}'}$ есть бирационально отображение объемлющего пространства $\mathbb{C}^4$.

Доказательство этой леммы опирается на два факта: (a) алгебры инфинитезимальных автоморфизмов обеих поверхностей конечномерны и полиномиальны. (b) комплексификации этих алгебр содержат векторные поля, обеспечивающие однородность поверхности; в данном случае это образующие алгебры g – поля $X_1, ..., X_7$. Соответствующее рассуждение приведено в работе [14].

Утверждение 6: (a) Орбиты $O_{\mathbf{m}}$ и $O_{\mathbf{m}'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$.
(b) Если $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \neq -\frac{32}{9}$, то $\mathrm{aut}\, O_{\mathbf{m}} = g$.
(c) Орбиты M^6 и $-M^6$ не эквивалентны.
(d) Алгебры инфинитезимальных автоморфизмов орбит M^6 и $-M^6$ совпадают с g. *Доказательство:* Поскольку $O_{-\frac{32}{9}}$ – это единственная голоморфно вырожденная орбита рассматриваемого типа, то она не эквивалентна ни одной из остальных орбит $O_{\mathbf{m}}$. Пусть $F : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ – бирациональное преобразование, переводящее орбиту $O_{\mathbf{m}}$ в орбиту $O_{\mathbf{m}'}$ при $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \neq -\frac{32}{9}$. Рассмотрим уравнения

$$\Xi := |v_2 + i\, v_3 + 2\, z^2 \overline{z} - 4\, z v_1|^2 - \mathbf{m}\big(v_1 - z\overline{z}\big)^3 = 0$$
$$\Xi' := |v_2 + i\, v_3 + 2\, z^2 \overline{z} - 4\, z v_1|^2 - \mathbf{m}'\big(v_1 - z\overline{z}\big)^3 = 0,$$

задающие орбиты $O_{\mathbf{m}}$ и $O_{\mathbf{m}'}$, и обозначим через $\mathscr{H}_{\mathbf{m}}$ и $\mathscr{H}_{\mathbf{m}'}$ алгебраические гиперповерхности, заданные уравнениями $\Xi = 0$ и $\Xi' = 0$ соответственно. Легко проверить, что $Q \subset \mathscr{H}_{\mathbf{m}}, \mathscr{H}_{\mathbf{m}'}$. Поскольку F переводит $O_{\mathbf{m}}$ в $O_{\mathbf{m}'}$, оно также переводит $\mathscr{H}_{\mathbf{m}}$ в $\mathscr{H}_{\mathbf{m}'}$. Записывая $z := x + iy$, рассмотрим градиенты:

$$\nabla\mathscr{H}_{\mathbf{m}} := (\Xi_x, \Xi_y, \Xi_{v_1}, \Xi_{v_2}, \Xi_{v_3}) \qquad \text{и} \qquad \nabla\mathscr{H}_{\mathbf{m}'} := (\Xi'_x, \Xi'_y, \Xi'_{v_1}, \Xi'_{v_2}, \Xi'_{v_3}).$$

Вычисления показывают, что особые множества гиперповерхностей $\mathscr{H}_{\mathbf{m}}$ and $\mathscr{H}_{\mathbf{m}'}$, т.е. нулевые значения векторов $\nabla\mathscr{H}_{\mathbf{m}}$ и $\nabla\mathscr{H}_{\mathbf{m}'}$, совпадают с поверхностью Q. Из бирациональности F следует, что порождающее многообразие Q не может целиком содержаться в особом множестве отображения F, поскольку его особое множество является собственным аналитическим подмножеством объемлющего пространства. Поскольку $F : \mathscr{H}_{\mathbf{m}} \to \mathscr{H}_{\mathbf{m}'}$ должно переводить особое множество многообразия $\mathscr{H}_{\mathbf{m}}$ в особое множество многообразия $\mathscr{H}_{\mathbf{m}'}$, то F является голомормным автоморфизмом поверхности Q в окрестности неособой точки бирационального отображения F. Таким образом, $F \in G = \mathrm{Aut}\, Q$. Но орбита $O_{\mathbf{m}}$ инвариантна относительно действия группы G, и поэтому F переводит ее в себя, т.е. $O_{\mathbf{m}} = O_{\mathbf{m}'}$.

Повторяя проведенное рассуждение в случае $O_{\mathbf{m}'} = O_{\mathbf{m}}$, получаем, что всякий голоморфный автоморфизм $F : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, отображающий $O_{\mathbf{m}}$ в себя, принадлежит группе автоморфизмов G. Отсюда получаем $\mathrm{Aut}\, O_{\mathbf{m}} = G$.

Применяя то же самое рассуждение к отображению M^6 в $-M^6$, получаем, что это отображение содержится в G. Легко видеть, что это невозможно. Полученное противоречие доказывает, что M^6 и $-M^6$ неэквивалентны.

Еще раз применяя то же рассуждение к отображению M^6 в себя, получаем, что $\operatorname{Aut} M^6 = G$. Утверждение доказано.

Случай 2. $\Phi(\mathbf{p}_0) = 0$.

Удаляя точки $\mathscr{P}'$, заданные условием (14), из подмногообразия $\mathscr{P}$, заданного условием (9), получаем, что нам остается рассмотреть орбиты, соответствующие точкам 7-мерного полуалгебраического многообразия, заданного условиями

$$\mathscr{Q} : \begin{cases} v_1 = z\overline{z}, \\ v_2 \neq z^2\overline{z} + z\overline{z}^2, \\ v_3 \neq -i\,(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2). \end{cases} \tag{15}$$

Это многообразие инвариантно относительно действия группы G, поскольку оно является дополнением до инвариантного подпространства в пространстве $\mathbb{C}^4$. Ранг матрицы $\mathbf{A}$ в каждой точке этого подмногообразия равен 7, откуда, по лемме 2, каждая его связная компонента является орбитой действия нашей группы. Это многообразие состоит из четырех связных компонент $\pm S^7, \pm T^7$, где

$$S^7 : \begin{cases} v_1 = z\overline{z}, \\ v_2 > z^2\overline{z} + z\overline{z}^2, \\ v_3 > -i\,(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2), \end{cases} \qquad T^7 : \begin{cases} v_1 = z\overline{z}, \\ v_2 > z^2\overline{z} + z\overline{z}^2, \\ v_3 < -i\,(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2). \end{cases}$$

Как и выше, голоморфное преобразование (7) обеспечивает эквивалентности

$$S^7 \equiv -S^7, \qquad T^7 \equiv -T^7.$$

Далее, с помощью голоморфного преобразования (8) получаем, что $S^7 \equiv -T^7$. Поэтому все данные четыре 7-мерные орбиты голоморфно эквивалентны.

Для всякой голоморфной функции $f(z, w_1, w_2, w_3)$ голоморфные векторные поля $f\partial_{w_2}$ и $f\partial_{w_3}$ являются касательными к орбитам $\pm S^7$ и $\pm T^7$. Поэтому все эти орбиты голоморфно вырожденны, а их алгебры инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов бесконечномерны.

Итак, теорема доказана.

Замечание 7==: Посредством голоморфного преобразования:

$$(z, w_1, w_2, w_3) \mapsto (z, w_1, w_2 - 2\,zw_1, w_3 + 2i\,zw_1)$$

определяющие уравнения M^6 преобразуются к виду:

$$\mathbb{M}^6 : \begin{cases} v_2 = -i\,(w_1\overline{z} - \overline{w}_1 z) - (z^2\overline{z} + z\overline{z}^2), \\ v_3 = -(w_1\overline{z} + \overline{w}_1 z) + i\,(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2), \\ v_1 > z\overline{z}. \end{cases}$$

Это многообразие есть вполне невырожденное CR-многообразие типа $(2, 2)$ с квадратичной модельной поверхностью (см. [2]):

$$Q(2,2) = \begin{cases} v_2 = -i\,(w_1\overline{z} - \overline{w}_1 z), \\ v_3 = -(w_1\overline{z} + \overline{w}_1 z). \end{cases}$$

В работе [7, 8] данная поверхность, которую авторы называют *эллиптической*, была подробно изучена. В частности, оказалось, что алгебра Ли $\operatorname{aut} Q(2,2)$ ее инфинитезимальных CR-автоморфизмов 16-мерна и имеет

10-мерных стабилизатор (см. [7, Theorem 1]). Поскольку стабилизатор поверхности M^6 имеет размерность один, то мы можем утверждать, что M^6 несферична.

Сравнивая полученные здесь результаты с работами [3], [4], мы видим, что результаты вполне аналогичны. Имеющиеся отличия вполне объяснимы ростом размерности пространства. В [5] были рассмотрены автоморфизмы модельной поверхности произвольного конечного Блум-Грэм-типа. Вопрос об описании орбит действия группы автоморфизмов такой поверхности интересен и в этом, более общем, контексте.

Acknowledgment. Данная статья возникла как продолжение совместных обсуждений, которые оба автора проводили в сентябре 2019 г. в Исфаханском отделении IPM, куда первый автор был приглашен дирекцией института. Он пользуется случаем, чтобы поблагодарить дирпекцию Исфаханского отделения IPM за предоставленную возможность и гостеприимство.

Мы также благодарны Амиру Хашеми, Мехди Дехгани и Марии Степановой за полезные замечания и обсуждения в процессе работы над статьей. Исследование второго автора частично поддержано грантом IPM, No. 99510419.

Список литературы

[1] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, L.P. Rothschild, *Real Submanifolds in Complex Space and their Mappings*, Princeton Univ. Press, 1999, xii+404 pp.

[2] О голоморфных преобразованиях квадрики // Математический сборник, 1991, №2, стр. 203-219. //

[3] V.K. Beloshapka, *Space of orbits of the automorphism group of a model surface of type* $(1,2)$, Russian J. Math. Phys., **15**(1) (2008) 140–143.

[4] V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy, *Homogeneous hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$*, associated with a model CR cubic*, J. Geom. Anal., **20** (2010) 538–564.

[5] V. K. Beloshapka,CR-Manifolds of Finite Bloom–Graham Type: the Method of Model Surface, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 27, No. 2, (2020) 155–174.

[6] M. Dehghani Darmian., A. Hashemi, *Parametric FGLM algorithm*, J. Symb. Comp., **82** (2017) 38–56.

[7] V. Ežov, G. Schmalz, *Holomorphic automorphisms of quadrics*, Math. Z., **216** (1994) 453–470.

[8] V. Ežov, G. Schmalz, *Normal form and two-dimensional chains of an elliptic CR manifold in* $\mathbb{C}^4$, J. Geom. Anal., **6**(4) (1996) 495–529.

[9] W. Kaup, “Einige Bemerkungen uber polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten,” Math. Ann. 204, 131–144 (1973).

[10] J. Merker, M. Sabzevari, *Cartan equivalence problem for* 5*-dimensional bracket-generating CR-manifolds in* $\mathbb{C}^4$, J. Geom. Anal., **26**(4) (2016) 3194–3251; expanded form arxiv : 1401.4297v1, 172 pp.

[11] M. Sabzevari, J. Merker, S. Pocchiola, *Canonical Cartan connections on maximally minimal generic submanifolds* $M^5 \subset \mathbb{C}^4$, Elect. Res. Ann. Math. Sci. (ERA-MS), **21** (2014) 153–166.

[12] M. Sabzevari, A. Hashemi, B. M.-Alizadeh, J. Merker, *Lie algebras of infinitesimal CR-automorphisms of weighted homogeneous and homogeneous CR-generic submanifolds of* $\mathbb{C}^N$, FiloMat, **30**(6) (2016) 1387–1411.

[13] M. Sabzevari, *Convergent normal forms for five dimensional totally nondegenerate CR manifolds in* $\mathbb{C}^4$, arXiv : 2004.11251v2, (2020) 32 pp.

[14] A. E. Tumanov, "Finite-Dimensionality of the Group of CR Automorphisms of a Standard CR Manifold and Proper Holomorphic Mappings of Siegel Domains," Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 52 (3), 651– 659 (1988) [Math. USSR Izv. 32 (3), 655–662 (1989)].

Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Vorob'evy gory, 119991, Moscow, Russia

Email address: vkb@strogino.ru

Department of Mathematics, Shahrekord University, 88186-34141, Shahrekord, Iran and School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), 19395-5746, Tehran, Iran

Email address: sabzevari@ipm.ir