О простых решениях некоторых уравнений математической физики

Белошапка В.К.

16.11.2019

УДК 517.55, 517.923, 514.74

Аннотация

Описаны все решения уравнений Бюргерса, Хопфа, Гельмгольца, Клейна-Гордона, синус-Гордона и Шрёдингера, Монжа-Ампера, имеющие аналитическую сложность один (простые решения). Оказалось, что все простые решения уравнения Бюргерса и Хопфа представлены элементарными функциями. Приведен пример семейства решений уравнения Бюргерса, сложности 2. Простые решения уравнения Гельмгольца (или Клейна-Гордона) выражаются через функции Бесселя и элементарные функции. Приводится явное описание простых решений уравнений Лапласа и волнового, которые выражаются через эллиптические функции Якоби. Обсуждаются открытые вопросы теории аналитической сложности (аналитический спектр уравнения).

[1]

Несмотря на имеющиеся успехи, среди вопросов, возникших в связи с обсуждением 13-й проблемы Гильберта, значительная часть остается

[1]Механико-математический факультет, МГУ,
Воробьевы горы, 119991 Москва, Россия, valery@beloshapka.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 18-51-41011 Узб т

открытой [1], [2]. Концепция аналитической сложности [3], развиваемая автором данной работы, имеет отношение к этим вопросам.

На аналитическую функцию двух переменных $z(x, y)$ можно подействовать с помощью функций одного переменного. Таким естественным образом возникает псевдогруппа $\mathcal{G}$, которая действует следующим образом. Если $g = (a, b, c) \in \mathcal{G}$, где (a, b, c) - три непостоянные аналитические функции одного переменного, а $z(x, y)$ - аналитическая функция двух переменных, то

$$(g \circ z)(x, y) = c(z(a(x), b(y))).$$

Эта псевдогруппа играет фундаментальную роль в вопросах измерения сложности аналитических функций двух переменных. С точки зрения теории аналитической сложности функции z и $g \circ z$ - неразличимы (эквивалентны).

В терминах этой псевдогруппы можно, в частности, сформулировать уникальное свойство арифметических операций. Поскольку все четыре арифметических операции эквивалентны по модулю $\mathcal{G}$, а данное свойство формулируется в терминах псевдогруппы, то речь идет об уникальном свойстве всех функций этого класса. Определяя этот класс как орбиту функции $z = x + y$, мы получаем его описание в виде $Cl_1 = \{z(x, y) = c(a(x) + b(y))\}$. Далее, для каждой аналитической функции $z(x, y)$ мы можем рассмотреть псевдоподгруппу $Stab(z) = \{g \in \mathcal{G} : (g \circ z)(x, y) = z(x, y)\}$ и пусть $d(z)$ - её размерность, понимаемая как размерность соответствующей алгебры Ли. В [5] была доказана следующая теорема. Для произвольной аналитической функции $z(x, y)$, зависящей от обеих переменных (частные производные не равны нулю тождественно) $d(z)$ может принимать лишь три значения: 0, 1 и 3. Причем значение 3 размерность стабилизатора принимает в том и только том случае, если функция $z \in Cl_1 \setminus Cl_0$. Эта теорема показывает, что функции из Cl_1 и только они обладают максимальной внутренней симметрией. С точки зрения теории аналитической сложности [3] это, в точности, функции аналитической сложности один. Отметим, что

$$Stab(x + y) = \{a(x) = k\,x + l, \quad b(y) = k\,y + m, \quad c(t) = \frac{t - (l + m)}{k}\}$$

Итак, аналитические функции вида $z(x, y) = c(a(x) + b(y))$ с непостоянными (a, b, c) и только они обладают максимальной конечномерной симметрией. На этот вид симметрии можно посмотреть также следующим образом. Действие псевдогруппы $\mathcal{G}$ можно представить как композицию действий двух коммутирующих псевдогрупп $\mathcal{G}_p$ и $\mathcal{G}_q$. При этом $\mathcal{G}_p$ действует в прообразе, на независимые переменные (x, y), а $\mathcal{G}_q$ - в образе на зависимую переменную z

$$z(x, y) \to p_{ab} \circ z(x, y) = z(a(x), b(y)), \quad z(x, y) \to q_c \circ z(x, y) = c(z(x, y)).$$

Тогда $Stab(z)$ - стабилизатор функции z - это те преобразования из $\mathcal{G} = \mathcal{G}_p \cdot \mathcal{G}_q$, которые обладают свойством

$$p \circ z = q^{-1} \circ z,$$

т.е. это те преобразования, для которых действие p-компоненты является обратным к действию q-компоненты.

Для функций одного переменного, по понятным причинам, нет существенной разницы между действием в прообразе и в образе. Содержательные аналоги здесь возможны лишь на уровне действия дискретных групп. И они хорошо известны. Это периодические, двоякопериодические или же автоморфные функции.

Концепция аналитической сложности, в частности, позволяет с новой точки зрения посмотреть на хорошо известные дифференциальные уравнения с частными производными. Ввиду отмеченной уникальности класса функций сложности один всякий раз, когда имеется интерес к какому-либо дифференциальному уравнению для функций двух переменных, возникает вопрос.

Как устроены решения данного уравнения, имеющие сложность один?

Ранее ответ был получен для следующих уравнений: Лапласа, волнового, теплопроводности, Лиувилля, Кортевега – де Фриза. В данной работе мы отвечаем на этот вопрос для следующей серии уравнений: Бюргерса, Хопфа, Гельмгольца, Клейна-Гордона, синус-Гордона, Шредингера и Монжа-Ампера. А также для уравнения Лаплпса и волнового уравнения дается более явное и подробное описание, чем то, что приводится в [4].

Как известно, с помощью преобразования Хопфа-Коула уравнение Бюргерса сводится к уравнению теплопроводности. Но, несмотря на то, что все решения уравнения теплопроводности сложности один явно описаны (они выражаются через специальную функцию erf - интеграл ошибок), это не позволяет непосредственно получить описание таких решений для уравнения Бюргерса.

Для каждого из рассмотренных уравнений вычисление решений сложности один представляет собой рассмотрение дерева логических возможностей, которое сопровождается описанием дифференциально-алгебраических вычислений, выполненных в системе Maple.

Уравнение Бюргерса имеет вид

$$z'_y + z\,z'_x + z''_{xx} = 0 \tag{1}$$

Пусть $z = c(a(x)+b(y))$, где (a, b, c) - непостоянные аналитические функции одного переменного. Подставляя, получаем

$$a_1^2\,c_2 + a_1\,c_0\,c_1 + a_2\,c_1 + b_1\,c_1 = 0$$

Нижние индексы обозначают порядки производных. В этих обозначениях предположение о непостоянстве a, b и c означает, что a_1, b_1 и c_1 - не есть тождественные нули. Имеем

$$-\frac{c_2}{c_1} = \frac{a_1c_0 + a_2 + b_1}{{a_1}^2} \tag{2}$$

Поскольку левая часть (2) это функция от $(a(x)+b(y))$, то правая часть должна лежать в ядре оператора

$$L = b'(y)\frac{\partial}{\partial x} - a'(x)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3}$$

Получаем

$$a_1a_2b_1c_0 + {a_1}^2b_2 - a_1a_3b_1 + 2\,{a_2}^2b_1 + 2\,a_2{b_1}^2 = 0 \tag{4}$$

Случай 1. Если $a_2 = 0$, то из (4) следует, что $b_2 = 0$, т.е. a и b - линейны, т.е. $a(x)+b(y) = k\,x + l\,y + \gamma$, где k и l - ненулевые константы. Ищем z в виде $z = c(x + \lambda\,y)$, тогда из (1) получаем

$$\lambda\,c'(t) + c(t)\,c'(t) + c''(t) = 0.$$

Решая его, получаем

$$z = 2\,\mu\,\mathrm{th}(\mu\,(x+\lambda\,y+\nu)) - \lambda.$$

Случай 2. Пусть $a_2 \neq 0$. Тогда из (4) следует

$$c_0 = -\frac{{a_1}^2 b_2 - a_1 a_3 b_1 + 2\,{a_2}^2 b_1 + 2\,a_2 {b_1}^2}{a_1 a_2 b_1} \tag{5}$$

Применяя к (5) оператор L получаем

$$\begin{gathered} {a_1}^4 a_2 b_1 b_3 - {a_1}^4 a_2 {b_2}^2 + {a_1}^3 a_3 {b_1}^2 b_2 + {a_1}^2 {a_2}^2 {b_1}^2 b_2 + \\ {a_1}^2 a_2 a_4 {b_1}^3 - {a_1}^2 {a_3}^2 {b_1}^3 - 2\,a_1 {a_2}^2 a_3 {b_1}^3 + 2\,{a_2}^4 {b_1}^3 + 2\,{a_2}^3 {b_1}^4 = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Это соотношение позволяет заключить, что если $b_2 = 0$, то a_2 - тоже, т.е. в нашем случае не только a_2, но и b_2 отлична от нуля. Записывая, что выражение (5) для c_0 согласовано с выражением (2) для c_2/c_1, получаем

$$\begin{gathered} {a_1}^4 {b_1}^2 b_4 a_2 - 4\,{a_1}^4 b_1 b_2 b_3 a_2 + 3\,{a_1}^4 {b_2}^3 a_2 - {a_1}^4 {b_1}^2 b_2 b_3 + {a_1}^4 b_1 {b_2}^3 + \\ {a_1}^3 a_3 {b_1}^3 b_3 - {a_1}^3 a_3 {b_1}^2 {b_2}^2 + {a_1}^2 {a_2}^2 {b_1}^3 b_3 - {a_1}^2 {a_2}^2 {b_1}^2 {b_2}^2 - {a_1}^2 {b_1}^4 b_3 a_2 - \\ {a_1}^2 {b_1}^3 {b_2}^2 a_2 + 2\,a_1 a_2 a_3 {b_1}^4 b_2 - 2\,{a_2}^3 {b_1}^4 b_2 - 2\,{a_2}^2 {b_1}^5 b_2 = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

Заметим, что эти соотношения не зависят явно ни от независимых переменных (x, y), ни от самих неизвестных функций (a, b), а лишь от их производных. Пользуясь этим, понизим дифференциальные порядки соотношений, переходя к следующим переменным $a_1 = A,\ a_2 = P(A),\ b_1 = B,\ b_2 = Q(B)$, т.е. первые производные - это новые независимые переменные, а вторые - неизвестные функции. Тогда производные более высоких порядков выражаются соответственно. Например, $a_3 = P'(A)\,P(A)$. При этом, как и ранее, будем писать $P' = p_1,\ P'' = p_2, ..., Q' = q_1, ...$ Соотношения (6) и (7) примут вид

$$\begin{gathered} A^2 B^3 {p_0}^2 p_2 + A^4 B q_1 q_0 + A^3 B^2 p_1 q_0 - 2\,A B^3 {p_0}^2 p_1 - \\ A^4 {q_0}^2 + A^2 B^2 p_0 q_0 + 2\,B^4 {p_0}^2 + 2\,B^3 {p_0}^3 = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} -A^3 B^3 {p_0}^3 p_1 p_2 - A^5 B p_0 q_1 q_0 p_1 + A^4 B^2 {p_0}^2 q_0 p_2 - A^4 B^2 p_0 q_0 {p_1}^2 + A^2 B^4 {p_0}^3 p_2 + \\ A^2 B^3 {p_0}^4 p_2 + 2\,A^2 B^3 {p_0}^3 {p_1}^2 + A^5 B {q_0}^2 p_1 + A^5 p_0 {q_0}^2 p_1 + A^4 B {p_0}^2 q_1 q_0 + \\ A^3 B^3 p_0 q_0 p_1 - 4\,A B^4 {p_0}^3 p_1 - 4\,A B^3 {p_0}^4 p_1 - A^4 B p_0 {q_0}^2 - A^4 {p_0}^2 {q_0}^2 + \\ A^2 B^3 {p_0}^2 q_0 - A^2 B^2 {p_0}^3 q_0 + 2\,B^5 {p_0}^3 + 4\,B^4 {p_0}^4 + 2\,B^3 {p_0}^5 = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Поскольку $q_0 = b_2 \neq 0$, то выражая q_1 из (9) и записывая, что это выражение не зависит от A, получаем

$$\left(-A^4 p_2 + 2\,A^2 p_0\right) q_0 - A^3 B {p_0}^2 p_3 - 2\,A^3 B p_0 p_1 p_2 + 4\,A^2 B {p_0}^2 p_2 + \\ 4\,A^2 B p_0 {p_1}^2 - 4\,A B^2 p_0 p_1 - 12\,A B {p_0}^2 p_1 + 8\,B^2 {p_0}^2 + 8\,B {p_0}^3 = 0 \qquad (10)$$

Возникает альтернатива. Либо $Q = m\,B^2 + n\,B + l$, либо $(-A^2 p_2 + 2\,p_0) = 0$.

Случай 2.1. Q зависит от B квадратично, т.е. $Q = m\,B^2 + n\,B + l$. Подставим в (8) и (9) выражение для Q. Выделяя в (8) член, свободный от B, получаем, что $l = 0$. Далее, выделим в (9) член при B^5, выразим оттуда p_1 через p_0. Продифференцировав, получим выражение для p_2 через p_0. Подставим эти выражения в член (8) при B^4 получим $A^2 m\,(A^2 m + 2\,P\,(A)) = 0$. Имеем следующую альтернативу: либо $m = 0$ (*случай 2.1.1*), либо $P(A) = -m\,A^2/2$ (*случай 2.1.2*).

Случай 2.1.1. Выделяя в (9) коэффициент при B^5, получаем, что $a_2 = P(A) = 0$, что противоречит условию случая 2.

Случай 2.1.2. Подстановка в (8) и (9) дает необходимое и достаточное условие $m\,n = 0$. Но $m = 0$ означает, что $a_2 = P(A) = 0$, поэтому $n = 0$ и $Q(B) = m\,B^2$. Записывая (5) в переменных (P, Q) получаем

$$c_0 = -\frac{-A p_1 p_0 B + A^2 q_0 + 2\,p_0 B^2 + 2\,{p_0}^2 B}{A p_0 B}.$$

Подставляя наши P и Q, получаем $c_0 = 0$. Противоречие.

Случай 2.2. $(-A^2 p_2 + 2\,p_0) = 0$. Решая это уравнение, получаем общее решение в виде $P = m\,A^2 + n/A$. Подставляя это решение в (8) и отделяя член, свободный от A, получаем $n = 0$, т.е.$P = m\,A^2$. Подставляя это в (9), отделяя член при A^6 и учитывая $m \neq 0$, получаем, что либо $Q = -m\,B^2$, либо $Q = -2\,m\,B^2$.

Случай 2.2.1. $Q = -m\,B^2$. Решая полученные обыкновенные дифференциальные уравнения, получаем

$$a(x) = \ln\left(x\alpha + \mu\right)\delta, \quad b(y) = -\ln\left(\beta\,y + \nu\right)\delta.$$

Подставляя это в (5), получаем

$$z = c(a + b) = \frac{(x\alpha + \mu)\,\beta}{\alpha\,(\beta\,y + \nu)}$$

Случай 2.2.2. $Q = -2\,m\,B^2$ Подставляя $(P(A) = m\,A^2,\ Q(B) = -2\,m\,B^2)$ в выражение для c_0, получаем, что $c_0 = 0$. Противоречие.

Для полноты картины рассмотрим, также решения (1), зависящие только от одного переменного. Это, в нашей терминологии, функции сложности ноль. Пусть $z = z(x)$, тогда (1) дает обыкновенное уравнение вида $z\,z' + z'' = 0$, решая которое, получаем

$$z(x) = \frac{1}{k}\mathrm{th}\left(\frac{x+\alpha}{2\,k}\right).$$

Если же решение (1) не зависит от x, то это, очевидно, постоянная.

Итак, нами доказана следующая теорема

Теорема 1 : (a) Любое решение вида $z = c(a(x) + b(y))$ уравнения Бюргерса (1) , где z зависит от обеих переменных попадает в одно из двух семейств

(I) $\quad \mathrm{z}_1 = 2\,\mu\,\mathrm{th}(\mu\,(x + \lambda\,y + \alpha)) - \lambda$

$(II) \quad z_2(x,y) = \frac{x+\alpha}{y+\beta}$

. (b) Решения уравнения Бюргерса, зависящие лишь от одного переменного имеют вид

(III) $\quad \mathrm{z}_3(x) = 2\,\mu\,\mathrm{th}\left(\mu(x+\alpha)\right),$

$(IV) \quad z_4(y) = \beta$

Причем $\lambda\,\mu \neq 0$.

Первое семейство - 3-параметрическое, второе - 2-параметрическое, третье - 2-параметрическое, четвертое - 1-параметрическое.

Следствие 2 : Все решения уравнения Бюргерса сложности не выше чем один представляют собой элементарные функции.

Существуют ли решения уравнения Бюргерса, сложности выше чем один? Ответ положительный.

Пример 3: Рассмотрим следующее семейство решений уравнения (1)

$$z = \frac{4\,x + 2\,A}{x^2 + A\,x - 2\,y + B}$$

Нетрудно видеть, что сложность этого выражения не выше двух [3]. Покажем, что сложность больше единицы. Для этого вычислим значение дифференциального опрератора

$$\delta(z) = (\ln(\frac{z'_x}{z'_y}))''_{xy} = -8\,\frac{A + 2\,x}{\left(A^2 + 2\,Ax + 2\,x^2 - 2\,B + 4\,y\right)^2}.$$

Функция z имеет сложность не выше 1, тогда и только тогда, когда $\delta(z) \equiv 0$ (см. [3]). Наше вычисление показывает, что это не верно, поэтому сложность z больше 1 и, тем самым, равна 2. Причем сложность равна 2 не зависимо от значений A и B. В частности, функция

$$z = \frac{4\,x}{x^2 - 2\,y}$$

это тоже решение сложности два.

Уравнение Хопфа. Если ввести в уравнение (1) параметр ν, в гидродинамической интерпретации соответствующий вязкости жидкости, т.е. записать уравнение в виде

$$z'_y + z\,z'_x - \nu\,z''_{xx} = 0,$$

то устремляя ν к нулю мы получим уравнение Хопфа

$$z'_y + z\,z'_x = 0 \qquad (11)$$

А что можно сказать о решениях этого уравнения сложности один?

Утверждение 4: Любое решение вида $z = c(a(x) + b(y))$ уравнения Хопфа (11) имеет вид

$$z_1(x,y) = \frac{x+\alpha}{y+\beta} \quad \text{или } z_0 = \gamma.$$

Доказательство: Подставляя получаем $c_1\,(c_0 a_1 + b_1) = 0$, т.е. $c_0 = -b_1/a_1$. Поскольку c - это функция от $a + b$ можем написать, что $L(c) = 0$, т.е. $b_2 {a_1}^2 + {b_1}^2 a_2 = 0$. Или

$$\frac{a_2}{a_1^2} = -\frac{b_2}{b_1^2} = m,$$

где m - отличная от нуля постоянная. Решая обыкновенные уравнения, получаем

$$a(x) + b(y) = \frac{1}{m}\ln(\frac{x+\alpha}{y+\beta}) + \gamma.$$

Теперь мы можем быть уверены, что решение следует искать в виде

$$z = c(\frac{x+\alpha}{y+\beta}).$$

Подставляя это выражение в (11), сразу получаем, что единственное непостоянное решение - это $c(t) = t$.

Для завершения доказательства заметим, что если одна из первых производных z равна нулю, то равна нулю и вторая.Утверждение доказано.

Мы видим, что все решения уравнения Хопфа сложности один совпадают с третим семейством решений уравнения Бюргерса - z_3. То что все семейство z_3 оказывается семейством решений и уравнения Хопфа следует из того, что вторая производная z_3 по x равна нулю. Однако наше маленькое вычисление доказывает, что других решений сложности один у уравнения Хопфа - нет.

Уравнение Гельмгольца. Имеется два дифференциальных уравнения,

$$z_{xx} - z_{yy} + m^2\,z = 0, \quad z_{xx} + z_{yy} + m^2\,z = 0$$

которые переводятся друг в друга преобразованием $y \to i\,y$, не меняющим сложности. Первое уравнение фигурирует под разными названиями: Клейна-Гордона, Клейна-Гордона-Фока, Клейна-Фока, Шрёдингера-Гордона, а второе называется однородным уравнением Гельмгольца. Для нас это две формы одного уравнения. После замены $(x \to m\,x,\;\; y \to m\,y)$ можем считать, что $m = 1$.

$$z_{xx} + z_{yy} + z = 0 \tag{12}$$

Записывая для $z = c(a(x) + b(y))$ уравнение (12), получаем

$$c_2(a_1^2 + b_1^2) + c_1(a_2 + b_2) + c_0 = 0 \tag{13}$$

Применяя к (13) оператор L (см.(3)), получаем

$$c_2\, L(a_1^2 + b_1^2) + c_1\, L(a_2 + b_2) = 0 \tag{14}$$

Случай 1. Если $L({a_1}^2 + {b_1}^2) = 2\, a_1\, b_1\, (a_2 - b_2) = 0$, то, учитывая, что a_1 и b_1 не обращаются в ноль тождественно, заключаем, что $a_2 = b_2$ и, следовательно, постоянны, т.е. $a(x) = \lambda\, x^2 + \mu_1\, x + \mu_0, \quad b(y) = \lambda\, y^2 + \nu_1\, y + \nu_0$.
Случай 1.1. Если $\lambda = 0$, то мы можем искать z в виде $c(\mu\, x + \nu\, y)$. Уранение на $c(t)$ принимает вид $(\mu^2 + \nu^2)\, c''(t) + c(t) = 0$. Откуда получаем

$$z = k\, e^{\mu\, x + \nu\, y} + l\, e^{-(\mu\, x + \nu\, y)}, \quad \text{где } \mu^2 + \nu^2 = -1.$$

Случай 1.2. Если $\lambda \neq 0$, то мы можем искать z в виде $z = c((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2)$. Уранение на $c(t)$ принимает вид $4\, t\, c''(t) + 4\, c'(t) + c(t) = 0$. Если $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$ - функции Бесселя со значением параметра равным ν, то

$$z = k\; J_0\, (\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2)}) + l\; Y_0\, (\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2)}),$$

Случай 2. Если $L({a_1}^2 + {b_1}^2) = 2\, a_1\, b_1\, (a_2 - b_2) \neq 0$, то из (14) получаем, что $c_2 = \varphi\, c_1$, где

$$\varphi = \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{2\, b_1\, a_1\, (a_2 - b_2)} \tag{15}$$

Записывая условие $L(\varphi) = 0$, получаем

$$\begin{gathered} -{a_1}^3 b_4 b_1 a_2 + {a_1}^3 b_3 b_2 a_2 - {a_1}^3 b_4 b_1 b_2 + {a_1}^3 {b_3}^2 b_1 + \\ {a_1}^3 b_3 {b_2}^2 + {b_1}^3 a_4 a_1 a_2 - {b_1}^3 {a_3}^2 a_1 + \\ {b_1}^3 a_4 a_1 b_2 - {b_1}^3 a_3 {a_2}^2 - {b_1}^3 a_3 a_2 b_2 = 0 \end{gathered} \tag{16}$$

Подставляя соотношение $c_2 = \varphi\, c_1$ в (13), получаем $c_1\, \psi + c_0 = 0$, где

$$\psi = (a_1^2 + b_1^2)\, \varphi + (a_2 + b_2).$$

То что $L(\psi)=0$ следует из $L(\varphi)=0$. Записывая условие согласования для φ и ψ, получаем

$$\begin{gathered}
{a_1}^5{b_3}^2 - 4\,{a_1}^4a_3b_1b_3 + 4\,{a_1}^3{a_2}^2{b_1}^2 + 6\,{a_1}^3{a_2}^2b_1b_3 - \\
2\,{a_1}^3a_2a_4{b_1}^2 - 8\,{a_1}^3a_2{b_1}^2b_2 - 4\,{a_1}^3a_2b_1b_2b_3 + 3\,{a_1}^3{a_3}^2{b_1}^2 + \\
2\,{a_1}^3a_4{b_1}^2b_2 + 4\,{a_1}^3{b_1}^2{b_2}^2 + {a_1}^3{b_1}^2{b_3}^2 - 2\,{a_1}^3b_1{b_2}^2b_3 - \\
6\,{a_1}^2a_2a_3{b_1}^2b_2 - 4\,{a_1}^2a_3{b_1}^3b_3 + 6\,{a_1}^2a_3{b_1}^2{b_2}^2 - 2\,a_1a_2a_4{b_1}^4 + \\
3\,a_1{a_3}^2{b_1}^4 + 2\,a_1a_4{b_1}^4b_2 + 2\,{a_2}^2a_3{b_1}^4 - 2\,a_2a_3{b_1}^4b_2 = 0
\end{gathered} \tag{17}$$

Вводим, как и при изучении уравнения Бюргерса, новые переменные

$$\begin{aligned}
a_1 = A,\ a_2 = p(A) = p_0,\ a_3 = p'(A)\,p(A) = p_1\,p_0, \ldots \\
b_1 = B,\ b_2 = q(B) = q_0,\ b_3 = q'(B)\,q(B) = q_1\,q_0, \ldots
\end{aligned}$$

Тогда (16) примет вид

$$\begin{gathered}
A^3\left(q_2q_0+{q_1}^2\right)q_0Bp_0 - A^3q_1{q_0}^2p_0 - A^3\left(q_2q_0+{q_1}^2\right){q_0}^2B + \\
A^3{q_1}^2{q_0}^2B + A^3q_1{q_0}^3 + B^3\left(p_2p_0+{p_1}^2\right){p_0}^2A - B^3{p_1}^2{p_0}^2A - \\
B^3\left(p_0p_2+{p_1}^2\right)p_0Aq_0 - B^3p_1{p_0}^3 + B^3p_1{p_0}^2q_0 = 0
\end{gathered} \tag{18}$$

а (17) - вид

$$\begin{gathered}
A^5{q_1}^2{q_0}^2 - 4\,A^4p_1p_0Bq_1q_0 + 4\,A^3{p_0}^2B^2 + 6\,A^3{p_0}^2Bq_1q_0 - \\
2\,A^3{p_0}^2\left(p_0p_2+{p_1}^2\right)B^2 - 8\,A^3p_0B^2q_0 - 4\,A^3p_0B{q_0}^2q_1 + \\
3\,A^3{p_1}^2{p_0}^2B^2 + 2\,A^3\left(p_0p_2+{p_1}^2\right)p_0B^2q_0 + 4\,A^3B^2{q_0}^2 + \\
A^3B^2{q_1}^2{q_0}^2 - 2\,A^3B{q_0}^3q_1 - 6\,A^2{p_0}^2p_1B^2q_0 - 4\,A^2p_1p_0B^3q_1q_0 + \\
6\,A^2p_1p_0B^2{q_0}^2 - 2\,A{p_0}^2\left(p_0p_2+{p_1}^2\right)B^4 + 3\,A{p_1}^2{p_0}^2B^4 + \\
2\,A\left(p_0p_2+{p_1}^2\right)p_0B^4q_0 + 2\,{p_0}^3p_1B^4 - 2\,{p_0}^2p_1B^4q_0 = 0
\end{gathered} \tag{19}$$

Несложный анализ соотношений (18) и (19) показывает, что если $a_2 = p_0 = 0$, то и $b_2 = q_0 = 0$. А это в рамках случая 2 - невозможно. Поэтому полагаем, что $p_0 \neq 0,\ q_0 \neq 0$. Если $q_1 = 0$, т.е. q_0 - постоянная, то исключая p_1 и p_2 получаем, что $p_0 = q_0$. Аналогичное заключение можно получить из предположения $p_1 = 0$, т.е. в рамках нашего случая $p_1 \neq 0$ и $q_1 \neq 0$. Коэффициент в (18), стоящий при q_2 это $A^3Bq_0{}^2\,(p_0 - q_0)$ И его обращение в ноль в рамках нашего случая - невозможно. Выразим $q_2\,q_0^2$, продифференцируем по A, получим

$$\begin{aligned}
-A^4 {q_0}^2 {q_1}^2 p_1 + A^2 B^2 p_3 {p_0}^4 + 2\, A^2 B^2 {p_0}^3 p_2 p_1 + 2\, A^2 B^2 p_3 q_0 {p_0}^3 + \\
6\, A^2 B^2 q_0 {p_0}^2 p_2 p_1 + A^2 B^2 p_3 {q_0}^2 {p_0}^2 + 4\, A^2 B^2 {q_0}^2 p_0 p_2 p_1 + A^2 B^2 {q_0}^2 {p_1}^3 - \\
3\, A B^2 {p_0}^4 p_2 - 2\, A B^2 {p_0}^3 {p_1}^2 - 6\, A B^2 {p_0}^3 p_2 q_0 - 6\, A B^2 {p_0}^2 {p_1}^2 q_0 - \\
3\, A B^2 {p_0}^2 p_2 {q_0}^2 - 4\, A B^2 p_0 {p_1}^2 {q_0}^2 + 3\, B^2 {p_0}^4 p_1 + 6\, B^2 {p_0}^3 p_1 q_0 + 3\, B^2 {p_0}^2 p_1 {q_0}^2 = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Это соотношение имеет вид

$$(q'(B)\, q(B))^2 = B^2\, (n(A)\, q(B)^2 + m(A)\, q(B) + l(A)).$$

После дифференцирования по A получим

$$n'(A)\, q(B)^2 + m'(A)\, q(B) + l'(A) = 0.$$

Если q_0 - постоянна, то $q_1 = q_2 = 0$, то исключая p_1 и p_2 можно показать, что p_0 постоянна и равна q_0. Аналогичное заключение следует из постоянства p_0. В рамках случая 2 это невозможно, поэтому полагаем, что как p_0, так и q_0 - непостоянны. Следовательно постоянны $(n(A), m(A), l(A))$. Извлекая из (20) выражения для коэффициентов через $p(A)$ и приравнивая их к значениям постоянных (n, m, l), получаем

$$\begin{aligned}
A^2 B^2 {p_0}^4 p_3 + 2\, A^2 B^2 {p_0}^3 p_2 p_1 - 3\, A B^2 {p_0}^4 p_2 - \\
2\, A B^2 {p_0}^3 {p_1}^2 + 3\, B^2 {p_0}^4 p_1 - l A^4 p_1 = 0 \\
-2\, A^2 B^2 {p_0}^3 p_3 - 6\, A^2 B^2 {p_0}^2 p_1 p_2 + 6\, A B^2 {p_0}^3 p_2 + \\
6\, A B^2 {p_0}^2 {p_1}^2 - m A^4 p_1 - 6\, B^2 {p_0}^3 p_1 = 0 \\
A^2 B^2 {p_0}^2 p_3 + 4\, A^2 B^2 p_0 p_1 p_2 + A^2 B^2 {p_1}^3 - \\
n A^4 p_1 - 3\, A B^2 {p_0}^2 p_2 - 4\, A B^2 p_0 {p_1}^2 + 3\, B^2 {p_0}^2 p_1 = 0
\end{aligned}$$

Исключая из этих соотношений p_3 и p_2, получаем, что $p(A)$ удовлетворяет такому же соотношению, как и $q(B)$, только с заменой B на A т.е. мы имеем

$$\begin{aligned}
&(p'(A)\, p(A))^2 = A^2\, (n\, p(A)^2 + m\, p(A) + l), \\
&(q'(B)\, q(B))^2 = B^2\, (n\, q(B)^2 + m\, q(B) + l)
\end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя (21) в (18) убеждаемся, что необходимые условия (21) оказываются достаточными для выполнения (18).

Случай 2.1. Пусть $n \neq 0$. Решая первое уравнение (21) как уравнение с разделяющимися переменными, после интегрирования получаем

$$A + const = \frac{\sqrt{n\,(p\,(A))^2 + m\,p\,(A) + l}}{n} -$$
$$1/2\,\frac{m}{n^{3/2}}\ln\left(\frac{m/2 + p\,(A)\,n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n\,(p\,(A))^2 + m\,p\,(A) + l}\right)$$

Аналогичному соотношению удовлетворяет функция $q(B)$. Откуда следует, что $p(A)$ и $q(B)$ - трансцендентные функции. Используя (21), из соотношения (19) можно исключить все производные и получить алгебраический полином, связывающий величины $(p(A), A, q(B), B)$. Из трансцендентности p и q следует, что все коэффициенты этого полинома равны нулю. Решая полученную систему относительно (n, m, l) убеждаемся, что она имеет решения только при $n = 0$. Противоречие.
Случай 2.2.1. Пусть теперь $n = 0$, $m \neq 0$. Соотношения (21) принимают вид

$$\begin{aligned} &(p'(A)\,p(A))^2 = A^2\,(m\,p(A) + l),\\ &(q'(B)\,q(B))^2 = B^2\,(m\,q(B) + l) \end{aligned} \tag{22}$$

Решения этих дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными - это алгебраические функции, удовлетворяющие следующим соотношениям

$$\begin{aligned} ep &= -9\,A^4m^4 - 18\,A^2\alpha\,m^4 + 16\,m^3p^3 - 9\,\alpha^2m^4 - 48\,lm^2p^2 + 64\,l^3\\ eq &= -9\,B^4m^4 - 18\,B^2\beta\,m^4 + 16\,m^3q^3 - 9\,\beta^2m^4 - 48\,lm^2q^2 + 64\,l^3 \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями $ep = eq = 0$ можно выразить производные (p_2, q_2, p_1, q_1) через (p_0, q_0) и превратить (19) в полиномиальное соотношение, связывающее $(p_0, q_0, A, B, \alpha, \beta, m, l)$. Вычисляя результант, исключаем из этого соотношения и $eq = 0$ функцию q_0. Полученное соотношение - это полином по B степени 23 вида $\sum r_j(p_0, A, \alpha,\ \beta,\ m,\ l)\,B^j$. Приравниваем к нулю его коэффициенты. Исключим p_0 из соотношений $r_2 = 0$ и $ep = 0$, получим соотношение, которое представляет собой полином по A степени 12. Обращение в тождественный ноль этого полинома возможно лишь при $l = \beta = 0$. Из симметрии $(p, A, \alpha) \leftrightarrow (q, B, \beta)$ получаем что $\alpha = 0$. Однако проверка полученных решений, показывает, что выполнение (18) и (19) возможно лишь при $m = 0$. Противоречие.

Случай 2.2.2. Пусть теперь $n = 0$, $m = 0$, $l = \lambda^2 \neq 0$. Имеем,

$$p'(A)\, p(A) = \lambda\, A, \quad q'(B)\, q(B) = \pm\lambda\, B.$$

Откуда интегрируя получаем,

$$ep = -p_0^2 + \lambda\, A^2 + \alpha^2 = 0, \quad eq = -q_0^2 \pm \lambda\, B^2 + \beta^2 = 0$$

Случай 2.2.2.1. Пусть знак перед λ - это минус. Тогда выражая производные и подставляя их в (19), получаем

$${q_0}^2{p_0}^3 \left(2\, A^2\lambda^2 + 2\, B^2\lambda^2 - 2\,\lambda\, {p_0}^2 + 2\,\lambda\, {q_0}^2 + {p_0}^2 - 2\, p_0 q_0 + {q_0}^2\right) = 0.$$

Откуда следует, что $l = \lambda^2 = 0$. Противоречие.
Случай 2.2.2.2. Пусть знак перед λ^2 - это плюс. Тогда выражая производные и подставляя их в (19), получаем

$${q_0}^2{p_0}^3\, (p_0 - q_0)^2\, (\lambda + 1) = 0,$$

т.е. $\lambda = -1$. Решая в этом случае уравнения (22), получаем

$$a(x) = \alpha\, \cos\,(x + \gamma) + \mu, \quad b(y) = \beta\, \cos\,(y + \delta) + \nu.$$

Подставляя эти a и b в (15), получаем $c''(t) = 0$, т.е. c - линейна.

В итоге нами получено следующее описание решений сложности один.

Теорема 5: Любое решение вида $z = c(a(x) + b(y))$ уравнения Гельмгольца (12) , где z зависит от обеих переменных попадает в одно из трех семейств

$$(I) \quad z_1(x, y) = k\, e^{m\,x + n\,y} + l\, e^{-m\,x - n\,y}, \quad \text{где } m^2 + n^2 = 1, \quad m\,n \neq 0,$$
$$(II) \quad z_2(x, y) = k\; J_0\,(\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2)}) + l\; Y_0\,(\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2)}),$$
$$\text{где } (J_\nu, Y_\nu) \text{ - функции Бесселя},$$
$$(III) \quad z_3(x, y) = k\, cos(x + \alpha) + l\, cos(y + \beta), \quad k\, l \neq 0.$$

Решения уравнения Гельмгольца, зависящие лишь от одного переменного это функции из семейства (I), где $m\,n = 0$. Причем они совпадают с семейством (III) при $k\,l = 0$.

Наше рассуждение легко переносится на уравнения вида

$$z_{xx} + z_{yy} + \varphi(z) = 0 \tag{23}$$

Если $\varphi(z) = -sin(z)$, то такое уравнение называется **синус-Гордон**. Та часть рассуждения, которая касается $a(x)$ и $b(y)$ остается неизменной. При этом возможны лишь два случая $z_1 = c(\lambda\, x + \mu\, y)$ и $z_2 = c((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2))$. В первом случае уравнение на c имеет вид

$$(\lambda^2 + \mu^2)\, c''(t) = \varphi(c(t)). \tag{24}$$

А во втором

$$4\, t\, c''(t) + 4\, c'(t) = \varphi(c(t)). \tag{25}$$

Эти два семейства существуют при любом выборе φ. Третье семейство возможно лишь для линейных $c(t)$, поэтому такие решения возможны только при $\varphi(z) = z + m$.

Следствие 6 : Любое решение вида $z = c(a(x)+b(y))$ уравнения (23), где z зависит от обеих переменных попадает в одно из двух семейств

$$(I) \quad z_1(x,y) = c(m\, x + n\, y), \quad \text{где } c(t)\text{удовлетворяет уравнению}(24),$$
$$(II) \quad z_2(x,y) = c((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2)), \quad \text{где } c(t)\text{удовлетворяет уравнению}(25),$$

Если положить $\varphi(z) = z^2$, то для первого семейства функция $c(t)$ выражается через $\wp$-функцию Вейерштрасса. Если же $\varphi(z) = e^z$, то как для первого, так и для второго семейства $c(t)$ - элементарная функция (логарифмы и тангенсы).

Уравнение Шрёдингера. Рассмотрим уравнение

$$z_y = z_{xx} + z \tag{26}$$

Записывая для $z = c(a(x) + b(y))$ уравнение (26), получаем

$$c_2 {a_1}^2 + c_1 a_2 - c_1 b_1 + c_0 = 0 \tag{27}$$

Применяя к (27) оператор L , получаем

$$2\, b_1 c_2 a_1 a_2 + a_1 c_1 b_2 + b_1 c_1 a_3 = 0 \tag{28}$$

Случай 1. Если $a_2 = 0$, т.е. a - линейна, тогда из (28) следует, что и b - линейна. Ищем $z = c(x + 2\,\mu\, y)$, получаем $2\,\mu\, c'(t) = c''(t) + c(t)$. Характеристические значения - это $\nu_{1,2}(\mu) = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$.
Случай 1.1 Если $\mu = \pm 1$, то $c(t) = k\, e^{\pm t} + l\, t\, e^{\pm t}$. Соответственно

$$z = k\, e^{\pm x + 2\, y} + l\,(x \pm 2\, y)\, e^{\pm x + 2\, y}$$

(знаки - согласованы).
Случай 1.2 Если $\mu \neq \pm 1$, то $c(t) = k\, e^{\nu_1(\mu)\, t} + l\, e^{\nu_2(\mu)\, t}$. Соответственно

$$z = k\, e^{\nu_1(\mu)\,(x + 2\,\mu y)} + l\;\, e^{\nu_2(\mu)\,(x + 2\,\mu\, y)}.$$

Случай 2. Пусть теперь $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$. Тогда $c_2 = \varphi c_1$, где

$$\varphi = -\frac{a_1 b_2 + a_3 b_1}{2\, a_1 a_2 b_1}.$$

Записывая соотношение $L(\varphi) = 0$, получаем

$$ {a_1}^3 b_3 a_2 b_1 - {a_1}^3 {b_2}^2 a_2 + a_3 b_2 {a_1}^2 {b_1}^2 - {b_1}^3 a_4 a_1 a_2 + {b_1}^3 {a_3}^2 a_1 + a_3 {b_1}^3 {a_2}^2 = 0 \tag{29}$$

Из (27) получаем, что $c_1\, \psi + c_0 = 0$, где $\psi = a_1^2\, \varphi + a_2 - b_1$. Условие $L(\psi) = 0$ совпадает с условием $L(\varphi) = 0$. Условие согласования φ и ψ принимает вид

$$\begin{aligned} \psi'_x + a_1\, \varphi\, \psi\, a_1 = \\ {a_1}^3 {b_2}^2 + 4\, {a_1}^2 a_3 b_1 b_2 + 4\, a_1 {a_2}^2 {b_1}^2 - 6\, a_1 {a_2}^2 b_1 b_2 - 2\, a_1 a_2 a_4 {b_1}^2 + \\ 2\, a_1 a_2 {b_1}^2 b_2 + 3\, a_1 {a_3}^2 {b_1}^2 + 2\, a_2 a_3 {b_1}^3 = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Перекачивая полученные соотношения из ab- в pq-обозначения и учитывая, что $a_2 = p_0 \neq 0$, получаем

$$e_1 = -AB^3 {p_0}^2 p_2 + A^3 q_1 q_0 B + p_1 q_0 A^2 B^2 + p_1 {p_0}^2 B^3 - A^3 {q_0}^2 = 0 \tag{31}$$

$$\begin{aligned} e_3 = {q_0}^2 + \frac{(4\, A^2 B p_0 p_1 + 2\, AB^2 p_0 - 6\, AB {p_0}^2)\, q_0}{A^3} + \\ \frac{-2\, AB^2 {p_0}^3 p_2 + A {p_1}^2 {p_0}^2 B^2 + 2\, {p_0}^2 p_1 B^3 + 4\, A {p_0}^2 B^2}{A^3} = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Соотношение (32) имеет вид $q_0^2 + m(p_0, p_1, p_2, A, B)\, q_0 + l(p_0, p_1, p_2, A, B) = 0$. Дифференцируя его по A получаем $q_0\, m'_A + l'_A = 0$. Имеется две возможности:
Случай 2.1. $m'_A = l'_A = 0$. Каждое соотношение линейно по B, поэтому мы получаем четыре соотношения

$$
\begin{aligned}
A^2{p_0}^2p_3 + 2\,A^2p_0p_2p_1 - A^2{p_1}^3 - 2\,A{p_0}^2p_2 + Ap_0{p_1}^2 - 4\,A^2p_1 + 4\,Ap_0 = 0,\\
-Ap_0p_2 - 2\,A{p_1}^2 + 3\,p_0p_1 = 0,\\
2\,A^2p_0p_2 + 2\,A^2{p_1}^2 - 8\,Ap_0p_1 + 6\,{p_0}^2 = 0,\\
Ap_1 - 2\,p_0 = 0
\end{aligned}
$$

Из последнего уравнения сразу получаем, что $p(A) = \lambda\, A^2$. Подставляя его в любое из оставшихся, получаем, что $\lambda = 0$, что не соответствует случаю 2.
Случай 2.2. Либо $(l'_A/m'_A)'_A = 0$. Отделяя в этом выражении коэффициенты при степенях B, получаем

$$
\begin{aligned}
r_0 = 2\,A^5{p_0}^4p_2p_4 - 2\,A^5{p_0}^4{p_3}^2 + 2\,A^5{p_0}^3{p_1}^2p_4 + 4\,A^5{p_0}^3{p_2}^3+\\
12\,A^5{p_0}^2{p_1}^3p_3 - 6\,A^5{p_0}^2{p_1}^2{p_2}^2 + 6\,A^5p_0{p_1}^4p_2 - 2\,A^5{p_1}^6-\\
8\,A^4{p_0}^4p_1p_4 + 6\,A^4{p_0}^4p_2p_3 - 40\,A^4{p_0}^3{p_1}^2p_3 - 12\,A^4{p_0}^2{p_1}^3p_2+\\
6\,A^4p_0{p_1}^5 + 8\,A^5{p_0}^2p_1p_3 - 8\,A^5{p_0}^2{p_2}^2 + 8\,A^5p_0{p_1}^2p_2-\\
8\,A^5{p_1}^4 + 6\,A^3{p_0}^5p_4 + 34\,A^3{p_0}^4p_1p_3 + 4\,A^3{p_0}^4{p_2}^2+\\
10\,A^3{p_0}^3{p_1}^2p_2 - 6\,A^3{p_0}^2{p_1}^4 - 8\,A^4{p_0}^3p_3 + 24\,A^4p_0{p_1}^3-\\
6\,A^2{p_0}^5p_3 - 4\,A^2{p_0}^4p_1p_2 + 2\,A^2{p_0}^3{p_1}^3 - 8\,A^3{p_0}^3p_2-\\
24\,A^3{p_0}^2{p_1}^2 + 8\,A^2{p_0}^3p_1 = 0,\\
r_1 = A^4{p_0}^3p_1p_4 - A^4{p_0}^3p_2p_3 + 7\,A^4{p_0}^2{p_1}^2p_3 - 6\,A^4{p_0}^2p_1{p_2}^2-\\
2\,A^4p_0{p_1}^3p_2 - 5\,A^4{p_1}^5 - 2\,A^3{p_0}^4p_4 - 8\,A^3{p_0}^3p_1p_3+\\
33\,A^3{p_0}^2{p_1}^2p_2 + 22\,A^3p_0{p_1}^4 - 4\,A^4{p_1}^3 - 4\,A^2{p_0}^4p_3-\\
48\,A^2{p_0}^3p_1p_2 - 47\,A^2{p_0}^2{p_1}^3 + 4\,A^3{p_0}^2p_2 + 8\,A^3p_0{p_1}^2+\\
18\,A{p_0}^4p_2 + 48\,A{p_0}^3{p_1}^2 - 4\,A^2{p_0}^2p_1 - 18\,{p_0}^4p_1 = 0,\\
r_2 = -A^3{p_0}^2p_1p_3 + A^3{p_0}^2{p_2}^2 - 4\,A^3p_0{p_1}^2p_2 - 2\,A^3{p_1}^4+\\
2\,A^2{p_0}^3p_3 + 11\,A^2{p_0}^2p_1p_2 + 8\,A^2p_0{p_1}^3 - 6\,A{p_0}^3p_2-\\
12\,A{p_0}^2{p_1}^2 + 6\,{p_0}^3p_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Исключая p_4 из r_0 и r_1, получаем соотношение $R(p_3, p_2, p_1, p_0, A) = 0$ Исключая p_3 из R и r_2, получаем дифференциальный полином, который распадается в произведение степеней трех множителей:

$$\begin{aligned}
R_1 &= A p_1 - 2\,p_0,\\
R_2 &= 2\,A^3 p_0 {p_1}^2 p_2 + 2\,A^3 {p_1}^4 - 8\,A^2 {p_0}^2 p_1 p_2 - 7\,A^2 p_0 {p_1}^3 +\\
&\quad 5\,A {p_0}^3 p_2 + 10\,A {p_0}^2 {p_1}^2 - 5\,{p_0}^3 p_1,\\
R_3 &= 3\,A^3 {p_0}^2 {p_2}^2 + 4\,A^3 p_0 {p_1}^2 p_2 + A^3 {p_1}^4 - 9\,A^2 {p_0}^2 p_1 p_2 -\\
&\quad 11\,A^2 p_0 {p_1}^3 - 4\,A^3 {p_1}^2 + 4\,A {p_0}^3 p_2 + 22\,A {p_0}^2 {p_1}^2 +\\
&\quad 12\,A^2 p_0 p_1 - 12\,{p_0}^3 p_1 - 8\,A {p_0}^2.
\end{aligned}$$

Случай 2.2.1 Пусть $R_1 = 0$, т.е. $p(A) = \lambda\,A^2$. Тогда, подставляя это в (31) и (32) получаем, что $\lambda = 0$. Противоречие.
Случай 2.2.2 Пусть $R_2 = 0$, тогда исключая p_3 из $(R_2)'_A = 0$ и $r_2 = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
R_4 &= 3\,A^4 p_0 {p_1}^2 {p_2}^2 - 3\,A^4 {p_1}^4 p_2 - 14\,A^3 {p_0}^2 p_1 {p_2}^2 + 27\,A^3 p_0 {p_1}^3 p_2 -\\
&\quad A^3 {p_1}^5 + 13\,A^2 {p_0}^3 {p_2}^2 - 71\,A^2 {p_0}^2 {p_1}^2 p_2 + 7\,A^2 p_0 {p_1}^4 +\\
&\quad 68\,A {p_0}^3 p_1 p_2 - 11\,A {p_0}^2 {p_1}^3 - 20\,{p_0}^4 p_2 + 5\,{p_0}^3 {p_1}^2 = 0
\end{aligned}$$

Исключая p_2 из $R_2 = 0$ и $R_4 = 0$, получаем полином, разлагающийся на три множителя

$$\begin{aligned}
R_5 &= A\,p_1,\\
R_6 &= A p_1 - p_0,\\
R_7 &= 2\,A^2 {p_1}^2 - 6\,A p_0 p_1 + 5\,{p_0}^2.
\end{aligned}$$

Случай 2.2.2.1 Пусть $R_5 = A\,p_1 = 0$, т.е. $p(A)$ - постоянная. Тогда, подставляя это в (31) и (32) получаем, что $q_0 = 0$. Противоречие.
Случай 2.2.2.2. Пусть $R_6 = A p_1 - p_0 = 0$, тогда $p(A) = \lambda\,A$. Подставляя это в (31) и (32) получаем, что $q(B) = \mu\,B$ и, далее, $\lambda\,\mu = 0$. Противоречие.
Случай 2.2.2.3. Пусть $R_7 = 0$. Исключая p_2 из $(R_7)'_A = 0$ и $R_2 = 0$, получаем $R_8(p_1, p_0, A)$. Исключая p_1 из $R_7 = 0$ и $R_8 = 0$, получаем $80\,A^8 {p_0}^8 = 0$. Противоречие.
Случай 2.2.3 Пусть $R_3 = 0$, тогда исключая p_3 из $(R_3)'_A = 0$ и $r_2 = 0$, получаем $R_9(p_2, p_1, p_0, A) = 0$. Исключая p_2 из $R_9 = 0$ и $R_3 = 0$, получаем полином, из неприводимых множителей которого в нашем случае в ноль

могут обращаться только два

$$R_{10} = p_0 p_1 + A,$$
$$R_{11} = 60\,A^6 {p_1}^7 + 828\,A^5 p_0 {p_1}^6 + 784\,A^6 {p_1}^5 - 7341\,A^4 {p_0}^2 {p_1}^5 - 5744\,A^5 p_0 {p_1}^4 + 21554\,A^3 {p_0}^3 {p_1}^4 + 16896\,A^4 {p_0}^2 {p_1}^3 - 30350\,A^2 {p_0}^4 {p_1}^3 - 24816\,A^3 {p_0}^3 {p_1}^2 + 20968\,A {p_0}^5 {p_1}^2 - 48\,A^4 {p_0}^2 p_1 + 18088\,A^2 {p_0}^4 p_1 - 5712\,{p_0}^6 p_1 + 96\,A^3 {p_0}^3 - 5168\,A {p_0}^5.$$

Случай 2.2.3.1 Пусть $R_{10} = 0$, тогда $p(A) = \sqrt{\lambda^2 - A^2}$. Исключая p_2 из $(R_{10})'_A = 0$ и $R_3 = 0$, получаем $R_{12}(p_1, p_0, A) = 0$. Исключая p_1 из $R_{11} = 0$ и $R_{12} = 0$, получаем соотношение $R_{13}(p_0, A) = 0$ которое, после подстановки значения $p_0 = \sqrt{\lambda^2 - A^2}$, принимает вид $18630\,A^{31} - 270081\,\lambda^2\,A^{29} ... = 0$. Противоречие.
Случай 2.2.3.2 Пусть $R_{11} = 0$. Исключая p_2 из $(R_{11})'_A = 0$ и $R_3 = 0$, получаем $R_{14}(p_1, p_0, A) = 0$. Исключая p_1 из $R_{11} = 0$ и $R_{14} = 0$, получаем соотношение $R_{15}(p_0, A) = 0$ которое, после удаления ненулевого множителя $373546567492618420224 00\,A^{91}\,p_0^{32}$, представляет собой однородный многочлен по переменным p_0 и A степени 78. Этот многочлен разлагается на множители вида $(p_0 - \lambda_j\,A)$. Таким образом его обращение в ноль возможно лишь при $p(A) = \lambda\,A$, а эта возможность была отсечена выше.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 7: Любое решение вида $z = c(a(x) + b(y))$ уравнения Шредингера (26) , где z зависит от обеих переменных попадает в одно из двух семейств элементарных функций

$$(I) \quad z_1(x,y) = k\,e^{\nu_1(\mu)(x+2\,\mu\,y)} + l\ e^{\nu_2(\mu)(x+2\,\mu\,y)},\ \nu_{1,2}(\mu) = \mu \pm \sqrt{\mu^2-1},\ \mu \neq \pm 1,$$
$$(II) \quad z_1(x,y) = k\,e^{\pm\,x+2\,y} + l\,(x \pm 2\,y)\,e^{\pm\,x+2\,y}, \text{знаки согласованы},$$

причем хотя бы один из параметров k или l отличен от нуля.

Решения, зависящие только от x имеют вид $z(x) = k\,e^{ix} + l\,e^{-ix}$, решения, зависящие только от y имеют вид $z(y) = k\,e^{y}$.

Однородное уравнение Монжа-Ампера -

$$z''_{xx}\,z''_{yy} - (z_{xy})^2 = 0, \tag{33}$$

Подставляя $z = c(a(x) + b(y))$, получаем

$$a_1{}^2 b_2 c_2 + a_2 b_1{}^2 c_2 + a_2 b_2 c_1 = 0 \tag{34}$$

где $c_1 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$.
Случай 1. Пусть $c_2 = 0$, т.е. $c(t)$ - линейна, тогда $a_2\, b_2 = 0$, т.е. одна из этих функций тоже линейна, а вторая - произвольна, т.е. $z_1 = k\,x + b(y)$, $z_2 = a(x) + l\,y$.
Случай 2. Пусть $c_2 \neq 0$. Если при этом $a_2 = 0$, то $b_2 = 0$ и наоборот. Таким образом линейны обе функции и $z = c(k\,x + l\,y)$, где c - произвольна.
Случай 3. Пусть $c_2 \neq 0$, $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$, тогда

$$\frac{c_2}{c_1} = -\frac{a_2 b_2}{a_1{}^2 b_2 + a_2 b_1{}^2}.$$

Применяя оператор L, получаем

$$-a_1 a_3 b_2{}^2 + a_2{}^2 b_1 b_3 = 0 \text{ или } \frac{b_3\, b_1}{b_2^2} = \frac{a_3\, a_1}{a_2^2} = \lambda = const.$$

Случай 3.1. Решая при $\lambda \neq 0;\ 1;\ 2$ дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} f\,(t)\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\,(t) - \lambda \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f\,(t)\right)^2 = 0,$$

получаем

$$a(x) + b(y) = \mu\ (x + \alpha)^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}} + \nu\ (y + \beta)^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}$$

(аддитивную константу влючаем в $c(t)$). Уравнение на $c(t)$ принимает вид

$$\frac{c''(t)}{c'(t)} = \frac{1}{(\lambda - 2)\,t}.$$

Решая его получаем

$$c(t) = \gamma + \delta\, t^{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}}.$$

Итого

$$z = \gamma + \left(\nu\ (y + \beta)^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}} + \mu\ (x + \alpha)^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}}.$$

Случай 3.2. Если $\lambda = 0$, то $a_3 = b_3 = 0$, т.е.

$$a(x) + b(y) = k\,(x - \alpha)^2 + l\,(y - \beta)^2.$$

При этом уравнение на $c(t)$ принимает вид

$$\frac{c''(t)}{c'(t)} + \frac{1}{2\,t} = 0,$$

а его решение имеет вид $c(t) = \gamma + \delta\,\sqrt{t}$. Итого получаем

$$z = \gamma + \delta\,\sqrt{k\,(x-\alpha)^2 + l\,(y-\beta)^2}.$$

Случай 3.3. Если $\lambda = 1$, то решая уравнение

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\,(t)\right) \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} f\,(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f\,(t)\right)^2$$

получаем

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{c_2\; c_1}\mathrm{e}^{t c_1}}{c_1} + c_3,$$

поэтому

$$a(x) + b(y) = \frac{\mathrm{e}^{c_2 c_1}\mathrm{e}^{x c_1}}{c_1} + c_3 + \frac{\mathrm{e}^{c_5 c_4}\mathrm{e}^{y c_4}}{c_4} + c_6$$

Аддитивные константы можно убрать и уравнение на $c(t)$ принимает вид $\frac{c''(t)}{c'(t)} + \frac{1}{t} = 0$. Его решение - $c(t) = \mu\,\ln(t) + \gamma$ и мы получаем

$$z = \delta\,\ln(\mu\,e^{\alpha x} + \nu\,e^{\beta y}).$$

Случай 3.4. Если $\lambda = 2$, то решая уравнение

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\,(t)\right) \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} f\,(t) = 2\,\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f\,(t)\right)^2$$

получаем

$$a(x) + b(y) = \mu\,\ln(\alpha + x) + \nu\,\ln(\beta + y)\,.$$

При этом $c(t) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{\frac{t}{\mu+\nu}}$, поэтому

$$z = \delta\,(\alpha + x)^{\mu}\,(\beta + y)^{1-\mu} + \gamma$$

Теорема 8: Любое решение вида $z = c(a(x)+b(y))$ уравнения Монжа-Ампера (34) , где z зависит от обеих переменных попадает в одно из семейств функций

$$(I) \quad z_{11} = k\,x + b(y), \quad z_{12} = a(x) + l\,y,$$

$$(II) \quad z_2 = c(k\,x + l\,y),$$

$$(III) \quad z_3 = \left(\mu\,(x-\alpha)^\lambda + \nu\,(y-\beta)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} + \gamma, \quad \lambda \neq 0,\ 1$$

$$(IV) \quad z_4 = \delta\,\ln(\mu\,e^{kx} + \nu\,e^{ly}),$$

$$(V) \quad z_5 = \delta\,(x-\alpha)^\mu\,(y-\beta)^\nu + \gamma, \quad \mu + \nu = 1.$$

причем $k\,l\,\mu\,\nu\,\delta \neq 0$, $(a(x),\ b(y),\ c(t))$ - произвольные непостоянные функции.

Данные семейства имеют следующие размерности: (I) - ∞, (II) - ∞, (III) - 6, (IV) - 5, (V) - 5. Отметим, также, что любая функция одного переменного является решением уравнения однородного уравнения Монжа-Ампера (34).

Уравнение Лапласа -

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 0, \tag{35}$$

а также связанное с ним заменой $y \to i\,y$ волновое уравнение $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$ были ранее рассмотрены в [4]. Однако описание решений сложности один, данное там было недостаточно явным и, поэтому, здесь мы еще раз возвращаемся к этим уравнениям. Из этих двух уравнений мы для определенности выбираем уравнение Лапласа, причем построим процедуру вычисления не так, как в [4]. Здесь мы будем ставить вопрос иначе. При каких f и g общее решение уравнения Лапласа $z = f(x+i\,y) + g(x-i\,y)$ имеет сложность один?

Случай 0. Если z зависит лишь от одного переменного, то это означает, что $z = k\,x + l$ или $z = k\,y + l$.

Случай 1. Далее заметим, что если одна из функций постоянна, то при

любом выборе второй функции z имеет сложность не выше единицы ("голоморфные"и "антиголоморфные"функции).
Случай 2. Пусть

$$f'(x+i\,y) \neq 0,\ g'(x-i\,y) \neq 0,\ f'(x+i\,y)+g'(x-i\,y) \neq 0,\ f'(x+i\,y)-g'(x-i\,y) \neq 0$$

Запишем для $z = f + g$ уравнение первого класса, получим

$$(\ln(\frac{z'_x}{z'_y}))''_{xy} = (\ln(\frac{f'(x+i\,y)+g'(x-i\,y)}{i\,f'(x+i\,y)-i\,g'(x-i\,y)}))''_{xy} = 0.$$

Это дробь, числитель которой дает

$$f_1{}^3g_3 + f_1{}^2f_3g_1 - 2\,f_1f_2{}^2g_1 - f_1g_1{}^2g_3 + 2\,f_1g_1g_2{}^2 - f_3g_1{}^3 = 0, \qquad (36)$$

а знаменатель - $(f_1+g_1)^2\,(f_1-g_1)^2$ отличен от нуля. Пусть теперь $f'(x+i\,y) = A$ - это независимая переменная, а $(f''(x+i\,y))^2 = p(A)$ - функция. Аналогично - $g'(x-i\,y) = B$ и $(g''(x-i\,y))^2 = q(B)$. Тогда (36) примет вид

$$A^3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B}q(B) + A^2B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}p(A) - 4\,Ap(A)\,B - AB^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B}q(B) + 4\,ABq(B) - B^3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}p(A) = 0 \qquad (37)$$

Фиксируя в (37) значения $(B \neq 0,\ q(B),\ q'(B))$, получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение на $p(A)$. Его общее решение имеет вид

$$\left(A^2-B^2\right)^2C + 1/2\,\frac{A^2q_1 - B^2q_1 + 2\,Bq_0}{B}$$

где C - произвольная постоянная. Таким образом мы можем написать, что $p(A) = N\,A^4 + M\,A^2 + L$. Поступая аналогично, получаем, что $q(B) = n\,B^4 + m\,B^2 + l$. Подставляя эти выражения в (37), убеждаемся, что $N = n,\ M = m,\ L = l$ и при любых (n,m,l) это является достаточным для выполнения (37).
Случай 2.1. Если $n = m = l = 0$, тогда $f'' = g'' = 0$, при этом $z = \alpha\,x + \beta\,y + \gamma$.
Случай 2.2. Если $n = m = 0,\ l = \lambda^2 \neq 0$, тогда $f'' = g'' = \lambda$, при этом $f(t) = (\lambda/2)\,t^2 + c_1\,t + c_0$, соответственно $g(t) = (\lambda/2)\,t^2 + c_3\,t + c_4$. При

этом $z = f(x+i\,y) + g(x-i\,y) = \lambda((x+\alpha)^2 - (y+\beta)^2) + \gamma$.
Случай 2.3.1 Если $n = 0,\ m = \mu^2 \neq 0,\, l = 0$, тогда решая уравнение $f''(t) = \mu\,(f'(t))$, получаем $f(t) = c_1\, e^{\mu\, t} + C_1$. Аналогично получаем $g(t) = c_2\, e^{\mu\, t} + C_2$. В итоге

$$z = f(x+i\,y) + g(x-i\,y) = c_1\, e^{\mu\,(x+i\,y)} + c_2\, e^{\mu\,(x-i\,y)} + c_3$$

Случай 2.3.2 Если $n = 0,\ m = \mu^2 \neq 0,\, l = \nu^2 \neq 0$, тогда решая уравнение $f''(t) = \sqrt{\mu^2\,(f'(t))^2 + \nu^2}$, получаем

$$f(t) = 1/2\,\frac{\nu^2}{\mu^2 c_1 \mathrm{e}^{\mu\, t}} + 1/2\,\frac{c_1 \mathrm{e}^{\mu\, t}}{\mu^2} + c_2.$$

Решая уравнение на g соответственно получаем,

$$z = f(x+i\,y) + g(x-i\,y) =$$
$$1/2\,\frac{\nu^2}{\mu^2 \alpha\, \mathrm{e}^{\mu\,(x+iy)}} + 1/2\,\frac{\alpha\, \mathrm{e}^{\mu\,(x+iy)}}{\mu^2} + 1/2\,\frac{\nu^2}{\mu^2 \beta\, \mathrm{e}^{\mu\,(x-iy)}} + 1/2\,\frac{\beta\, \mathrm{e}^{\mu\,(x-iy)}}{\mu^2} + \gamma$$

Случай 2.4 Пусть теперь $n = \delta^2 \neq 0$, тогда $n\,A^4 + m\,A^2 + l = \delta^2\,(A^2 - \mu^2)(A^2 - \nu^2)$, т.е. уравнения на $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению вида

$$f''(t) = \delta\,\sqrt{(f'(t)^2 - \mu^2)\,(f'(t)^2 - \nu^2)} \tag{38}$$

Случай 2.4.1. Пусть $\mu = \nu = 0$, тогда, решая уравнение $f''(t) = \delta\,(f'(t))^2$, получаем

$$z = -\frac{1}{\delta}\ln((x+i\,y)+c_1) - \frac{1}{\delta}\ln((x-i\,y)+c_2) + c_3 = \lambda\,(\ln((x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2)) + \gamma,$$

Случай 2.4.2. Пусть $\mu \neq 0,\ \nu = 0$, тогда, решая уравнения (38), получаем

$$z = \frac{2}{\delta\, i}\left(\operatorname{arctg}\left(1/2\,\frac{\mathrm{e}^{i(i\delta\, y - \delta\, x - c_2)\mu}}{\mu}\right) + \operatorname{arctg}\left(1/2\,\frac{\mathrm{e}^{-i(\delta\, x + c_1 + i\delta\, y)\mu}}{\mu}\right)\right) + c_3$$

Случай 2.4.3. Пусть $\mu^2 = \nu^2 \neq 0$. Решая уравнение (38), получаем

$$f(t) = -\frac{\ln\left(-1 + \mathrm{e}^{2\,t\delta\,\mu + 2\,\delta\,\mu\, c_1}\right)}{\delta} + 1/2\,\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2\,t\delta\,\mu + 2\,\delta\,\mu\, c_1}\right)}{\delta} + c_2.$$

Тогда

$$z = f(x + i\,y) + g(x - i\,y) =$$
$$\frac{1}{\delta}\,\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\delta\,\mu\,(\alpha+\beta+2\,x)}}{\left(-1+\mathrm{e}^{2\,\delta\,\mu\,(iy+x+\alpha)}\right)\left(-1+\mathrm{e}^{-2\,\delta\,\mu\,(iy-\beta-x)}\right)}\right)+\gamma$$

Случай 2.4.4. Пусть теперь $\mu \neq 0,\ \nu \neq 0,\ \mu^2 \neq \nu^2$, тогда можем написать

$$n\,A^4 + m\,A^2 + l = \delta^2\,\mu^2\,\nu^2\,(1 - \frac{A^2}{\mu^2})\,(1 - k^2\,\frac{A^2}{\mu^2}),$$

где $k^2 = \mu^2/\nu^2 \neq 1$. Если $F(t) = f'(t)$, то F удовлетворяет уравнению

$$F'(t) = \delta\,\mu\,\nu\,\sqrt{(1 - \frac{F(t)^2}{\mu^2})\,(1 - k^2\,\frac{F(t)^2}{\mu^2})}$$

Пусть $\Phi(t) = F(t/(\delta\nu))/\mu$, тогда Φ удовлетворяет уравнению

$$\Phi'(t) = \sqrt{(1 - \Phi(t)^2)\,(1 - k^2\,\Phi(t)^2)}.$$

Откуда получаем, что $\Phi(t) = \mathrm{sn}(t + c_1, k)$, где sn - эллиптический синус Якоби. Таким образом $f'(t) = F(t) = \mu\,\mathrm{sn}(\delta\,\nu\,t + c_1)$. Поскольку первообразная $\mathrm{sn} = (t, k)$ имеет вид

$$\int sn(t,k)\,dt = \frac{1}{k}\,\ln(dn(t,k) - k\,cn(t,k)) + c_2,$$

где dn и cn также хорошо известные эллиптические функции Якоби, то получаем

$$f(t) = \frac{\mu\,\ln\left(\mathrm{dn}\left(\delta\,\nu\,t + c_1, k\right) - k\mathrm{cn}\left(\delta\,\nu\,t + c_1, k\right)\right)}{\delta\,\nu\,k} + c_2$$

В результате получаем

$$z = f(x + i\,y) + g(x - i\,y) =$$
$$\frac{\mu\,\ln\left(\mathrm{dn}\left(\delta\,\nu\,\left(x+iy\right)+c_1,k\right)-k\mathrm{cn}\left(\delta\,\nu\,\left(x+iy\right)+c_1,k\right)\right)}{\delta\,\nu\,k}+$$
$$\frac{\mu\,\ln\left(\mathrm{dn}\left(\delta\,\nu\,\left(x-iy\right)+c_2,k\right)-k\mathrm{cn}\left(\delta\,\nu\,\left(x-iy\right)+c_2,k\right)\right)}{\delta\,\nu\,k}+c_3$$

Итак, описание гармонических функций сложности один выглядит так

Теорема 9: Любое решение вида $z = c(a(x)+b(y))$ уравнения Лапласа (35) попадает в одно из семейств

$(I)\quad z_{11} = k\,x + l,$ или $z_{12} = k\,y + l, \quad k \neq 0,$

$(II)\quad z_{21} = g(x + i\,y)$ или $z_{22} = f(x - i\,y), \quad f'\,g' \neq 0,$

$$(III)\quad z_3 = \alpha\,x + \beta\,y + \gamma, \quad \alpha\,\beta \neq 0, \quad \beta \neq \pm i\,\alpha,$$

$$(IV)\quad z_4 = \lambda((x+\alpha)^2 - (y+\beta)^2) + \gamma, \quad \lambda \neq 0,$$

$(V)\quad z_5 = \alpha\,e^{\mu\,(x+i\,y)} + \beta\,e^{\mu\,(x-i\,y)} + \gamma,$ α или $\beta \neq 0, \quad \mu \neq 0,$

$$(VI)\quad z_6 = \lambda\,\ln((x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2) + \gamma, \quad \lambda \neq 0,$$

$$(VII)\quad z_7 = \frac{\nu^2}{2\,\mu^2 \alpha\,\mathrm{e}^{\mu\,(x+iy)}} + \frac{\alpha\,\mathrm{e}^{\mu\,(x+iy)}}{2\,\mu^2} +$$

$$\frac{\nu^2}{2\,\mu^2 \beta\,\mathrm{e}^{\mu\,(x-iy)}} + \frac{\beta\,\mathrm{e}^{\mu\,(x-iy)}}{2\,\mu^2} + \gamma, \quad \alpha\,\beta\,\mu\,\nu \neq 0,$$

$$(VIII)\quad z_8 = \frac{2}{\delta\,i}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{e}^{i(i\delta\,y - \delta\,x - \beta)\mu}}{2\,\mu}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{e}^{-i(\delta\,x + i\delta\,y + \alpha)\mu}}{2\,\mu}\right)\right) + \gamma, \quad \delta\,\mu \neq 0,$$

$$(IX)\quad z_9 = \frac{1}{\delta}\,\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\delta\,\mu\,(\alpha+\beta+2\,x)}}{\left(-1+\mathrm{e}^{2\,\delta\,\mu\,(iy+x+\alpha)}\right)\left(-1+\mathrm{e}^{-2\,\delta\,\mu\,(iy-\beta-x)}\right)}\right) + \gamma, \quad \delta\,\mu \neq 0,$$

$$(X)\quad z_{10} = \frac{1}{\delta}\,\ln\left(\nu\,\mathrm{dn}\left(\delta\,\nu\,\left(x+iy\right)+\alpha,\left(\mu/\nu\right)\right) - \mu\,\mathrm{cn}\left(\delta\,\nu\,\left(x+iy\right)+\alpha,\left(\mu/\nu\right)\right)\right) +$$

$$\frac{1}{\delta}\,\ln\left(\nu\,\mathrm{dn}\left(\delta\,\nu\,\left(x-iy\right)+\beta,\left(\mu/\nu\right)\right) - \mu\,\mathrm{cn}\left(\delta\,\nu\,\left(x-iy\right)+\beta,\left(\mu/\nu\right)\right)\right) + \gamma, \quad \delta\,\nu \neq 0.$$

При этом размерности этих десяти семейств таковы: размерность (I) равна 2, (II) - ∞, (III) - 3, (IV) - 4, (V) - 4, (VI) - 4, (VII) - 5, (VIII) - 5, (IX) - 5, (X) - 6.

Напомним, что преобразование $(y \to i\,y)$ переводит функции из десяти описанных семейств в решения волнового уравнения, сложности не выше единицы.

С каждым дифференциальным соотношением на функции двух переменных можно связать последовательность $\{d_n\}$ (*аналитический спектр*), где d_n -максимальная размерность семейств решений данного уравнения, состоящих из решений аналитической сложности n. При этом n принимает значения $0, 1, ..., \infty$, как и d_n. Напомним, что теорема Коши-Ковалевской позволяет утверждать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \infty.$$

Если подытожить имеющиеся у нас данные по некоторым уравнениям, то получаем:

$$\begin{aligned}
\text{уравнение Бюргерса} \quad d_0 = 2,\ d_1 = 3, d_2 \geq 2;\\
\text{уравнение Хопфа} \quad d_0 = 1,\ d_1 = 2;\\
\text{уравнение теплопроводности} \quad d_0 = 2,\ d_1 = 4;\\
\text{уравнение Шредингера} \quad d_0 = 2,\ d_1 = 3;\\
\text{уравнения Гельмгольца, Клейна-Гордона, синус-Гордона,...} \quad d_0 = 2, d_1 = 4;\\
\text{уравнение Лиувилля} \quad d_0 = 0,\ d_1 = 6, d_2 = \infty, d_3 = ... = d_\infty = 0;\\
\text{уравнения Лапласа и волновое} \quad d_0 = 2, d_1 = \infty, d_2 = \infty, d_3 = .. = d_\infty = 0;\\
\text{уравнение Монжа-Ампера} \quad d_0 = \infty, d_1 = \infty.
\end{aligned}$$

Не трудно показать, что d_∞ может принимать лишь два значения: либо ноль, либо бесконечность. Недавно, с помощью весьма остроумных аргументов М.Степановой [7] удалось доказать, что для уравнения теплопроводности $d_\infty = \infty$. В этой же работе построены конкретные примеры решений уравнения теплопроводности бесконечной сложности.
Если же в качестве уравнения взять уравнение первого класса,

$$\delta_1(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z'_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0$$

то получаем, что его аналитический спектр имеет вид $(d_0 = \infty, d_1 = \infty, d_2 = d_3 =, ... = d_\infty = 0)$. Если брать в качестве уравнения уравнение какого -либо класса сложности Cl_n, где $n > 1$, то там картина аналогична, т.е. все $d_0 = d_1 = ... = d_n = \infty,\ d_{n+1} = ... = 0$. Однако при этом следует иметь ввиду, что это не одно уравнение, а система дифференциальных полиномов высоких порядков. Например для $n = 2$ первые дифференциальне условия возникают в 11-струе, а число уравнений не меньше 3. Причем для системы уравнений, т.е. в случае когда соотношений больше, чем одно, сумма размерностей, т.е. размерность полного пространства решений, как правило, конечна.

Полнее, чем в форме аналитического спектра, информацию о взаимодейтвии уравнений и иерархии классов сложности можно представить как некое топологическое пространство (*стратифицированное пространство решений*). Это пространство, стратифицированное по классам, параметризует семейства решений данной сложности. Оно естественно возникает при использовании топологии соответствующих струй (номер струи - дифференциальный порядок семейства).

Напоследок несколько вопросов.

Вопросы 10: (a) Возможна ли ситуация когда в последовательности $\{d_n\}$, построенной для неприводимого дифференциального полинома после бесконечности стоит ненулевое конечное число?
(b) Возможна ли ситуация когда в этой последовательности $\{d_n\}$ две бесконечности разделяются конечными значениями?
(c) Рассмотрим класс неприводимых дифференциальных полиномов дифференциального порядка p , для которых $d_1 < \infty$. Является ли эта величина ограниченной по всему классу? Если - да, то на каких дифференциальных полиномах реализуется максимум?
(d) Является ли стратифицированное пространство решений односвязным?

Список литературы

[1] Ostrowski A. Uber Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen // Math. Z. 1920. Bd. 8, S. 241–298.

[2] Витушкин А. Г. 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы // УМН. 2004. Т. 59, вып. 1(355). С. 11–24.

[3] Beloshapka V. K. Analytic complexity of functions of two variables // Russ. J. Math. Phys. 2007. Vol. 14, №3. P. 243–249.

[4] В. К. Белошапка, Семимерное семейство простых гармонических функций, Матем. заметки, 2015, том 98, выпуск 6, 803–808

[5] Beloshapka V. K., Stabilizer of a Function in the Gage Group, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 24, No. 2, 2017, pp. 1–10.

[6] Beloshapka V. K. Простые решения трёх уравнений математической физики, Труды ММО, Том 79, вып. 2, 2018 г., с.1-16.

[7] Степанова М.А., Об аналитической сложности дифференциально-алгебраических функций, Мат. сборник, т. 210, № 12 (2019) сс.120-135.