CR-многобразия конечного Блум-Грэм-типа: метод модельной поверхности

Белошапка В.К.

02.02.2020

Аннотация

В работе метод модельной поверхности применяется к произвольным CR-многообразиям конечного типа по Блуму-Грэму. Доказан набор основных утверждений. Доказано также, что для модельной поверхности постоянство Блум-Грэм-типа - это критерий голоморфной однородности. Выявлены отличия от разобранного ранее случая жестких моделей. Сформулирована серия вопросов и гипотез.

[1]

1.Введение

На заре CR-геометрии А.Пуанкаре [1], применяя свою технику работы с формальными степенными рядами, исследовал свойства ростка вещественной гиперповерхности двумерного комплексного пространства, инвариантные относительно голоморфных преобразований. При этом выяснилось, что ключом к пониманию ситуации является росток 3-мерной сферы, который обладает рядом экстремальных свойств. Например, его 8-мерная локальная группа голоморфных автоморфизмов

[1]Механико-математический факультет Московского университета им.Ломоносова, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия, vkb@strogino.ru.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 18-41-05003

имеет максимальную размерность, если не брать в расчет гиперплоскость, группа которой бесконечномерна. Уравнения ростка невырожденной гиперповерхности в $\mathbf{C}^2$ (координаты $(z, w = u + i\,v)$) можно записать в виде

$$v = |z|^2 + \text{члены более высоких степеней}$$

При этом гиперповерхность $\{v = |z|^2\}$ - проективно эквивалентная стандартной сфере $\{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$ - это и есть наша модельная гиперповерхность.

Впоследствии этот подход развивался и успешно применялся для изучения CR-многообразий различных размерностей [2] и коразмерностей [3]. При этом модельная поверхность - аналог сферы - некоторым образом модифицировалась. В [4] этот подход (метод модельной поверхности) был реализован для произвольного вещественного ростка общего положения (при условии полной невырожденности).

Недавно в работах Сабзевари, Спиро [5] и Грегоровича [6] была доказана g_+-гипотеза. Т.е. было доказано, что стабилизатор начала координат вполне невырожденной модельной поверхности старшего веса больше, чем два не содержит нелинейных преобразований. Иначе это можно выразить так. Подалгебра g_+ полей положительного веса в алгебре Ли инфинитезимальных автоморфизмов - тривиальна. При этом отметим, что если отказаться от условия полной невырожденности, то это не так. Например $\{v = |z|^4\}$ - гиперповерхность в $\mathbf{C}^2$ со старшим весом четыре и нетривиальной подалгеброй g_+. Серия интересных примеров с g_+ произвольного положительного веса содержится в уже цитированной работе [6].

После доказательства гипотезы возрос интерес к распространению метода модельной поверхности на классы CR-многообразий, выходящие за рамки вполне невырожденных многообразий. Таким естественным раширением класса вполне невырожденных многообразий являются порождающие CR-многообразия конечного типа. В работе [12] программа метода модельной поверхности была реализована для многообразий произвольного конечного типа по Блуму-Грэму, но с некоторым, достаточно обременительным, дополнительным условием. Речь шла о многообразиях, чья модельная поверхность обладала условием жесткости. В данной работе мы освободимся от этого условия и рассмотрим произвольные многообразия конечного типа. При этом существенной для нашего изложения является теорема Блума-Грэма [8], которая связывает две точки зрения на тип ростка CR-многообразия: геометрическую (поля и коммутаторы) и аналитическую (координаты и уравнения). В данной работе мы будем, по преимуществу, иметь дело с аналитическим определением типа (см.п.2). Для удобства читателя приведем здесь его геометрическое определение.

Пусть M - гладкое порождающее CR-подмногообразие комплексного линейного пространства коразмерности $K \geq 1$, $n \geq 1$ - размерность комплексной касательной, $\xi \in M$. Пусть D_1 - это распределение комплексных касательных определенное на M в окрестности ξ, т.е. $D_1 = T^c_M$. Это распределение можно задать с помощью базисного набора из $2\,n$ гладких вещественных векторных полей. Далее определим бесконечную последовательность распределений D_ν, определяемых индуктивно $D_{\nu+1} = [D_\nu, D_1] + D_\nu, \quad \nu = 1, 2, ...$ Пусть, далее, $D_\nu(\xi)$ - это значение D_ν в точке ξ. Таким образом

$$T^c\,M_\xi = D_1(\xi) \subset D_2(\xi) \subset ... \subset D_\nu(\xi) \subset ...$$

Поскольку эта неубывающая последовательность состоит из подпространств TM_ξ, то она, на каком то шаге, стабилизируется. Если это последнее подпространство совпадает с TM_ξ, то мы говорим, что M в точке ξ является многообразием *конечного типа*, если нет - *бесконечного*. Пусть, далее, $d_\nu = \dim_{\mathbf{R}}\, D_\nu(\xi)$.

$$2\,n = d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_{\mu-1} < d_\mu = d_{\mu+1} = ... = d_\infty$$

Отметив все те номера $\nu \geq 2$, для которых происходил скачок размерности, получим конечную строго возрастающую последовательность $2 \leq m_1 < m_2 < ... < m_l$. Саму величину положительного скачка $d_{m_j} - d_{m_j - 1}$ обозначим через $k_j,\ j = 1, ..., l$. Эта совокупность данных

$$m = ((m_1, k_1), ..., (m_l, k_l))$$

плюс указание на конечность или бесконечность типа и называется (геометрическим) типом M в точке ξ. Нетрудно заметить, что если тип конечен, то коразмерность K - это сумма всех k_j. Для бесконечного типа эта сумма меньше коразмерности.

В работе [8] эти данные записываются в другом формате, а именно

$$m = (m_1, ..., m_1, m_2, ..., m_2, ..., m_l, ..., m_l),$$

при этом число повторений m_j равно k_j и в случае, если тип бесконечен, то в конце этой последовательности ставится знак ∞.

Далее, для всякого M_ξ, ростка вещественного подмногообразия комплексного пространства в точке ξ введем в рассмотрение следующие объекты

$$\mathrm{aut}\, M_\xi, \quad \mathrm{aut}_\xi M_\xi, \quad \mathrm{Aut}\ M_\xi, \quad \mathrm{Aut}_\xi\, M_\xi,$$

Здесь $\mathrm{aut}\, M_\xi$ - это подалгебра Ли ростков векторных полей в ξ, касательных к M_ξ, порождающих локальные 1-параметрические группы голоморфных преобразований M_ξ. Такие поля в координатах (z,w) имеют вид

$$X = 2\,\mathrm{Re}\,(f(z,w)\,\frac{\partial}{\partial\, z} + g(z,w)\,\frac{\partial}{\partial\, w}), \tag{1}$$

где f и g - ростки, голоморфные в ξ , $\mathrm{aut}_\xi M_\xi$ - подалгебра Ли $\mathrm{aut}\, M_\xi$, состоящая из полей, обращающихся в ноль в точке ξ. Каждая из этих алгебр Ли порождает локальную группу голоморфных преобразований M_ξ - $\mathrm{Aut}\, M_\xi$ и $\mathrm{Aut}_\xi M_\xi$ соответственно (локальные автоморфизмы ростка и стабилизатор точки в локальной группе автоморфизмов).

2. Анализ младших компонент отображения и теорема Блума-Грэма

Пусть M - гладкое порождающее вещественное подмногообразие комплексного пространства $\mathbf{C}^N$ положительной CR-размерности n и положительной вещественной коразмерности K. Другими словами M в каждой точке имеет CR-тип (n,K), при этом $N = n + K$. Пусть M_ξ - его росток в точке ξ. Пусть M_ξ является порождающим ростком CR-подмногообразия конечного типа

$$\begin{aligned} m = (m_1, \ldots, m_1, \ldots, m_2, \ldots, m_2, \ldots, m_l, \ldots, m_l) \\ = ((m_1, k_1), (m_2, k_2), \ldots, (m_l, k_l)), \end{aligned}$$

где m_j и k_j - натуральные числа, причем $2 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_l$. Как было сказано, основной результат работы [8] это эквивалентность геометрического и аналитического определений типа многообразия в точке.

Чтобы сформулировать аналитическое определение разобьем координаты объемлющего комплексного пространства $\mathbf{C}^{n+K}$ на группы

$$z \in \mathbf{C}^n,\ w_1 \in \mathbf{C}^{k_1}, \ldots, w_l \in \mathbf{C}^{k_l}, \quad k_1 + \ldots, +k_l = K$$

При этом переменным назначаются веса: $[z] = 1,\ [w_j] = m_j$. Те же веса получают и комплексно сопряженные переменные $\bar{z}$ и $\bar{w}_j$ и соответственно $u_j = \mathrm{Re}\, w_j,\ v_j = \mathrm{Im}\, w_j$. Это соглашение позволяет распространить градуировку на степенные ряды от этих переменных. А если дополнительно положить

$$[\frac{\partial}{\partial z}] = [\frac{\partial}{\partial \bar{z}}] = -1, \quad [\frac{\partial}{\partial w_j}] = [\frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}] = -m_j,$$

то и на векторные поля. Степенной ряд, не содержащий членов веса μ и ниже, обозначим через $o(\mu)$.

Пусть локальные уравнения ростка M_ξ записаны в виде

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, \ldots, u_{j-1}) + o(m_j), \quad j = 1, \ldots, l \tag{2}$$

где вещественная вектор-значная форма Φ_j (т.е. её координаты) имеют однородный вес m_j.

Касательная модельная поверхность ростка M_ξ - это вещественно алгебраическая поверхность Q, заданная соотношениями

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, \ldots, u_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, l \tag{3}$$

Условие конечности типа - это некоторое условие невырожденности. Чтобы получить условие конечности типа в терминах форм Φ нужно сделать дополнительные треугольно-полиномиальные преобразования координат, которые не меняя вида уравнений и весов форм Φ, меняют сами эти формы (приведение Q к стандартной форме, теорема 6.2 стр.230 [8]).

Каждая координата каждой вектор-значной формы Φ_j - это линейная комбинация мономов вида

$$z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}\, \bar{z}_1^{\gamma_1} \ldots \bar{z}_n^{\gamma_n}\, u_{11}^{\beta_{11}} \ldots, u_{1k_1}^{\beta_{1k_1}} \ldots, u_{(j-1)1}^{\beta_{(j-1)1}} \ldots u_{(j-1)k_{j-1}}^{\beta_{(j-1)k_{j-1}}}$$

Сформулируем два условия на формы Φ.

(I) координаты форм не содержат мономов вида

$$z_1{}^{\alpha_1} \ldots, z_n{}^{\alpha_n}\, u_{11}^{\beta_{11}} \ldots u_{1k_1}^{\beta_{1k_1}} \ldots u_{(j-1)1}^{\beta_{(j-1)1}} \ldots, u_{(j-1)k_{j-1}}^{\beta_{(j-1)k_{j-1}}}$$

и сопряженных к ним ни при каких α и β

Для формулировки второго условия нам портебуется общая нумерация всех координат всех векторзначных форм Φ. А именно, пусть $(\phi_1, \dots, \phi_{k_1})$ - это координатные формы Φ_1, далее $(\phi_{k_1+1}, \dots, \phi_{k_1+k_2})$ - координатные формы Φ_2 и так далее до координат Φ_l. Таким образом полный упорядоченный набор всех координатных форм это $(\phi_1, \dots, \phi_K)$.

(II) для любого $1 \leq J \leq K$ форма ϕ_J не содержат слагаемых вида

$$c\, \phi_j\, u_{11}^{\beta_{11}}, \dots, u_{1k_1}^{\beta_{1k_1}}, \dots, u_{(j-1)1}^{\beta_{(j-1)1}}, \dots, u_{(j-1)k_{j-1}}^{\beta_{(j-1)k_{j-1}}}$$

для всех j, таких что $j < J$ и c - ненулевая константа.

Говорим, что уравнение ростка M_ξ и поверхности Q записаны в *стандартной форме по Блуму-Грэму* если координатные формы удовлетворяют условиям (I) и (II). При этом говорим, что многообразие M в точке ξ и поверхность Q в нуле имеют *конечный тип* m *по Блуму-Грэму*, если ни одна из координатных форм ϕ_j не равна тождественному нулю.

Замечание 1: Условие (II) в отличие от условия (I) имеет рекуррентный характер.

Замечание 2: Нумерация весов $m_1, \dots, m_l$ и соответственно векторных координат $w_1, \dots, w_l$ имеет геометрическую интерпретацию (это номера элементов вложенной последовательности подпространств касательного пространства, где происходит рост размерности, см.[8]). В силу этого их нумерация инвариантна по отношению к локально биголоморфным или CR преобразованиям. В то время как выбор нумерации скалярных координат самой векторной координаты w_j - произволен и голоморфно не инвариантен.

Поэтому нам будет удобно изменить условие из ([8]), сделав его голоморфно инвариантным. А именно, будем предполагать, что условие (II) выполнено для пары индексов $j < J$ лишь в случае, если они относятся к *разным* весовым группам, т.е. являются скалярными координатами разных весовых векторных координат (имеют разные веса). Для индексов, соответствующих коодинатам одной векторной переменной группы w, это не требуется. За формулировкой Блума-Грэма мы оставляем термин *стандартная форма*, а для нашего условия термин *приведенная форма*. Само ослабленное условие (II) будем обозначать как условие (II')

При этом условие того, что росток поверхности, записаный уравнениями (2), в приведенной форме имеет заданный конечный тип m отличается от аналогичного условия для стандартной формы. Сформулируем оба условия.

Утверждение из [8] *(условие конечности типа для стандартной формы):*
(a) Росток поверхности, записаный уравнениями (2), в стандартной форме имеет заданный конечный тип m тогда и только тогда, когда среди скалярных координатных форм $(\phi_1, \ldots, \phi_K)$ нет тождественных нулей.
(b) Любой росток конечного типа может быть записан в таком виде.

Следующее утверждение - это непосредственное следствие этого утверждения.

Утверждение 3 *(условие конечности типа для приведенной формы):*
(a) Росток поверхности, записаный уравнениями (2), в приведенной форме имеет заданный конечный тип m тогда и только тогда когда координатные формы $(\phi_1, \ldots, \phi_K)$ - линейно независимы.
(b) Любой росток конечного типа может быть записан в таком виде.
Доказательство: При переходе от приведенной формы к стандартной форме преобразованные координатные весовые формы ϕ_j - это линейные комбинации прежних форм. Таким образом получение тождественного нуля возможно, только если у исходных форм имелась линейная зависимость.

Замечание 4: При этом ясно, что если среди форм нет тождественно нулевых, то линейная зависимость возможна только внутри форм одной весовой группы.

Параметры $l \geq 1,\ m_l \geq 2$ имеют две интерпретации. В аналитическом представлении l - это количество различных весов, m_l - максимальный вес в записи уравнений (2) в стандартной или приведенной форме. В геометрическом l - это число скачков размерностей в последовательности подпространств, начинающейя с комплексной касательной в ξ и заканчивающсйся полным касательным пространством, а m_l - глубина скобочной конструкции, необходимой для получения полной касательной. Число $\mu = m_l$ мы будем называть *старшим весом.* В случае бесконечного типа мы будем полагать $\mu = \infty$.

Пусть имеется локально обратимое голоморфное отображение

$$(z \to f(z,w),\ w_j \to g_j(z,w)),\ j = 1,...,l$$

ростка в начале координат M_0 конечного типа m, заданного уравнениями в стандартной форме

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, \dots, u_{j-1}) + F_j(z, \bar{z}, u), \quad j = 1, \dots, l \tag{4}$$

в другой такой же росток $\tilde{M}_0$

$$v_j = \tilde{\Phi}_j(z, \bar{z}, u_1, \dots, u_{j-1}) + \tilde{F}_j(z, \bar{z}, u), \quad j = 1, \dots, l \tag{5}$$

где F_j и $\tilde{F}_j$ - это $o(m_j)$. И пусть Q и $\tilde{Q}$ - их модельные поверхности, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, \dots, u_{j-1}) \quad j = 1, \dots, l \\ v_j = \tilde{\Phi}_j(z, \bar{z}, u_1, \dots, u_{j-1}), \quad j = 1, \dots, l \end{aligned} \tag{6}$$

соответственно.

В дальнейшем мы будем использовать разложения

$$f = \sum_1^\infty f_\mu,\ g_j = \sum_1^\infty g_{j\mu},\ F_j = \sum_{m_j+1}^\infty F_{j\mu},\ \tilde{F}_j = \sum_{m_j+1}^\infty \tilde{F}_{j\mu},$$

где $f_\mu,\ g_{j\mu},\ F_\mu,\ \tilde{F}_\mu$ - компоненты веса μ.

Записывая, что образ M_0 принадлежит $\tilde{M}_0$, получаем тождество

$$\operatorname{Im} g_j = \tilde{\Phi}_j(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g_1, \dots, \operatorname{Re} g_{j-1}) + \tilde{F}_j(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g), \quad j = 1, \dots, l,$$
$$\text{при } w = u + i(\Phi + F) \tag{7}$$

Рассмотрим младшие компоненты (7).

Начнем с группы переменных w_1. В весах от 1 до $(m_1 - 1)$ получаем $\operatorname{Im} g_{1\nu} = 0$, где $1 \le \nu \le m_1 - 1$. Учитывая, что однородная форма веса $\nu < m_1$ это голоморфная форма переменной z, заключаем, что $g_{11} = g_{12} = ... = g_{1(m_1-1)} = 0$.

В весе m_1 имеем $g_{1m_1} = a(z) + \rho\, w_1, \quad f_1 = C\, z$, где ρ и C - линейны, $a(z)$ - голоморфная однородная форма степени m_1, . Получаем

$$\operatorname{Im}\left(a(z) + \rho_1\,(u_1 + i\,\Phi_1)\right) = \tilde{\Phi}_1(C\,z, \overline{C\,z})$$

Отделяя в этом соотношении компоненту голоморфную по z и учитывая, что Φ_1 и $\tilde{\Phi}_1$ не содержат голоморфных слагаемых, получаем $a(z) = 0$. Из линейной компоненты по u_1 - получаем $\operatorname{Im}\rho_1\, u_1 = 0$. После чего получаем

$$\rho_1 \Phi_1(z, \bar{z}) = \tilde{\Phi}_1(C\,z, \overline{C\,z})$$

Отметим, что это соотношение равносильно тому, что отображение $(z \to C\,z, \quad w_1 \to \rho_1\, w_1)$ переводит "усеченную"поверхность $v_1 = \Phi_1(z, \bar{z})$ пространства $\mathbf{C}^{n+k_1}$ в другую "усеченную"поверхность $v_1 = \tilde{\Phi}_1(z, \bar{z})$.

Переходим к координате w_2. Компоненты $g_{2\nu}$, где $\nu < m_2$ это выражения вида $\sum \psi_{\alpha\beta}\,(z, w_1)$, где $\psi_{\alpha\beta}\,(z, w_1)$ - голоморфная полилинейная форма степени α по z и β по w_1, причем $\alpha + m_1\,\beta = \nu$. Компоненты тождества (7) весов $\nu < m_2$ дают

$$\operatorname{Im}\left(\sum \psi_{\alpha\beta}\,(z, u_1 + i\,\Phi_1)\right) = 0,$$

Откуда следует, что $g_{2\nu} = 0$ при $\nu < m_2$. Это можно было бы доказать непосредственно из полученного тождества. Воспользуемся, однако, другим способом. Действительно, $g_{2\nu}$ - это голоморфная функция на "усеченном" порождающем многообразии $Q_1 = \{(z, w_1) : v_1 = \Phi_1(z, \bar{z})\}$, чья мнимая часть равна нулю. Поэтому $g_{2\nu}$ - постоянна, а т.к. её вес больше нуля, то это ноль.

В весе m_2 имеем $g_{2m_2} = \sum \psi_{\alpha\beta}\,(z, w_1) + \rho_2\, w_2$, где $\alpha + m_1\,\beta = m_2$, причем

$$\operatorname{Im}\left(\sum \psi_{\alpha\beta}\,(z, u_1 + i\,\Phi_1\right) = \tilde{\Phi}_2(C\,z, \overline{C\,z}, \rho_1\, u_1) - \rho_2(u_2 + i\,\Phi_2(z, \bar{z}, u_1)))$$

В силу условия (I) его правая часть не содержит слагаемых, голоморфных по z. Полагая $\bar{z} = 0$, получаем, что если $\alpha \neq 0$, то $\psi_{\alpha\beta}\,(z, u_1) = 0$, а $\psi_{0\beta}\,(u_1)$ - вещественная форма веса m_2, которую мы переобозначим через $\theta_2(w_1)$, т.е. $g_{2m_2} = \rho_2 w_2 + \theta_2(w_1)$. Соотношение приобретает вид

$$\operatorname{Im}\theta_2(u_1 + i\,\Phi_1) = \tilde{\Phi}_2(C\,z, \overline{C\,z}, \rho_1\, u_1) - \rho_2(u_2 + i\,\Phi_2(z, \bar{z}, u_1)))$$

Отметим, что это соотношение равносильно тому, что отображение

$$(z \to C\,z, \quad w_1 \to \rho_1\, w_1, \quad w_2 \to \rho_2\, w_2 + \theta_2(w_1))$$

переводит "усеченную"поверхность $v_1 = \Phi_1(z, \bar{z})$, $v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}, u_1)$ пространства $\mathbf{C}^{n+k_1+k_2}$ в другую "усеченную"поверхность $v_1 = \tilde{\Phi}_1(z, \bar{z})$, $v_2 = \tilde{\Phi}_2(z, \bar{z}, u_1)$.

И так далее до последней весовой группы, соответствующей w_l. Сформулируем полученный результат.

Теорема 5: Пусть $(z \to f(z,w),\ w_j \to g_j(z,w)),\ j = 1, ..., l$ обратимое голоморфное отображение ростка (4), записанного в приведенной форме на другой такой росток (5). Тогда
(a) Это отображение имеет вид

$$(z \to C\,z + o(1),\ w_j \to \rho_j\,w_j + \theta_j(w_1, ..., w_{j-1}) + o(m_j),\ j = 1, ..., l),$$
$$\text{где } C \in GL(n, \mathbf{C}),\ \rho_j \in GL(k_j, \mathbf{R})$$

и где $\theta_j(w_1, ..., w_{j-1})$ - однородная вещественная форма веса m_j причем для всех $j = 1, ..., l$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\theta_j(u_1 + i\,\Phi_1(z,\bar{z}), ..., u_{j-1} + i\,\Phi_{j-1}(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-2}))) = \\ \tilde{\Phi}_j(C\,z, \overline{C\,z}, \rho_1\,u_1, ..., \rho_{j-1}\,u_{j-1}) - \rho_j\,\Phi_j(z, \bar{z},\ u_1, ..., u_{j-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

(b) При этом треугольное взвешенно однородное отображение

$$(z \to C\,z,\ w_j \to \rho_j\,w_j + \theta_j(w_1, ..., w_{j-1}),\ j = 1, ..., l) \tag{9}$$

переводит модельную поверхность Q в модельную поверхность $\tilde{Q}$.
(c) Для каждого $j = 1, ..., l-1$ усеченное отображение

$$(z \to C\,z,\ w_\nu \to \rho_\nu\,w_\nu + \theta_\nu(w_1, ..., w_{\nu-1}),\ \nu = 1, ..., j)$$

переводит усченную модельную поверхность $Q(j) = \{v_\nu = \Phi_\nu,\ \nu = 1, ..., j\}$ пространства $\mathbf{C}^{n+k_1+...+k_j}$ в другую усеченную модельную поверхность. $\tilde{Q}(j) = \{v_\nu = \tilde{\Phi}_\nu,\ \nu = 1, ..., j\}$.
(d) Действие голоморфных отображений на ростки многообразий данного типа порождает действие в пространстве взвешенно однородных форм $\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_l)$ группы взвешенно однородных треугольно полиномиальных преобразований вида

$$\Phi_j(z, \bar{z},\ u_1, ..., u_{j-1}) \to \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \rho_j\,\Phi_j(C^{-1}\,z, \overline{C^{-1}\,z}, \rho_1^{-1}\,u_1,\ \rho_2^{-1}\,(u_2 - \operatorname{Re}\theta_2(u_1 + i\,\Phi_1)), ..., \\ \rho_{j-1}^{-1}\,(u_{j-1} - \operatorname{Re}\theta_{j-1}((u_1 + i\,\Phi_1), ..., (u_{j-2} + i\,\Phi_{j-2})))) \end{aligned}$$

(e) Стабилизатор нуля в группе автоморфизмов модельной поверхности $\mathrm{Aut}_0\, Q_0$ содержит 1-параметрическую подгруппу

$$(z \to t\, z,\ w_j \to t^{m_j}\, w_j), \quad t \in \mathbf{R}^* \tag{11}$$

Этой подгруппе соответствует векторное поле веса ноль

$$X_0 = 2\,\mathrm{Re}\,(z\,\frac{\partial}{\partial\, z} + \sum m_j\, w_j\, \frac{\partial}{\partial\, w_j}), \tag{12}$$

(f) Если модельная поверхность Q имеет в нуле конечный тип, то элемент стабилизатора этого действия, т.е. отображение (17) однозначно определяется своей z-координатой, т.е. параметром $C \in GL(n, \mathbf{C})$.
Доказательство: В пункте (a) осталось проверить обратимость линейных отображений. Это следует из того, что, как показано выше, дифференциал нашего голоморфного отображения в нуле имеет блочно-треугольный вид и обратимость дифференциала требует обратимости каждого диагонального блока, т.е. отображений $(C, \rho_1, ..., \rho_l)$. Пункт (b) доказан выше, пункт (c) следует непосредственно из (b), (d) следует из (c). Пункт (e) - очевиден. Докажем пункт (f), полагая при этом $\tilde{\Phi} = \Phi$. Имеем для определения (ρ_j, θ_j)

$$\mathrm{Im}\,(\rho_j\, w_j + \theta_j(w_1, ..., w_{j-1})) = \Phi_j(C\, z, \overline{C\, z}, \rho_1\, u_1, ..., \rho_{j-1}\, u_{j-1}).$$

где $w_j = u_j + i\,\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1})$ для $j = 1, ..., l$. При фиксированном C эти соотношения позволяют последовательно однозначно оределять (ρ_j, θ_j) для j от 1 до l. Действительно, пусть уже однозначно определены (ρ_ν, θ_ν) при $\nu = 1, ..., j-1$, имеются две пары (ρ_j, θ_j) и $(\rho_j + \delta\rho_j, \theta_j + \delta\theta_j)$, то

$$\mathrm{Im}\,(\delta\rho_j\, w_j + \delta\theta_j(w_1, ..., w_{j-1})) = 0, \text{ где}$$
$$w_\nu = u_\nu + i\,\Phi_\nu(z, \bar{z}, u_1, ..., u_\nu), \quad \nu = 1, ..., j$$

Поскольку усеченная поверхность

$$Q_j = \{v_\nu = \Phi_\nu(z, \bar{z}, u_1, ..., u_\nu),\ \nu = 1, ..., j\}$$

имеет конечный тип, то $(\delta\rho_j, \delta\theta_j) = const$ и эта постоянная, в силу положительности веса, равна нулю. Теорема доказана.

В случае, если отображения (17), описанные в пункте (c), отображают модельную поверхность Q на себя, то соответствующую подгруппу $\mathrm{Aut}_0\, Q_0$, состоящую из таких отображений, обозначим через G_0.

Замечание 6: (a) Как было показано в [7], в случае, если модельная поверхность жесткая (Φ не зависят от u), нелинейные слагаемые θ_j - отсутствуют.
(b) Для появления ненулевого нелинейного слагаемого θ_j необходимо наличие некоторого целочисленного условия, «резонанса», а именно, существования представления вида

$$m_j = \mu_1\, m_1 + ... + \mu_{j-1}\, m_{j-1}$$

с целыми неотрицательными коэффициентами μ_ν. В отсутствии резонансов подгруппа G_0 состоит только из линейных преобразований.
(c) В общем случае будем называть преобразования из G_0 *кавзилинейными.*

3. Модельная поверхность Q

Как было отмечено выше, наша градуировка продолжается и на ростки векторных полей. В результате алгебра Ли всех вещественных полей, аналитических в окрестности нуля, распадается в прямую сумму своих однородных компонент весов от $(-m_l)$ и выше. И соответственно, любая её подалгебра Ли наследует эту градуировку. В частности, $\mathrm{aut}\ Q = \sum_{-m_l}^{\infty} g_\nu$. Наличие в группе автоморфизмов любой модельной поверхности Q градуирующей подгруппы (11) имеет очевидное, но важное следствие

Утверждение 7: (a) Пусть векторное поле $X = \sum_{-\mu}^{\infty} X_\nu \in \mathrm{aut}\ Q$, тогда $X_\nu \in \mathrm{aut}\ Q$ для всех ν.
(b) Алгебра $\mathrm{aut}\ Q$ - конечномерна тогда и только тогда, когда она конечноградуирована, т.е. $\mathrm{aut}\ Q = \sum_{-\mu}^{\delta} g_\nu$. При этом она состоит из полей с полиномиальными коэффициентами.

Здесь через $\delta = \delta(Q)$ (*старший положительный вес*) мы обозначили максимальное ν, т.ч. $g_\nu \neq 0$.

Мы предполагаем, что уравнения Q записаны в приведенной форме и линейно независимы. Это означает, что модельная поверхность Q в начале координат имеет конечный тип и, следовательно, минимальна. В таком случае критерием конечномерности алгебры Ли $\mathrm{aut}Q_0$ является условие голоморфной невырожденности ([10]). В общем случае условие голоморфной невырожденности не имеет конструктивного характера. Это условие несуществования некоторого векторного поля. Но поскольку Q является графиком вещественно полиномиального отображения, то проверка этого условия сводится к проверке максимальности ранга некоторой матрицы. В конкретной ситуации эти условия можно явно выписать (см. [12],[7]).

Определение 8: Если модельная поверхность Q имеет в начале координат конечный тип и голоморфно невырождена, то мы будем говорить, что она в начале координат *невырождена.* При этом говорим что CR-многообразие M *невырождено в точке* $\xi \in M$, если модельная поверхность Q ростка M_ξ в точке ξ - невырождена в начале координат.

Для ростка многообразия M_ξ условие невырожденности в точке является достаточным условием конечномерности $\mathrm{aut}\, M_\xi$, но оно, конечно, не является необходимым.

Утверждение 9: Для модельной поверхности Q условие невырожденности - критерий конечномерности (конечно градуированности) $\mathrm{aut}\, Q_0$.
Доказательство: Нетрудно видеть, что, нарушение любого из двух требований определения 8 ведет к бесконечномерности $\mathrm{aut}\, Q$.

Поверхность Q - это график вещественно полиномиального уравнения вида (6), поэтому Q в каждой своей точке - это порождающее вещественно алгебраическое подмногообразие $\mathbf{C}^N$ коразмерности K без особенностей. Размерность комплексной касательной, т.е. CR-размерность, всюду одинакова и равна $n = N - K$. Набор K градиентов определяющих уравнений во всех точках пространства имеет максимальный комплексный ранг K. Однако тип может зависеть от точки Q. В связи с этим введем в рассмотрение следующие подмножества Q.

Q^m - совокупность точек $\xi \in Q$, таких что Q в ξ является многообразием конечного типа, чей тип по Блуму-Грэму равен

$$m = (m_1, \dots, m_1, \dots, m_2, \dots, m_2, \dots, m_l, \dots, m_l)$$

$$= ((m_1, k_1), (m_2, k_2), \ldots, (m_l, k_l)),$$

отметим, что при этом коразмерность $K = \sum k_j$.

Q^μ - совокупность точек $\xi \in Q$, таких что Q в ξ имеет старший вес равный μ, где $2 \leq \mu < \infty$.

Все рассмотренные характеристики голоморфно инвариантны, поэтому они постоянны на каждой орбите действия группы голоморфных автоморфизмов Q. Как было показано в [4] все вполне невырожденные модельные поверхности являются голоморфно однородными, т.е. группа голоморфных автоморфизмов действует на них транзитивно. Поэтому, в случае полной невырожденности $Q = Q^m$, где m - это тип Q в начале координат. Если же полной невырожденности нет, то свойство голоморфной однородности может утрачиваться и картина становится более разнообразной.

Для формулировки следующего результата нам понадобится новое определение. Подмножество пространства $\mathbf{R}^N$ с координатой x будем называть *полуалгебраическим*, если оно задано условием вида

$$p_\alpha(x) = 0,\ \alpha \in A, \quad q_\beta(x) \neq 0,\ \beta \in B,$$

где A и B - конечные наборы индексов. Обычно этот термин используется для более широкого класса множеств (используются отношения больше-меньше). Мы пользуемся этим термином по причине отсутствия более подходящего.

Теорема 10: Пусть Q - невырожденная модельная поверхность.
(a) Если $\mu(0)$ - это старший вес Q в начале координат, тогда $\mu(\xi) \leq \mu(0)$ для всех ξ, т.е. $\mu(0)$ - это максимальное значение старшей степени и, соответственно,

$$Q = \bigcup_{\nu=2}^{\mu(0)} Q^\nu.$$

В частности, на Q нет точек бесконечного типа.
(b) Q^ν, Q^m - это вещественные полуалгебраические подмножества Q.
(c) Как $\mu(\xi)$, так и $m(\xi)$ принимают на Q лишь конечный набор значений.
(d) Пусть μ_{min} - минимальное значение старшего веса по всем точкам Q, пусть $Q^{\mu_{min}}$ - это точки с таким старшим весом. Тогда $Q^{\mu_{min}}$ - открытое

подмножество Q.
Доказательство: Процедура определения типа по Блуму-Грэму для Q состоит из весового переразложения правых частей уравнений в новой точке и приведения полученных соотношений к стандартной форме (или к приведенной форме). Обе эти процедуры не повышают весов правых частей уравнений. С точки зрения геометрического определения типа то, что вес каждой переменной не повысился можно пояснить так. При переразложении правых частей уравнений в новой точке ξ старшая весовая компонента (по отношению к старому весу) в новой точке осталась без изменения. Пусть все усеченные модельные поверхности Q^ν при $\nu < j$ имеют конечный тип. Используя базис векторных полей, порождающих распределение комплексных касательных D^1 мы видим, что условие конечности типа Q^j в точке ξ осталось прежним. т.е. вес переменной может упасть, но не может возрасти. Это доказывает (a).
В силу (a) для проверки принадлежности точки фиксированному конечному типу достаточно проверять лишь конечное число условий линейной зависимости и независимости полей с полиномиальными коэффициентами. Далее, множество точек фиксированного старшего веса есть конечное объединение множеств фиксированных типов, т.е. конечное объединение полуалгебраических множеств. Это доказывает (b).
Из неравества $\mu(\xi) \leq \mu(0)$ следует конечность значений $\mu(\xi)$, а для ограниченного старшего веса имеется лишь конечное значение типов $m(\xi)$. Это доказывает (c).
Старший вес - это количество вложенных операций взятия скобки для бызисных полей из комплексной касательной достаточный для получения полной касательной. Это условие можно записать как условие полноты ранга для скобок данной глубины. Это условие выполненное в точке выполняется и в окрестности. В силу минимальности уменьшится эта глубина не может. Это доказывает (d). Теорема доказана.

Отметим, также, что минимальная степень уравнений Q, т.е. $m_1(\xi)$ на открытом плотном множестве, очевидно, равна 2.

С каждой точкой ξ модельной поверхности Q связаны такие характеристики как тип в точке $m(\xi)$ и старший вес в точке $\mu(\xi)$. Тот тип, который мы исходно связываем с Q и который присутствует в уравнениях Q - это ее тип в начале координат $m(0)$. И если поверхность не является однородной, то тип не постоянен.

Продемонстрировать, что тип точек модельной поверхности не обязан быть постоянным - нетрудно. Пусть гиперповерхность в $\mathbf{C}^2$ задана уравнением $v = \mathrm{Re}(z^2\,\bar{z})$. Она является модельной поверхностью и её тип равен $m(0) = (3)$. Если ту же гиперповерхность рассмотреть в точке $\xi = (a, b)$, то ее можно записать в виде $v = \mathrm{Re}(a)\,|z|^2 + \mathrm{Re}(z^2\,\bar{z})$. Т.е. её тип $m(\xi) = (2)$, если $\mathrm{Re}(a) \neq 0$ и $m(\xi) = (3)$, если $\mathrm{Re}(a) = 0$. Аналогично старшая степень $\mu(\xi) = 2$ всюду кроме двумерной плоскости $\mathrm{Re}(a) = 0$ и 3 на этой плоскости.

Одно из основных свойств модельной поверхности это то, что локальная группа её голоморфных автоморфизмов параметризует семейство голомофных отображений между ростками одинакового типа. В частности, модельная поверхность является самой голоморфно симметричной поверхностью, т.к. мажорирует по размерности стабилизатор в группе любого невырожденного ростка.

Из теоремы 5 получаем следствие

Следствие 11: Любое голоморфное отображение χ ростка (4), записанного в приведенной форме на другой такой росток (5) можно представить в виде композиции $\chi = \psi \circ \varphi$, где

$$\varphi = (z \to z + o(1), \quad w_j \to w_j + o(m_j)) \tag{13}$$

а $\psi \in G_0$, т.е. элемент группы квазилинейных автоморфизмов $\tilde{Q}$, сохраняющий неподвижным начало координат.

Пусть имеестся отображение (4) на (5)

$$(z \to z + f_2 + ... \quad w_j \to w_j + g_{m_j(m_j+1)} ...)$$

Запишем для него соотношение (7) и выделим в нем компоненты следующих весов. В координатах группы w_1 выделим компоненту веса $m_1 + \mu$, в координатах w_2 - компоненту веса $m_2 + \mu$ и т.д.Получаем

$$\begin{gathered} -\mathrm{Im}\, g_{j(m_j+\mu)} + \\ d\,\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1})(f_{1+\mu}, \overline{f_{1+\mu}}, \mathrm{Re}\, g_{1(m_1+\mu)}, ..., \mathrm{Re}\, g_{(j-1)(m_{j-1}+\mu)}) + ... = 0, \\ 1 \leq j \leq l, \text{причем аргументы в } f \text{ и } g \text{ это } w_\nu = (u_\nu + i\,\Phi_\nu). \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь многоточием обозначены члены соотношения, зависящие от наборов $h_\nu = (f_{1+\nu}, g_{m_1(m_1+\nu)}, ..., g_{m_{j-1}(m_{j-1}+\nu)})$ при $\nu < \mu$. Полученное соотношение (гомологическое уравнение) можно использовать для вычисления набора h_μ, если известны все наборы с меньшими номерами. Для этого нужно решить относительно h_μ неоднородное линейное алгебраическое уравнение (14), где выражение, обозначенное многоточием, определяется на основани известных значений h_ν при $\nu < \mu$. Поскольку размерность семейства решений неоднородного линейного уравнения не превосходит размерности пространства решений соответствующего однородного уравнения мы получаем, что размерность семейства отображений (4) в (5) не превосходит размерности решений однородного уравнения

$$\begin{aligned} &-\operatorname{Im} g_j + d\,\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1})(f, \overline{f}, \operatorname{Re} g_1, ..., \operatorname{Re} g_{j-1}) = 0, \\ &1 \le j \le l, \text{причем аргументы в } f \text{ и } g \text{ это } w_\nu = u_\nu + i\,\Phi_\nu. \end{aligned} \tag{15}$$

Это уравнение получено сложением однородных частей соотношений (14) по всем μ. Теперь заметим, что уравнение (15) совпадает с условием, что векторное поле вида (1) является элементом $\operatorname{aut} Q$. Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 12: (a) Размерность семейства отображений (4) на (5), сохраняющих начало координат, не превосходит размерности $\operatorname{aut}_0\, Q_0$, в частности

$$\dim \operatorname{aut}_\xi M_\xi \le \dim \operatorname{aut}_0 Q_0$$

(b) Пусть Q - невырождена и $\delta = \delta(Q)$ - номер старшей по весу ненулевой компоненты алгебры aut Q_0. Тогда если имеются два отображения (4) на (5), сохраняющих начало координат, у которых совпадают весовые δ-струи в начале координат, то эти отображения совпадают. В частности, автоморфизм M_ξ с тождественной δ-струей есть тождественное отображение.

Данное рассуждение восходит к работе Пуанкаре [1] и представляет собой версию теоремы о неявном отображении в классе формальных степенных рядов. Общая схема теоремы о неявном отображении такова: коль скоро линейная часть некоторого соотношения однозначно разрешима относительно группы переменных, то то же самое можно сказать и об исходном нелинейном соотношении. В данной ситуации линейная часть соотношения это соотношение

$$\mathcal{L}(f,g)=\partial_z\Phi(z,\bar{z},u)(f)+\partial_{\bar{z}}\Phi(z,\bar{z},u)(\bar{f})+\partial_u\Phi(z,\bar{z},u)(Re\, g)-Im\, g,$$
$$\text{где } w_j=u_j+i\,\Phi_j,$$

которое, в свою очередь, есть в точности условие того, что поле (f,g) касательно к модельной поверхности Q.

Замечание 13: Описанная выше рекуррентная схема вычисления компонент отображения с опорой на оператор $\mathcal{L}$ может быть далее усовершенствована и превращена в рекуррентный процесс вычисления компонент отображения совместно с приведением уравнений ростка к нормальной форме. Это было сделано в работах [1], [2] для невырожденных гиперповерхностей. Там же была доказана сходимость построенной нормальной формы. Причем доказательство сходимости, даже в этой простейшей ситуации потребовало немалых усилий. Для произвольных многообразий конечного типа не трудно описать соответствующую оператору $\mathcal{L}$ формальную нормальную форму. Процедура ее построения сводится к построению, в подходящем пространстве формальных рядов, прямого дополнения к образу опрератора $\mathcal{L}$. Но рассчитывать, при этом, на сходящуюся, пригодную для всех ситуаций, нормальную форму в общем случае не приходится.

Зафиксируем некоторую положительную CR-размерность равную n. Имеются типы, для которых все невырожденные модельные поверхности данного типа эквивалентны и группы автоморфизмов у них - изоморфны. Т.е. по существу модельная поверхность одна. Но это исключение. В общем случае пространство невырожденных весовых форм $\Omega=\{(\Phi_1,...,\Phi_l)\}$ распадается на множество орбит действия пункта (d) теоремы 5, причем, как правило, семейство орбит зависит от непрерывных параметров (континуально). В связи с этим, а также в связи с теоремой 12, сформулируем вопрос. Верно ли, что при фиксированных CR-размерности и Блум-Грэм-типе существует равномерная, т.е. не зависящая от выбора невырожденной модельной поверхности оценка размерности группы? Для некоторых типов такие равномерные, причем точные оценки написаны.

Предложим здесь рассуждение, показывающее, что такая оценка имеется и в общем случае. Зафиксируем CR-размерность n и некоторый фиксированный тип - m. Обозначим через $D(n,m)$ максимум размерностей групп автоморфизмов по всем невырожденным модельным поверхностям CR-размерности n и Блум-Грэм-типа m, а через $Ds(n,m)$ максимум размерностей стабилизаторов начала координат при этих n и m. Обозначим через $D(n,\mu)$ максимум размерностей групп автоморфизмов по всем невырожденным модельным поверхностям старшего веса $\mu = m_l$ и CR-размерности n, а через $Ds(n,\mu)$, аналогично, максимум размерностей стабилизаторов начала координат при этих n и μ. Обозначим через $D(n,K)$ максимум размерностей групп автоморфизмов по всем невырожденным модельным поверхностям CR-размерности n и коразмерности K, а через $Ds(n,K)$ максимум размерностей стабилизаторов начала координат при этих n и K.

Теорема 14: $Ds(n,m) \leq D(n,m) < \infty, \quad Ds(n,\mu) \leq D(n,\mu) < \infty, \;\; Ds(n,K) \leq D(n,K) < \infty.$

Доказательство: Докажем первое неравенство. Пусть Q - произвольная невырожденная модельная поверхность при фиксированных n и m, а $\operatorname{aut} Q_\xi$ - алгебра Ли в точке ξ. Чтобы оценить размерность алгебры в нуле достаточно оценить эту размерность для близкой к нулю точке вне собственного аналитического подмножества (в точке общего положения). Поверхность Q - голоморфно невырождена и всюду имеет конечный тип. Поэтому мы можем выбрать близкую к нулю точку ξ, в которой к Q применимо следствие 12.3.3. из [10], в соответствии с которым локальный автоморфизм Q однозначно определяется своей струей в точке ξ порядка $(K+1)\,n$, где K - коразмерность, соответствующая типу, т.е. сумма кратностей для данного типа. При этом размерность объемлющего пространства равна $n+K$. Это дает равномерную оценку размерности струи. Для доказательства второго неравенства заметим, что для фиксированных значений n и μ существует лишь конечное число типов возможных типов m. Докажем (c). Пусть Q модельная поверхность. Рассмотрим последовательность распределений D_ν, порожденное комплексными касательными с помощью операции взятия скобки. Если имеется полная окрестность точки Q, где размерность, не достигнув полной, не возросла в каждой точке хотя бы на единицу, то это значит, что эта поверхность в каждой точке этой окрестности имеет бесконечный тип, а это противоречит теореме 10. Таким образом, в точке общего положения глубина последовательных операций взятия скобки, а это и есть старшая степень μ в этой точке, не превосходит $K+1$. Теперь третье неравенство следует из второго. Оценки для стабилизаторов - очевидны. Теорема доказана.

Оценки на размерность, которые возникают в этом рассуждении, очевидно далеки от точных.

Голоморфная невырожденность вещественно аналитического многообразия - это глобальная характеристика. Голоморфная вырожденность в одной точке означает голоморфную вырожденность во всех остальных. Так же с голоморфной невырожденностью. Но конечность типа многообразия в точке - это характеристика, которая даже для вещественно аналитического многообразия может меняться. Простой пример - гиперповерхность в $\mathbf{C}^2$, заданная уравнением $v = u\,|z|^2$. Однако, как доказано в теореме 10, для модельной поверхности это невозможно. Из теорем 10 и 12 получаем следствие.

Следствие 15: Если модельная поверхность Q невырождена (определение 8) в начале координат, то то она невырождена в каждой точке. При этом $\dim \mathrm{aut} Q_\xi < \infty$ для всех ξ.

Отметим еще одно обстоятельство. В соответствии с определением 8 условие невырожденности многообразия в точке это условие невырожденности его модельной поверхности в данной точке. В свою очередь, условие невырожденности модельной поверхности состоит из двух требований. Из условия конечности типа и голоморфной невырожденности. Условие конечности типа для ростка и то же условие для его модельной поверхности - это одно и то же условие (см. [8]). А как связаны условия голоморфной невырожденности для многообразия и для модельной поверхности? Из теоремы 12 сразу получаем

Следствие 16: Пусть имеется росток M_ξ и его модельная поверхность Q_0. Если Q_0 - невырождена, то M_ξ - голоморфно невырождена.

Т.е. из невырожденности модельной поверхности следует выполнение обоих условий и для ростка. При этом простой пример гиперповерхности в $\mathbf{C}^3$ вида $\{v = |z_1|^2 + |z_2|^4\}$ показывает, что из голоморфной невырожденности многообразия голоморфная невырожденность модельной поверхности, конечно, не следует.

В [7] было показано, что для жестких модельных поверхностей, т.е. для поверхностей заданных уравнениями $v_j = \Phi_j(z, \bar{z}),\ j = 1, ..., l$ необходимое условие голоморфной однородности, условие постоянства типа по Блуму-Грэму, является достаточным. Этот же критерий остается в силе и для произвольной модельной поверхности конечного типа.

Пусть модельная поверхность Q задана уравнениями

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}), \quad j = 1, ..., l,$$

где Φ_j - форма веса m_j в модифицированной стандартной форме, где координатные формы линейно независимы, т.е. Q в начале координат имеет конечный тип m. Пусть $\xi = (a\ , b_1 + i\,\Phi_1(a, \bar{a}), \ldots, b_j + i\,\Phi_l(a, \bar{a}, b_1, \ldots, b_{l-1}))$ некоторая точка Q.

Теорема 17:
(a) Для модельной поверхности конечного типа Q голоморфный автоморфизм, переводящий начало координат в точку $\xi \in Q$ существует в том и только том случае, если Q в ξ имеет тот же тип по Блуму-Грэму, что и в начале координат. В частности, это означает, что условие постоянства типа является для модельной поверхности Q критерием голоморфной однородности.
(b) Если типы в начале координат и в ξ совпадают, то перевести начало координат в ξ можно не меняя весов координат пространства треугольно-полиномиальным отображением S_ξ вида

$$z \to z + a, \quad w_j \to w_j + P_j(z, w_1, ..., w_{j-1}; \xi), \quad j = 1, ..., j,$$

где P_j - голоморфный полином от $(z, w_1, ..., w_{j-1})$ веса строго меньшего m_j, причем этот «сдвиг» S_ξ в точку ξ определен однозначно.
Доказательство: Рассмотрим преобразование $(z \to z + a,\ u_j \to u_j + b_j)$, которое переносит начало координат в точку $(a, b_1, ...b_l)$. Для каждой векторзначной формы Φ_j можно записать

$$\Phi_j(z + a, \bar{z} + \bar{a}, u_1 + b_1, ..., u_{j-1} + b_{j-1}) =$$
$$\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}) + \Delta\Phi_j\,(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1},\ a, \bar{a}, b_1, ..., b_{j-1}),$$

где для каждого фиксированного $(a, b_1, ...b_{j-1})$ разложение $\Delta\Phi_j$ в сумму весовых компонент содержит лишь компоненты весов, строго меньших m_j. В новых координатах уравнение Q не имеют ни стандартной формы, ни приведенной формы. Правые части уравнений перестают быть взвешенно однородными.

Процедура приведения к стандартной форме, описанная в [8], является пошаговой процедурой, занумерованной номерами координат группы w. Т.е. если этот процесс остановить до его окончательного завершения, то веса уже назначенные обработанным переменным в дальнейшем не меняются, как и вид полученных координат Φ в стандартной форме. Рассмотрим первую группу уравнений соответствующую координате w_1. Переменная z, независимо от дальнейшего, имеет вес 1. Соответственно не изменился вес (здесь равный степени) формы Φ_1 равный m_1. Все возможности для удаления появившихся слагаемых весов, меньших m_1, реализуются полиномиально-треугольными преобразованиями, использующие голоморфность мономов вида z^α. Таким образом убираются все плюригармонические члены. Если в какой-либо координате группы w_1 после этого осталось слагаемое веса меньшего m_1 - это означает изменение типа. А именно, появление нового веса, меньше минимального веса m_1. Таким образом, из условия сохранения типа следует, что после треугольного преобразования вида $(z \to z,\ w_1 \to w_1 + P_1(z; a, \bar{a}))$ первая группа уравнений возвращается к прежнему виду, а именно $v_1 = \Phi_1(z, \bar{z})$. При этом полином P_1 определен однозначно.

Далее, пусть мы осуществили приведение в точке ξ к стандартной форме всех уравнений групп $(w_1, w_2, ..., w_{j-1})$. Веса всех этих переменных остались теми же и соответствующие координатные формы не поменялись. При этом веса всех слагаемых, стоящих в правой части уравнения j-й группы определены. В частности, старшее слагаемое имеет вид $\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ...u_{j-1})$ и вес равный m_j. Все возможности для осуществления следующего шага основаны на голоморфности мономов вида $z^\alpha\ w_1^{\beta_1}...w_{j-1}^{\beta_{j-1}}$ весов, меньших m_j и они реализуются полиномиально-треугольными преобразованиями вида $w_j \to w_j + P(z, w_1, ...w_{j-1})$ (z и все младшие w - на месте), причем вес полинома P строго меньше m_j и полином определен однозначно. Если при этом исчезнут не все слагаемые меньшего веса, то это означает уменьшение кратности веса m_j и увеличение кратности одного из меньших весов. Таким образом из условия сохранения типа следует, что уравнение j-й группы вернется к старому виду

$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ...u_{j-1})$ и переменные группы w_j сохраняют старый вес m_j. Завершая этот процесс мы получаем доказательство теоремы.

При доказательстве теоремы 17 мы использовали процесс построения стандартной или приведенной форм уравнения поверхности. Имеет смысл еще раз вернуться к этому процессу и дать его более алгебраическое и алгоритмическое описание.

Исходно мы имеем уравнения ростка многообразия в начале координат вида $v = F(z, \bar{z}, u)$, где F - вещественный векторзначный степенной ряд без свободного и линейных членов. Пространство всех вещественных скалярных рядов от $(z, \bar{z}, u)$ через $\mathcal{F}$. Комплексная касательная в начале координат - это плоскость переменного z, т.е. $\{w = 0\}$. Присваиваем переменной z вес 1, всем остальным - ∞. Впоследствии веса переменных группы w будут получать новые конечные значения.

Первый шаг. Пусть $m_1 \geq 2$ - это младшая ненулевая степень, присутствующая среди координат F, пусть $\mathcal{F}_1$ - это конечномерное линейное подпространство в $\mathcal{F}$, порожденное компонентами координат F веса m_1. Пусть $\mathcal{H}_1 =< z^\alpha >$ - это подпространство в $\mathcal{F}_1$, порожденное вещественными и мнимыми частями голоморфных мономов от z (пространство плюригармонических многочленов веса m_1), а пространство $\mathcal{S}_1$ - подпространство многочленов в стандартной форме. Тогда пространство $\mathcal{F}_1$ распадается в прямую сумму $\mathcal{H}_1 + \mathcal{S}_1$. Пусть $k_1 = \dim \mathcal{S}_1$ и $\Phi_1 = (\Phi_1^1, ..., \Phi_1^{k_1})$ - какой-либо базис этого пространства. Теперь уравнения ростка после треугольно-полиномиального преобразования можно записать в виде

$$v_1 = \Phi_1(z, \bar{z}) + o(m_1), \quad \tilde{v_1} = \tilde{\Phi}_1(z, \bar{z}, u_1, \tilde{u}_1)$$

где $w_1 = (w_1^1, ..., w_1^{k_1})$ - часть переменных группы w, которые соответствуют координатам Φ_1, переменные $\tilde{w}_1$ - это оставшиеся переменные группы w, а $\tilde{\Phi}_1$ - это соответствующии им правые части уравнения. Теперь переменная $w_1 \in \mathbf{C}^{k_1}$ получает вес m_1 и мы переходим ко второму шагу.

Второй шаг. Пусть $m_2 > m_1$ - это младшая ненулевая степень, присутствующая среди координат $\tilde{\Phi}_1$, пусть $\mathcal{F}_2$ - это конечномерное линейное подпространство в $\mathcal{F}$, порожденное компонентами координат $\tilde{\Phi}_1$ веса m_2. Пусть $\mathcal{H}_2 =< z^\alpha\,(u_1 + i\,\Phi_1(z, \bar{z}))^{\beta_1} >$ - это подпространство в $\mathcal{F}_2$, порожденное вещественными и мнимыми частями голоморфных мономов от (z, w_1) (пространство плюригармонических многочленов веса

m_2), а пространство $\mathcal{S}_2$ - подпространство многочленов в стандартной форме. Тогда пространство $\mathcal{F}_2$ распадается в прямую сумму $\mathcal{H}_2 + \mathcal{S}_2$. Пусть $k_2 = \dim \mathcal{S}_1$ и $\Phi_2 = (\Phi_2^1, ..., \Phi_2^{k_2})$ - какой-либо базис этого пространства. Теперь уравнения ростка после треугольно-полиномиального преобразования можно записать в виде

$$v_1 = \Phi_1(z, \bar{z}) + o(m_1),\ v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + o(m_1), \quad \tilde{v_2} = \tilde{\Phi}_2(z, \bar{z}, u_1, u_2, \tilde{u}_2)$$

где $w_2 = (w_2^1, ..., w_2^{k_2})$ - часть переменных группы $\tilde{w}$, которые соответствуют координатам Φ_2, переменные $\tilde{w}_2$ - это оставшиеся переменные группы w, а $\tilde{\Phi}_2$ - это соответствующии им правые части уравнения. Переменная $w_2 \in \mathbf{C}^{k_2}$ получает вес m_2 и мы переходим к следующему шагу.

В случае ростка конечного типа этот процесс за конечное число шагов формируют уравнения ростка в приведенной форме. Обозначим через $\mathcal{H} = \sum_1^l \mathcal{H}_j$ и $\mathcal{S} \sum_1^l \mathcal{S}_j$. Обозначим через π проектор на компоненту $\mathcal{S}$. Теперь условию, гарантирующему, что существует "сдвиг"S_ξ начала координат в точку ξ можно придать следующий вид.

Утверждение 18: Автоморфизм Q, переводящий начало координат в точку

$$\xi = (a\ , b_1 + i\,\Phi_1(a, \bar{a}), \ldots, b_j + i\,\Phi_l(a, \bar{a}, b_1, \ldots, b_{l-1}))$$

существует в том и только том случае, когда

$$\pi(\Delta\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1},\ a, \bar{a}, b_1, ..., b_{j-1})) = 0$$

для всех $j = 1, ..., l$.
Доказательство: Это следует из нашего рассуждения при доказательстве теоремы 16.

Теорема 19: (a) Если Q - голоморфно однородна, то список весов, определяющих тип Q мложет быть только таким

$$(m_1 = 2,\ m_2 = 3, ..., m_l = l + 1).$$

(b) Если Q однородная модельная поверхность коразмерности K, то старший вес $\mu(Q) \leq K + 1$.
Доказательство: Если $m_1 > 2$, то для $a \in \mathbf{C}^n$ общего положения $\Phi_1(z + a, \bar{z} + \bar{a})$ содержит ненулевые не плюригармонические слагаемые. Это

означает уменьшение минимального веса m_1. Аналогично, если имеется такой вес m_j, что вес $m_j - 1$ - отсутствует, то при сдвиге Φ_j в точку общего положения в $\Delta\Phi_j$ появятся ненулевые слагаемые веса $m_j - 1$, которые (утверждение 16) нельзя редуцировать к нулю. Это означает изменение типа и противоречит однородности. Получаем (a), пункт (b) сразу следует из (a).

Замечание 20: При перемещении в точку $\xi \in Q$ тип может поменяться, оставаясь конечным, при этом старший вес m_l не может увеличиться. После осуществления треугольно-полиномиальной замены координат, приводящей новые компоненты к стандартной форме, мы получим уравнения Q в новых координатах с началом в точке ξ. Если тип действительно поменялся, то в этих новых координатах поверхность не может являться модельной. В той координате, где произошло снижение веса стоит неустранимая компонента более высокого веса, которая была младшей до сдвига и которую не затрагивает процесс приведения к стандартной форме. Это, однако, не мешает тому, чтобы поверхность могла оказаться локально биголоморфно эквивалентной своей новой модельной поверхности. Но для реализации этой эквивалетности потребуются преобразования, выходящие за рамки тех треугольно-полиномиальных, которые использовались при приведении.

Алгебра aut Q может быть записана как $g_- + g_0 + g_+$, где g_- - это сумма весовых компонент отрицательных весов, g_0 - поля веса ноль, g_+ - поля положительного веса. Очевидно, что каждое из трех слагаемых является подалгеброй Ли в aut Q. Дадим описание групп, соответствующих этим подалгебрам.

Пусть G_- - это совокупность тругольно-полиномиальных "сдвигов"S_ξ для всех ξ принадлежащих Orb_0 - орбите нуля в группе автоморфизсов Q. Очевидно G_- является группой по отношению к операции композиции. При этом мы получаем взаимно-однозначное соответствие $(\xi \to S_\xi)$ между точками Orb_0 и сдвигами из G_-.

Любой автоморфизм Q можно представить в виде композиции преобразования, сохраняющего начало координат, т.е. из стабилизатора и преобразования из G_-. Поэтому орбита начала координат Orb_0 по отношению ко всей группе Aut$Q$ совпадает с орбитой по отношению только к действию G_-.

Пусть

$$\xi = (a, b_1 = br_1 + i\, bi_1,\, b_2 = br_2 + i\, bi_2, ..., b_l = br_l + i\, bi_l) \in Orb_0$$

тогда S_ξ, в соответствии с процедурой получения уравнений в приведенной форме, имеет вид

$$\begin{aligned} z &\to z + a, \\ w_1 &\to w_1 + \Delta_1(z, a, \bar{a}) + b_1, \\ w_2 &\to w_2 + \Delta_2(z, w_1, a, \bar{a}, br_1) + b_2, \\ &\dots \\ w_l &\to w_l + \Delta_l(z, w_1, ..., w_{l-1}, a, \bar{a}, br_1, ..., br_{l-1}) + b_l, \end{aligned} \tag{16}$$

При этом поправочные слагаемые $\Delta_j\,(z, w_1, ..., w_{j-1}, a, \bar{a}, br_1, ..., br_{j-1})$ однородны веса m_j по совокупности переменных, голоморфны по $(z, w_1, ..., w_{j-1})$, причем обращаются в ноль при $(a, b_1, ..., b_{j-1}) = 0$. Таким образом, если брать разложение Δ_j по весам только (z, w), то там содержатся компоненты весов от 1 до $m_j - 1$. Если $\xi = 0$, то $S_\xi = Id$, т.е. началу координат соответствует единица в G_-.

Как многообразие G_- совпадает с орбитой начала координат - Orb_0 т.е. некоторым подмногообразием Q, содержащем начало координат. В случае, если Q - однородна, то если мы отождествим пространство $\mathbf{C}^{n+K}$ переменных (z, w) и пространство $\mathbf{C}^{n+K}$ переменных (a, b), то мы отождествляем Q и G_-. При этом G_- становится CR-подмногообразием $\mathbf{C}^{n+K}$ глобально голоморфно эквивалентным Q. После чего можно сказать, что Q действует сама на себе треугольно-полиномиальными автоморфизмами $\mathbf{C}^{n+K}$.

Из нашего описания сдвигов S_ξ следует, что алгебра Ли, соответствующая G_- принадлежит g_-. Докажем, что если поле из g_-

$$X = \mathrm{Re}(f\,\frac{\partial}{\partial\, z} + \sum g_j\,\frac{\partial}{\partial\, w_j})$$

обращается в ноль в начале координат, то оно равно нулю. Докажем по индукции. Первый шаг. f имеет вес ноль,т.е. это постоянная, причем равная нулю. Далее, g_1 состоит из компонент веса не выше $m_1 - 1$. Первые две весовые координаты 1-параметрической группы преобразований, порожденных X имеют вид

$$z \to z, \quad w_1 \to w_1 + g_1(z)\, t + \text{члены более высокого порядка по } t$$

Подставляя это в первую группу уравнений Q, получаем $\mathrm{Im}(g_1(z)) = 0$. Откуда получаем $g_1 = 0$. Пусть $g_\nu = 0$ при $\nu < j$. Совершенно также получаем, что мнимая часть голоморфного коэффициента g_j равна нулю на усеченном порождающем модельном многообразии Q^j. А поскольку этот коэффициент равен нулю в начале координат, то он нулю. Итак, g_- это алгебра соответствующая G_-.

Рассмотрим, теперь G_0 - подгруппу преобразований из стабилизатора начала координат вида

$$\begin{gathered}(z \to C\, z,\ w_j \to \rho_j\, w_j + \theta_j(w_1, ..., w_{j-1}),\ j = 1, ..., l),\\ \text{где } C \in GL(n, \mathbf{C}),\ \rho_j \in GL(k_j, \mathbf{R})\\ \text{и где } \theta_j(w_1, ..., w_{j-1}) \text{ - однородная вещественная форма веса } m_j\\ \text{причем для всех } j = 1, ..., l\\ \rho_j\, \Phi_j(z, \bar z,\ u_1, ..., u_{j-1}) +\\ \mathrm{Im}\, \theta_j((u_1 + i\, \Phi_1(z, \bar z)), ..., (u_{j-1} + i\, \Phi_{j-1}(z, \bar z, u_1, ..., u_{j-2}))))\\ = \Phi_j(C\, z, \overline{C\, z}, \rho_1\, u_1, ..., \rho_{j-1}\, u_{j-1})\end{gathered} \tag{17}$$

Чтобы получить описание алгебры Ли, соответствующей G_0, рассмотрим 1-параметрическую подгруппу вида

$$\begin{gathered}C\, z = z + t\, \alpha\, z + ...,\quad \rho_j\, w_j = t\, \beta_j\, w_j + ...,\\ \theta_j(w_1, ..., w_{j-1}) = t\, \gamma_j(w_1, ..., w_{j-1})...,\end{gathered}$$

где $t \in \mathbf{R}$, а многоточием обозначены члены более высокого порядка по t. Подставим это в (17), выделим линейную по t часть и положим $t = 0$. Получаем, что алгебра Ли, соответствующая этой группе Ли состоит из векторных полей вида

$$X = \mathrm{Re}(\alpha z\, \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{l}(\beta_j\, w_j + \gamma_j(w_1, ..., w_{j-1})\, \frac{\partial}{\partial w_j})) \tag{18}$$

причем

$$\begin{gathered}\beta_j\, \Phi_j + \mathrm{Im}\gamma_j((u_1 + i\, \Phi_1, ..., (u_{j-1} + i\, \Phi_{j-1}) =\\ 2\, \mathrm{Re}(\partial_z\, \Phi_j(\alpha\, z)) + \sum_{\nu=1}^{j-1} \partial_{u_\nu}\, \Phi_j(\beta_{nu}\, u_\nu)\end{gathered} \tag{19}$$

При этом мы видим, что (18), при условии (19), - это общий вид поля веса ноль, т.е. g_0 - это алгебра Ли, соответствующая группе Ли G_0.

Пусть, далее, G_+ - это подгруппа автоморфизмов Q, имеющих вид

$$z \to z + o(1), \quad w_j \to w_j + o(m_j), \quad j = 1, ..., l$$

Ясно, что поля, порождающие преобразования из G_+ могут содержаться только в g_+.

Резюмируем.

Теорема 21: (a.1) g_- это алгебра Ли, соответствующая группе Ли G_-. При этом соответствие $\xi \to S_\xi$ отождествляет орбиту начала координат Orb_0 и подгруппу треугольно полиномиальных преобразований G_-.
(a.2) Если Q - голоморфно однородна, т.е. $Orb_0 = Q$, то G_- оказывается реализованной как совокупность треугольно-полиномиальных преобразований вида (17) параметризованной системой параметров $(a, b) \in \mathbf{C}^{n+K}$, удовлетворяющих той же системе уравнений, что и точки Q. Данная параметризация позволяет рассматривать G_- как вещественно алгебраическую поверхность в $\mathbf{C}^{n+K}$ голоморфно эквивалентную Q как CR-многообразие.
(b) g_0 это алгебра Ли, соответствующая группе Ли G_0. При этом нелинейные члены γ_j в g_0, так и нелинейные члены θ_j в G_0 могут присутствовать только при наличии резонансов вида. $m_j = \mu_1 m_1 + ... + \mu_{j-1} m_{j-1}$ с целыми неотрицательными μ_ν.
(c) g_+ это алгебра Ли, соответствующая группе Ли G_+. Причем, если Q - невырождена, то g_+ конечномерна, конечноградуирована и состоит из полей с полиномиальными коэффициентами.
Доказательство: Осталось доказать только сответствие $G_+ \to g_+$. Это следует из того, что любой элемент из стабилизатора нуля может быть представлен как композиция отображения из G_+ и отображения из G_0 (следствие 11) и пункта (b) .

4. Открытые вопросы

Как было отмечено выше, подагебра g_+, при условии невырожденности Q, состоит из конечного числа весовых компонент $g_1 + ... + g_\delta$. Если

Q - *вполне* невырождена, а $\mu \geq 3$ то, как показали Коссовский [11], Сабзевари и Спиро [5], а также Грегорович [6], $g_+ = 0$, т.е. $\delta = 0$. Если же Q является лишь невырожденной, то это не так. Возникает вопрос об оценке старшего положительного веса $\delta(Q)$ подалгебры g_+ для произвольной невырожденной Q.

Гипотеза № 1 (новая версия g_+-гипотезы):

Гипотеза-минимум: Существует постоянная $C(n, m)$, такая что для всех невырожденных модельных поверхностей Q с CR-размерностью n и Блум-Грэм-типом m справедлива оценка $\delta(Q) \leq C(n, m)$. Другими словами, при фиксированных n и m значение δ не может быть сколь угодно большим.
Гипотеза-максимум: Если Q - невырождена, то $\delta(Q) \leq \mu(Q)$, т.е. старший положительный вес не превосходит старшего отрицательного веса.

Примеры с $\delta = \mu$ - существуют [6], в то время как примеры с $\delta > \mu$ нам не известны.

С этими вопросами тесно связан вопрос о соотнесении данной теории модельных поверхностей конечного типа с теорией Н.Танаки [17]. В этой связи можно предположить следующее.

Гипотеза № 2 : Если Q - невырождена и голоморфно однородна, то g_- - фундаментальна.

В этом случае вопрос об оценке $\delta(Q)$ - старшего положительного веса g_+ можно рассматривать в контексте танаковского продолжения.

В теореме 18 было показано, что для однородной модельной поверхности список весов имеет весьма определенный вид $m_j = j + 1$. Что можно сказать об их кратностях k_j? Для поверхности

$$v_j = (\mathrm{Im} z)^{j+1}, \quad j = 1...l$$

типа $(2, 3, ..., l+1)$ все $k_1 = ... = k_l = 1$. Это поверхность CR-размерности 1 и коразмерности l. Этот пример был рассмотрен в работе [22]. С другой стороны, для вполне невырожденных модельных поверхностей кратности быстро растут с ростом веса. Однако ясно, что кратности не могут быть произвольными.

Вопрос № 3: Описать ограничения, которым удовлетворяют кратности весов $(k_1, ..., k_l)$ для голоморфно однородной модельной поверхности.

В теореме 10 (п.(d)) было показано, что если μ_{min} - минимальное значение старшего веса по всем точкам Q, то $Q^{\mu_{min}}$ - открытое подмножество Q. Однако мы не утверждаем, что это единственный открытый страт.

Вопрос № 4: Существуют ли $\nu < \mu_{min}$, т.ч. Q^{ν} - открыто? Т.е. существуют ли открытые страты, отличные от минимального?

Зафиксируем пару (n, K), т.е. CR-размерность и коразмерность. В теореме 14 было доказано, что для размерностей всех невырожденных модельных поверхностей имеется равномерная оценка размерности автоморфизмов - $D(n, K)$.

Гипотеза № 5 (новая версия гипотезы о размерности):
Пусть M_ξ произвольный порождающий вещественно аналитический росток CR-размерности n и коразмерности K. Если $\dim \operatorname{aut} M_\xi$ - конечна, то

$$\text{№}(5.a) \quad \text{для полной размерности} \quad \dim \operatorname{aut} M_\xi \le D(n, K),$$
$$\text{№}(5.b) \quad \text{для размерности стабилизатора} \quad \dim \operatorname{aut}_\xi M_\xi \le Ds(n, K),$$

Т.е. утверждается, что в случае, если размерность группы ростка конечна, то она не превосходит максимальной размерности по всем невырожденным модельным поверхностям того же CR-типа (т.е.CR-размерность, коразмерность), а размерность стабилизатора не превосходит максимума размерностей стабилизаторов. Разумеется, формулируя гипотезу, можно было бы фиксировать не коразмерность K, а старший вес μ или тип m.

Для гиперповерхности Γ в $\mathbf{C}^2$, т.е. при $n = K = 1$ часть (a) гипотезы достаточно очевидна. Действительно, если форма Леви этой гиперповерхности тождественно нулевая, то локально - это гиперплоскость и размерность бесконечна. Пусть это не так. Возьмем в окрестности $\xi \in \Gamma$ девять полей из $\operatorname{aut} \Gamma_\xi$. Рассмотрим эти поля в окрестности близкой точки, в которой Г - Леви-невырождена. Там размерность алгебры не превосходит размерности алгебры модельной сферы, т.е. восьми. Таким образом поля линейно зависимы и по аналитичности эта зависимость продолжается в точку ξ. Однако даже в этой ситуации оценка размерности стабилизатора, т.е. часть (b) это гораздо более тонкий вопрос, требующий более тонких рассуждений [18]. Для гиперповерхности в $\mathbf{C}^3$, т.е. для $K = 1$ и $n = 2$ гипотеза № (5.a) доказана в [19], а № (5.b) в [20]. Для гиперповерхности в $\mathbf{C}^4$, т.е. для $K = 1$ и $n = 3$ вопрос на сегодняшний день открыт.

В [21] на примере поверхностей CR-типа (2,5) было показано, что если в качестве класса модельных поверхностей понимать вполне невырожденные модельные поверхности, то гипотеза не верна. А именно, был приведен пример поверхности данного типа, не являющейся вполне невырожденной автоморфизмы которой имеют размерность больше, чем все вполне невырожденные модельные поверхности данного типа. В новой терминологии эта поверхность из этого примера является невырожденной модельной поверхностью CR-размерности $n = 2$, её тип по Блуму-Грэму $m = (2, 2, 3, 3, 4)$ коразмерность $K = 5$.

В [7] для жестких модельных поверхностей Q было показано, что группа $\mathrm{Aut}\ Q$ состоит из бирациональных отображений пространства $\mathbf{C}^N$, чьи степени ограничены константой, зависящей лишь от n и K. Доказательство основано на приеме В.Каупа [15]. По видимому, это остается справедливым и для общих модельных поверхностей конечного типа.

Гипотеза № 6: Пусть Q - невырожденная голоморфно однородная модельная поверхность CR-размерности n и типа m по Блуму-Грэму, тогда группа $\mathrm{Aut}\ Q$ состоит из бирациональных преобразований $\mathbf{C}^N$, степени которых ограничены константой, зависящей только от n и m.

Всякое порождающее вещественно аналитическое подмногообразие M, имеющее в точке ξ конечный тип можно, как мы видели, локально рассматривать, как возмущение своей модельной поверхности. Уместно задать вопрос об условиях голоморфной эквивалентности ростка M_ξ своей модельной поверхности Q. Такие ростки, по аналогии с гиперповерхностями, мы будем называть *сферическими* в точке ξ. Ясно, что если росток M_ξ эквивалентен Q_0, то в стабилизаторе ξ в $\mathrm{aut}\, M_\xi$ есть поле

$X_0 \neq 0$, а именно поле, соответствующее (12). Можно предложить некоторый критерий сферичности в точке, близкий к тавтологии.

Утверждение 22: Порождающий росток M_ξ - сферичен, тогда и только тогда, когда уравнения M_ξ в некоторых координатах в окрестности ξ имееют вид (2), а поле X_0 - вид (12) .
Доказательство: Записывая в этих координатах уравнение M_ξ как (2) и используя растяжения (11), порожденные X_0, получаем (6).

Заметим, что условие конечности типа здесь не используются. Используя поле X_0, можно естественным образом ввести градуировку на $\mathrm{aut}\, M_\xi$. После этого можно предложить ряд необходимых условий сферичности, связанных с тем, что в координатах (6) поле (12) порождает присоединенное действие на каждой весовой компоненте $\mathrm{aut}\, Q_0$

$$X \to ad_{X_0}(X) = [X, X_0]$$

Эквивалентность Q означает, что поле X_0 линеаризуется, причем порожденный им присоединенный оператор диагонализуется с известным набором собственных значений, а именно $(1, m_1, ..., m_l)$ и с кратностями этих значений k_j, соответствующими типу.

Вопрос № 7 : Предложить конструктивный критерий сферичности многообразия фиксированного Блум-Грэм-типа.

Для некоторых CR-типов, в частности для гиперповерхностей, ответ на вопрос 7 известен.

Пусть M_ξ - росток невырожденного голоморфно однородного подмногообразия комплексного пространства и Q - его модельная поверхность в точке ξ. Пусть M вещественно аналитическое вложенное подмногообразие в некоторой области , которое является представителем нашего ростка. Из локальной однородности M сразу следует, что модельные поверхности во всех точках M эквивалентны Q, т.е. у M , по существу, повсюду одна и та же модельная поверхность. Но не видно каких-либо причин для того, чтобы сама модельная поверхность Q была бы при этом голоморфно однородной. В связи с этим вопрос.

Вопрос № 8: Существует ли такое локально однородное невырожденное вещественное многообразие M, что его единственная модельная поверхность Q однородной не является?

5. Что осталось за кадром

Рассмотрим пример гиперповерхности из работы [23]. Это гиперповерхность в пространстве $\mathbf{C}^{n+2}$ с координатами $(z_1, ..., z_n,\, \zeta,\, w = u + i\,v)$, заданная уравнением

$$v = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{\zeta} + \ldots + z_n \bar{\zeta}^n).$$

Данная гиперповерхность имеет тип по Блуму-Грэму $m = (2)$, причем модельная поверхность $Q = \{v = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{\zeta})\}$ - голоморфно вырождена и размерность ее автоморфизмов - бесконечна, в то время как автоморфизмы самой гиперповерхности - конечномерны (теорема 12 становится бессодержательной). Это то, что мы получаем при стандартном подходе, когда веса всех координат z и ζ одинаковы и равны 1. Но если расставить веса иначе, а именно: $([\zeta] = 1,\ [z_j] = 1 + n - j,\ [w] = n + 1)$, то поверхность становится взвешенно однородной (веса $n + 1$). К тому же эта гиперповерхность голоморфно однородна. Используя "взвешенную"версию конструкции Пуанкаре можно получить оценку размерности автоморфизмов для ростка возмущенной гиперповерхности

$$v = 2\mathrm{Re}\,(z_1 \bar{\zeta} + \ldots + z_n \bar{\zeta}^n) + o(n + 1).$$

Ясно, что за этим примером стоит **"взвешенная" теория модельных поверхностей конечного типа**. При этом первый шаг в построении такой теории, а именно доказательство "взвешенного" аналога теоремы Блума-Грэма, уже сделан М.Степановой [24]. Будучи построенной, такая теория значительно раздвинет рамки применимости метода модельных поверхностей.

Задача № 9: Построить "взвешенную" теорию модельных поверхностей конечного типа, включающую возможность введения различных весов координат комплексной касательной и основанной на типе многообразия по Блуму-Грэму-Степановой.

Глобальная теория особенностей. Невырожденная модельная поверхность является глобально определенным объектом (алгебраичность, полиномиальность алгебры автоморфизмов,...), но при этом она связана с исходным многобразием *локально*, это характеристика ростка в точке. Пусть имеется гладкое компактное вещественное подмногообразие M комплексного пространства $\mathbf{C}^N$ вещественной размерности большей, чем N. При этом условии комплексная часть касательного пространства в каждой точке обязана иметь положительную размерность. Малой деформацией в окрестности некоторой точки M можно снять все вырождения, а именно сделать его порождающим, вполне невырожденным, несферичным. Если считать, что мы находимся в ситуации, когда $g_+ = 0$, то, добавив к несферичности некоторое простое дополнительное условие невырожденности (назовем его условием дополнительной ассиметрии), можно считать, что CR-структура в этой окрестности редуцируется к $\{e\}$-структуре и мы имеем CR-инвариантный репер касательного расслоения над этой окрестностью (см.[25]). Однако имеются глобальные условия, которые формулируются в терминах характеристических классов касательного расслоения, которые запрещают тривиализацию касательного расслоения над всем многообразием. Если M такое многообразие, то после любой деформации на M должны присутствовать точки, в которых какие-то из перечисленных условий (порождаемость, полная невырожденность, несферичность, дополнительная ассиметрия) не выполняются.

Вот пример такой ситуации. Пусть M^4 - гладкое компактное 4-мерное или даже аналитическое подмногообразие $\mathbf{C}^3$, т.е. коразмерность $K = 2$. Локально, после малой деформации, мы всегда можем считать, что M^4 - это порождающее вполне невырожденное многобразие CR-размерности $n = 1$, его Блум-Грэм-тип равен $m = (2, 3)$. Пусть M^4 топологически просто, например, диффеоморфно 4-мерной сфере, которая, как известно, не параллелизуема. Какого рода особенности возможны для такого многобразия? Рассмотрим $T_\xi M$ касательную к M в некоторой точке ξ. Есть две возможности. Либо эта плоскость содержит одномерную комплексную касательную, либо она сама является двумерной комплексной плоскостью. В первом случае M в окрестности ξ является порождающим CR-многообразием CR-размерности один, коразмерности два и для него определен Блум-Грэм-тип. А во-втором случае мы имеем дело с RC-особой точкой. Множество таких точек, очевидно замкнуто. В терминах комплексных градиентов локальных определяющих функций

$M = \{\rho_1 = \rho_2 = 0\}$ условие, что точка RC-особая сводится к тому, что градиенты $(\mathrm{grad}\rho_1, \mathrm{grad}\rho_2)$ коллинеарны. Коллинеарность двух трехмерных векторов - это два комплексных или же четыре вещественных условия. Можно ожидать, что четыре соотношения на 4-мерном компактном многообразии в общем положении имеют лишь конечный, возможно пустой набор решений. В каждой точке дополнения к этому множеству определен тип по Блуму-Грэму. Причем после малой деформации мы можем считать, что в точке общего положения (вне собственного аналического подмножества) это базовый тип $(2, 3)$. Дополнение к этому множеству назовем BG-особыми точками. Итак, задача сводится к описанию множества RC и BG-особых точек.

Вырождения на уровне 1-струи (RC-особые точки) изучались в серии работ (см. [27]). Но не исключено, что неустранимые вырождения затриагивают и Блум-Грэм-тип точки.

Задача № 10: Описать типичные, т.е. неустранимые малой деформацией, вырождения и их инварианты.

Поверхности бесконечного типа. Вот простой пример такой гиперповерхности в $\mathbf{C}^2$

$$v = u\,|z|^2.$$

Эта гиперповерхность имеет бесконечный тип в начале координат, а также во всех точках комплексной прямой $w = 0$. В остальных точках эта гиперповерхность имеет конечный тип (2) и невырождена по Леви. Для вещественно аналитических гиперповерхностей конечность типа в точке общего положения и голоморфная невырожденность - эквивалентны [10]. Поэтому для доказательства гипотезы (5.a) точки бесконечного типа, лежащие на собственном аналитическом подмногообразии, можно игнорировать.

Однако для многообразий бо́льшей коразмерности возможна ситуация, когда голоморфно невырожденное многообразие *всюду* имеет бесконечный тип. Причем размерность алгебры локальных автоморфизмов может быть как бесконечной так и конечной. Таким образом для таких многообразий голоморфная невырожденность является лишь необходимым условием и вопрос о критерии конечномерности автоморфизмов для ростков таких многообразий - открыт. Тогда как для поверхностей конечного типа на открытом плотном множестве в соответствии с теоремой Стэнтон-Эбенфельда [10] голоморфная невырожденность является критерием конечномерности.

Проблема № 11: Пусть имеется голоморфно невырожденное вещественно аналитическое подмногообразие, чей тип во всех точках - бесконечен. Найти критерий конечномерности голоморфных автоморфизмов ростка такого подмногообразия .

При работе над статьей автор обсуждал ее содержание с М.А.Степановой, Н.Г. Кружилиным и И.Г.Коссовским, которые высказали ряд ценных замечаний, за что он им весьма признателен.

Список литературы

[1] H. Poincare, “Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme”, Rend. Circ. Mat., Palermo, 1907, 185–220.

[2] S. S. Chern, J. K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Mathematica, 1974, 133:219.

[3] Белошапка В.К., “О голоморфных преобразованиях квадрики”, Математический сборник, 182:2 (1991), 203–219.

[4] В. К. Белошапка, “Универсальная модель вещественного подмногообразия”, Матем. заметки, 75:4 (2004), 507–522.

[5] M. Sabzevari and A. Spiro, “On the Geometric Order of Totally Nondegenerate CR-manifolds,” arXiv: 1807.03076v1 [mathCV], 9 Jul 2018.

[6] J. Gregorovich, “On the Beloshapka’s Rigidity Conjecture for Real Submanifolds in Complex Space,” arXiv: 1807.03502v1 [mathCV], 10 Jul 2018.

[7] V. K. Beloshapka, Polynomial Model CR-Manifolds with the Rigidity Condition, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 26, No. 1, 2019, pp. 1–8.

[8] Th. Bloom and I. Graham, “On Type Conditions for Generic Real Submanifolds of Cn,” Invent. Math. 40, 217–243 (1977).

[9] V. K. Beloshapka, Moduli Space of Model Real Submanifolds, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 13, No. 3, 2006, pp. 245–252.

[10] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, and L. P. Rothschild, “CR Automorphisms of Real Analytic CR in Complex Space,” Comm. Anal. Geom. 6, 291–315 (1998).

[11] R. V. Gammel and I. G. Kossovskiy, The Envelope of Holomorphy of a Model Third-Degree Surface and the Rigidity Phenomenon, Tr. Mat. Inst. Steklova 253, 30–45 (2006) [Proc. Steklov Inst. Math. 253, 22-36 (2006)].

[12] V. K. Beloshapka, Cubic Model CR-manifolds without the Assumption of Complete Nondegeneracy, Russ. J. Math. Phys. 25 (2), 148–157 (2018).

[13] Masoud Sabzevari, Totally nondegenerate models and standard manifolds in CR dimension one, 2016, arXiv:1610.08764

[14] D.Zaitsev, Germs of local automorphisms of real-analytic CR-structures and analytic dependence of k-jets // Math. Res. Lett., V.4, P. 1-20 (1997).

[15] W. Kaup, “Einige Bemerkungen uber polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten,” Math. Ann. 204, 131–144 (1973).

[16] A. E. Tumanov, “Finite-Dimensionality of the Group of CR Automorphisms of a Standard CR Manifold and Proper Holomorphic Mappings of Siegel Domains,” Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 52 (3), 651– 659 (1988) [Math. USSR Izv. 32 (3), 655–662 (1989)].

[17] N.Tanaka, On differential systems, graded Lie algebras and pseudugroups, J.Math.Kyoto Univ. v.10, N 1 (1970), 1-82.

[18] I.Kossovskiy, R.Shafikov, Analytic differential equations and spherical real hypersurfaces. J. Differential Geom. 102 (2016), no. 1, 67–126.

[19] В. К. Белошапка, “Симметрии вещественных гиперповерхностей трехмерного комплексного пространства”, Матем. заметки, 78:2 (2005), 171–179

[20] A.Isaev, B. Kruglikov On the symmetry algebras of 5-dimensional CR-manifolds. Adv. Math. 322 (2017), 530–564.

[21] В. К. Белошапка, Контрпример к гипотезе о размерности, Матем. заметки, 81:1 (2007), 136–139; Math. Notes, 81:1 (2007), 117–120.

[22] G. Fels, W. Kaup, Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5, Acta Math., vol 201, N 1, pp 1 — 82, 2008

[23] А. С. Лабовский, О размерности группы биголоморфных автоморфизмов вещественно-аналитических гиперповерхностей, Матем. заметки, vol 61, N 3, pp.349 — 358, 1997.

[24] М.А.Степанова, Модификация теоремы Блума–Грэма: введение весов в комплексном касательном пространстве, Труды ММО, 2018, том 79, выпуск 2, страницы 237–246.

[25] V.K.Beloshapka, Holomorphic Classification of Real Manifolds of General Type, Doklady Mathematics, v,57, N 3, 1998, pp.407-409.

[26] J. K. Moser, S. M. Webster, “Normal forms for real surfaces in $\mathbf{C}^2$ near complex tangents and hyperbolic surface transformations”, Uspekhi Mat. Nauk, 41:2 (248), 1986, pp.143–174.

[27] А. В. Домрин, “Описание в терминах RC-особенностей характеристических классов вещественных подмногообразий в комплексных многообразиях”, Изв. РАН Сер. матем., 59:5 (1995), 19–40.