В. К. Белошапка, Пример непродолжаемого голоморфного преобразования аналитической гиперповерхности, *Матем. заметки*, 1982, том 32, выпуск 1, 121–123

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 32, № 1 (1982)

# ПРИМЕР НЕПРОДОЛЖАЕМОГО ГОЛОМОРФНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

В. К. Белошапка

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n$ две вещественно аналитические гиперповерхности $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ с невырожденными формами Леви. Пусть точка $p_i \in \Gamma_i$, $V_i$ — ее $U_i$ окрестность в $\mathbf{C}^n$ и $V_i = U_i \cap \Gamma_i$. Пусть, далее, в $U_1$ задано голоморфное отображение $h\colon U_1 \to \mathbf{C}^n$ такое, что $h(V_1) \subset V_2$.

Существует гипотеза, утверждающая, что отображение $h$ может быть продолжено вдоль любого пути по поверхности $\Gamma_1$.

В работе 1] был построен пример, показывающий, что, вообще говоря, это неверно. Пример следующий:

$$\Gamma_1 = \{(w_1, w_2) \in \mathbf{C}^2\colon \operatorname{Im} w_2 = |w_1|^2\},$$
$$\Gamma_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2\colon |z_1|^2 + \sin \ln |z_2| = 0;\ e^{-\pi} \leqslant |z_2| \leqslant 1\}.$$

Отображение $h$ определим формулами

$$z_1 = w_1/\sqrt{w_2};\ z_2 = e^{i \ln w_2}.$$

Соответственно формулы обратного отображения таковы:

$$w_1 = z_1 e^{-i/2 \ln z_2};\ w_2 = e^{-i \ln z_2}.$$

В области $\{\operatorname{Im} w_2 > 0\}$ у $h$ можно выделить однозначную ветвь. Эта ветвь определяет отображение $\Gamma_1 \setminus \{(0, 0)\}$ в $\Gamma_2$. Продолжить отображение в точку $(0, 0)$ нельзя.

Основной результат работы С. И. Пинчука [2] есть доказательство этой гипотезы в случае, когда гиперповерхность $\Gamma_1$ не является сферической, т. е. ее нормальная форма не является гиперквадрикой (см. [3]), а ее форма Леви положительно определена. Частный случай этого результата получен А. Е. Тумановым [4]. Отметим, что в примере работы [1] первое из этих двух условий нарушено, а второе соблюдено. Здесь мы построим пример, показывающий, что в обратной ситуации, т. е. когда первое условие (несферичность) выполнено, а второе (строгая псевдовыпуклость) нарушено, гипотеза также становится неверной и тем самым результат С. И. Пинчука является точным.

Пример получен видоизменением примера работы [1]. Положим

$$\Gamma_1 = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{C}^3 \colon \operatorname{Im} w_3 = \\ = w_1\overline{w}_2 + w_2\overline{w}_1 + P(w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2)\},$$

где $P$ — вещественный многочлен от $w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2$ такой, что $P(t_1w_1, t_1\overline{w}_1, t_2w_2, t_2\overline{w}_2) = t_1^k t_2^l P(w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2)$, где $t_1, t_2$ — любые вещественные числа. Отображение, обратное к отображению, зададим формулами

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 e^{-i\lambda \ln z_3}; \\ w_2 &= z_2 e^{-i\mu \ln z_3}; \\ w_3 &= e^{-i \ln z_3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Подстановка (1) в равенство, определяющее $\Gamma_1$, дает

$$-e^{\arg z_3} \sin \ln |z_3| = e^{(\lambda+\mu)\arg z_3} 2 \operatorname{Re}[z_1\overline{z}_2 e^{i(\mu-\lambda)\ln|z_3|}] + \\ + e^{(k\lambda+l\mu)\arg z_3} Q(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, e^{i\nu \ln|z_3|}), \tag{2}$$

где $Q$ — многочлен. Если в качестве $\lambda$ и $\mu$ мы возьмем решения системы

$$k\lambda + l\mu = 1, \quad \lambda + \mu = 1$$

(а они существуют, если $k \neq l$), то равенство (2) примет вид

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = \sin \ln |z_3| + 2 \operatorname{Re}[z_1\overline{z}_2 e^{i(\mu-\lambda)\ln|z_3|}] + Q = 0.$$

Этому равенству удовлетворяют точки окружности

$$e = \{(z_1 z_2 z_3) \in \mathbf{C}^3 \colon z_1 = z_2 = 0, \ |z_3| = 1\}.$$

Далее, $d\varphi(0, 0, e^{i\theta}) \neq 0$, $\theta \in \mathbf{R}$, поэтому существует такая окрестность $U$ окружности $e$, что $d\varphi|_U \neq 0$, Положим

$$\Gamma_2 = \{(z_1 z_2 z_3) \in U: \varphi(z_1, z_2, z_3) = 0\}.$$

Отображение $h$ не может быть продолжено в точку (0, 0, 0), так как производные $h$ не ограничены в окрестности этой точки. В этом можно убедиться следующим образом. Если точка равномерно перемещается по лучу

$$\{w_1 = w_2 = \operatorname{Im} w_3 = 0, \ \operatorname{Re} w_3 > 0\}$$

по направлению к точке (0, 0, 0), то ее образ движется по окружности $e$ с неограниченно возрастающей угловой скоростью.

В заключение автор благодарит А. Г. Витушкина за ценные обсуждения.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 6.IV.1980

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Burns D., Shnider S., Spherical hypersurfaces in complex space, Invent Math., 33, № 3 (1976), p. 223—246.
[2] Пинчук С. И., О голоморфных отображениях вещественно аналитических гиперповерхностей, Докл. АН СССР, **236**, № 3 (1977), 544—547.
[3] Chern S., Moser J., Real hypersurfaces in complex manifold 1, Acta Math., **133**, № 3—4 (1974), 219—271.
[4] Туманов А. Е., Хенкин Г. М., Голоморфные инварианты вещественных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^n$, Успехи матем. наук, 33, № 2 (1978), 179.