О декомпозиции функций конечной аналитической сложности

Белошапка В.К.

УДК 517.55, 517.923, 514.74

Аннотация

В работе показано, что каждой схеме композиции, позволяющей получить аналитическую функцию двух переменных из аналитических функций одного переменного и сложения, соответствует система дифференциально полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами, такая что ее аналитические решения и только они разлагаются в композицию с данной схемой (система уравнений схемы). Это, в частности, доказывает независимость, для аналитической функции, минимальной схемы композиции от точки и ростка. В работе описан алгоритм получения представления функции в виде композиции с данной схемой и построения системы уравнений схемы.

[1]

Пусть Z - аналитическая функция двух переменных и пусть $(z(x,y),D)$ - элемент Z, т.е.$z(x,y)$ голоморфна в области D двумерного комплексного пространства, а Z - это результат аналитического продолжения этого элемента. Пусть, далее, Z - функция, аналитической сложности один. Это значит, что в D найдется точка (x_0,y_0), ее окрестность $V = \{|x-x_0| < \delta,\ |y-y_0| < \delta\}$, содержащаяся в D, непостоянная функция

[1]МГУ им.Ломоносова, механико-математический факультет,
Воробьевы горы, 119991 Москва, Россия, valery@beloshapka.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке
грантов РФФИ 17-01-00592 А и 18-51-41011 Узб т

$a(x)$ - голоморфная в $\{|x - x_0| < \delta\}$, непостоянная функция $b(y)$ - голоморфная в $\{|y - y_0| < \delta\}$, непостоянная функция $c(t)$ - голоморфная в $\{|t - (a(x_0) + b(y_0))| < \varepsilon\}$, такие что в V имеет место представление

$$z(x, y) = c(a(x) + b(y)) \tag{1}$$

Для дальнейшего будет удобно различать аналитическую функцию z, которую мы планируем представить в виде композиции определенного вида и саму эту композицию S. Композицию фиксированного вида составленную из функций одного переменного и сложения с неопределенными и независимыми, входящими в нее функциями, мы будем называть *схемой композиции.* Для того, чтобы превратить такую схему в конкретную функцию, следует задать соответствующий набор ростков голоморфнх функций одного переменного. В нашем примере набор неопределенных функциональных переменных это (a, b, c). Если вместо неопределенных переменных (a, b, c) мы подставим ростки конкретных голоморфных функций (A, B, C) мы получаем росток конкретной голоморфной функции двух переменных $S(A, B, C)(x, y)$ (или говорим, что данный росток не определен). Для нашего примера мы имеем $S(A, B, C)(x, y) = c(a(x) + b(y))$. При таком подходе вопрос о представимости ростка функции $z(x, y)$ в виде композиции с данной схемой S можно сформулировать так. Существуют ли ростки функций одного переменного (A, B, C), такие что $z(x, y) = S(A, B, C)(x, y)$?

Лемма 1: Пусть в окрестности точки $p = (x_0, y_0)$ определены и голоморфны $\varphi(x, y)$ и $z(x, y)$, пусть p - не критическая точка φ, т.е. одна из частных производных φ отлична в этой точке от нуля. Тогда в окрестности p функция z может быть представлена в виде $z(x, y) = c(\varphi(x, y))$ тогда и только тогда, когда в окрестности p

$$\varphi'_y\, z'_x - \varphi'_x\, z'_y = 0 \tag{2}$$

Доказательство: Непосредственное применение теоремы о неявной функции. А именно, нужно в окрестности p перейти от координат (x, y) к координатам (x, t) или (t, y), где $t = \varphi(x, y)$. В этих координатах (2) означает, что z - это функция только одного переменного t.

Следствие 2: Если z и φ голоморфны в области D, то представление z в виде $c(\varphi(x, y))$ продолжается по всем путям в D, не проходящим через особые линии уровня φ (дискриминантное множество).

Применяя лемму, получаем, что представление (1) вне множества $\{a'(x) = b'(y) = 0\}$ имеет место тогда и только тогда, когда $b'\ z'_x = a'\ z'_y$. Если в точке $z'_x \neq 0$, то можно написать, что $b' = a'\ z'_y/z'_x$. Ясно, что для существования такой функции b необходимо и достаточно выполнения условия $(a'\ z'_y/z'_x)'_x = 0$, которое, при условии $z'_y\ a' \neq 0$, можно переписать в виде $-a''/a' = (z''_{xy}\ z'_x - z''_{xx}\ z'_y)/(z'_x\ z'_y)$. После чего становится ясно, что для существования подходящей функции a необходимо и достаточно выполнения условия

$$((z''_{xy}\ z'_x - z''_{xx}\ z'_y)/(z'_x\ z'_y))'_y = 0,$$

которое можно записать так

$$z'_x z'_y (z'''_{xxy} z''_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0 \tag{3}$$

Резюмируем.

Утверждение 3:
(a)Пусть z - голоморфна в области D, удовлетворяет там (3) и $z'_x\ z'_y \neq 0$ в точке $p = (x_0, y_0)$. Тогда z в некоторой окрестности p имеет представление (1).
(b) Это представление продолжается вдоль любых путей в
$D \setminus (\{z'_x\ z'_y = 0\})$.
(c) Если Z - аналитическя функция, порожденная элементом z, то представление (1) продолжается по всем путям, по которым продолжается элемент z, не проходящим через точки дискриминантного множества $\{z'_x\ z'_y = 0\}$.

Пример 4: Пусть $z = x\ y$.
Непосредственно убеждаемся, что условие (3) - выполнено.
$-a''/a' = (z''_{xy}\ z'_x - z''_{xx}\ z'_y)/(z'_x\ z'_y) = 1/x$. Получаем $a(x) = \lambda \ln(x) + \mu$.
Теперь $b' = a'\ z'_y/z'_x = \lambda/y$ и $b(y) = \lambda \ln(y) + \nu$.
Имеем $x\ y = c(\lambda(\ln(x\ y)) + \mu + \nu)$. Если $T = \lambda(\ln(x\ y)) + \mu + \nu)$, то

$$c(T) = \exp\left(\frac{T - (\mu + \nu)}{\lambda}\right).$$

Данный пример показывает, что области, где аналитичны функция $z(x, y)$ и ее представлене $S(a, b, c)(x, y)$ могут не совпадать. Здесь z определена, однозначна и голоморфна всюду, а ее представление со схемой

S определено не всюду. У функций, входящих в ее декомпозициию, возникают изолированные особые точки и они, эти функции, могут быть многозначными. В связи с этим наблюдением дадим следующее определение.

Определение 5:
(a)Будем говорить, что функция f аналитична *почти всюду* в области D если она аналитически продолжается по всем путям в этой области, не пересекающимися с некоторым собственным аналитическим подмножеством D.
(b) Пусть f и g - две аналитические функции. Будем говорить, что g продолжается *почти по всем путям*, по которым продолжается f, имея ввиду следующее. Пусть f продолжается вдоль некоторого пути γ. Это продолжение по пути можно заменить на продолжение по цепочке полидисков. И пусть в каждом полидиске, где голоморфен элемент f, реализуется ситуация предыдущего пункта этого определения, т.е.g можно продолжать по любому пути в этом полидиске, не пересекающимся с некоторым собственным аналитическим подмножеством. Таким образом мы требуем, чтобы продолжение g было возможно по любой кривой $\tilde{\gamma}$, которая проходит эти полидиски в том же порядке, не пересекая дискриминантные подмножества.

Теперь мы можем сказать, что представление $c(a(x)+b(y))$ функции $x\,y$ продолжается почти по всем путям в $\mathbf{C}^2$.

Давайте рассмотрим этот результат для функций двух переменных первого класса сложности в контексте дифференциальной алгебры. С этой целью рассмотрим алгебру $\mathcal{R}$ - дифференциальную алгебру Ритта [2] над полем рациональных чисел. Пусть в этой алгебре имеются два коммутирующих дифференцирования (∂_x, ∂_y) и следующий набор неизвестных $(c,\ b,\ a,\ z)$. То, что a это функция от x, b - функция от y, c - функция от $(a+b)$, а функция z представлена в виде композиции сложности один записывается в виде следующей системы соотношений

$$eqs = \{\partial_x\, a = 0, \quad \partial_y\, b = 0, \quad (\partial_y\, b)\,(\partial_x\, c) - (\partial_x\, a)\,(\partial_y\, c) = 0, \quad c - z = 0\}$$

Эти соотношения порождают в $\mathcal{R}$ радикальный дифференциальный идеал I. В обозначениях [2] мы можем написать $I = \{eqs\}$. Упорядочим дифференцирования и неизвестные следующим образом ($\partial_y \succ \partial_x$) и ($c \succ b \succ a \succ z$). Этот порядок распространяется на все дифференциальные мономы и позволяет осуществлять исключение старших переменных из соотношений $eqs = 0$. Этот процесс и был нами осуществлен выше с помощью нехитрых вычислений в $\mathcal{R}$. В общем случае это исключение алгоритмически осуществляетляется с помощью техники дифференциальных базисов Гребнера. Конечность алгоритмов построения этих базисов гарантируется теоремой Ритта-Роденбаша о базисах ([1], [2], теорема 7.1.).

Представления функций в виде композиции, конечной сложности определяются индуктивно [3]. А именно, общий вид функции, сложности $(n+1)$ это $z = C(A_n(x,y) + B_n(x,y))$, где A_n и B_n - имеют сложность n. Таким образом, чтобы сформировать композицию, сложности n надо иметь набор из $2^{(n+1)} - 1$ функций одного переменного, которые мы будем обозначать следующим образом. Функции нижнего (нулевого) уровня, которые не являются сложными, а представляют собой функции одного переменного, в количестве 2^n, мы будем обозначать $A_{j_1 \cdots j_n}$. При этом каждый индекс независимо принимает значения 0 или 1. При этом $A_{j_1 \ldots j_{n-1} 0} = A_{j_1 \ldots j_{n-1} 0}(x), \quad A_{j_1 \ldots j_{n-1} 1} = A_{j_1 \ldots j_{n-1} 1}(y)$. Это функции нулевого уровня. Далее, располагая набором $A_{j_1 \cdots j_{n-1}}$ из $2^{(n-1)}$-й функции, мы формируем $2^{(n-1)}$ композиций сложности один вида

$$A_{j_1 \cdots j_{n-1}}(A_{j_1 \ldots 0}(x) + A_{j_1 \ldots 1}(y)).$$

Это функции первого уровня. И так далее, и, наконец, на последнем шаге мы получаем единственную функцию n-го уровня $z(x,y) = A(A_0 + A_1)$.

Упорядочиваем все функции в лексикографическом порядке.

$$A \succ A_0 \succ A_1 \succ A_{00} \succ \cdots \succ A_{11\ldots 1} \succ z \tag{4}$$

Переобозначим эти функции, занумеровав их последовательно в соответствии с указанным порядком.

$$B_1 = A,\ B_2 = A_0,\ B_3 = A_1, \ldots, A_{11\ldots 1} = B_{2^{n+1}-1} \tag{5}$$

Обозначим набор функций одного переменного $(B_1, \ldots, B_N)$, необходимый для составления композиции данной сложности n, через B. При этом $N = 2^{n+1} - 1$.

Выше был описан индуктивный способ, с помощью которого из функций набора B формируется некоторая функция двух переменных. Этот ссособ мы будем называть *полной схемой* сложности n. Но наряду с полными схемами мы будем рассматривать и другие.

Определение 6: Пусть B - набор функций одного переменного. Пусть имеется способ (алгоритм) S, который позволяет из независимых переменных x и y и B с помощью операции подстановки (суперпозиции) и сложения получить функцию двух переменных. Если при этом каждая функция из набора B использовалась ровно один раз, то мы будем называть S *схемой композиции.*

Схема S, понимаемая как алгоритм, получая на входе набор конкретных данных B выдает функцию двух переменных, которую мы обозначаем $S(B)(x, y)$ и область определения которой может, в частности, оказаться пустой. Тот индуктивный способ, который был описан выше тоже определяет, некоторую схему, которую мы называем *полной схемой* сложности n. Разные схемы требуют различного количества функций. Для полной схемы это число, как было отмечено, равно $N = 2^{n+1} - 1$.

Например, $S_1(a, b, c, p, q, r, s)(x, y) = s(c(a(x)+b(y))+r(p(x)+q(y))$ - это полная схема сложности два. Если же положить $q = 0$, то мы получаем $S_2(a, b, c, r, s)(x, y) = s(c(a(x) + b(y)) + r(x))$ - некоторую неполную схему сложности два и $S_2 \prec S_1$.

Каждой схеме S соответствует класс ростков аналитических функций $z(x, y)$, который может быть представлен в виде $z(x, y) = S(B)(x, y)$ при всевозможных выборах B. Обозначим этот класс через $Cl(S)$.

Из каждой схемы S_1 можно получить другую схему S_2 следующим образом. Положим в наборе B_1 данных для S_1 часть функций равными тождественному нулю. Оставшиеся функции обозначим B_2. Выполняя алгоритм построения S_1 для такого набора данных мы получаем новую схему S_2. При этом мы говорим, что S_1 не проще, чем S_2 и пишем $S_2 \prec S_1$. Это отношение задает на схемах частичный порядок. Ясно, что если $S_2 \prec S_1$, то $Cl(S_2) \subset Cl(S_1)$. Поскольку каждый класс содержиться в некотором полном классе сложности n (класс, соответствующий полной схеме сложности n), то минимальное n будем называть сложностью класса.

Определение 7: Пусть росток аналитической функции $z(x, y)$ обладает представлением со схемой S и данными B, т.е. $z(x,y)=S(B)(x,y)$. Мы будем говорить, что эта схема *минимальна* если для z не существует представления $z(x,y)=\tilde{S}(\tilde{B})(x,y)$, где $\tilde{S}\prec S$ и $\tilde{S}\neq S$.

Дальнейшее построение заключается в том, что мы, проходя по последовательности B, начиная с B_1 и далее осуществляем исключение очередной функции. Начинаем с того, что показываем, что для существования функции B_1, в соответствии с леммой 1, необходимым и достаточным условием является некоторое дифференциальное соотношение на последующие функции. А также мы доказываем, что при соблюдении этого условия B_1 аналитична почти всюду в окрестности каждой точки, где аналитичны все последующие функции. Далее переходим к следующей функции и так далее. На m-м шаге мы исключаем функцию B_m и выписываем дифференциально-полиномиальные условия ее существования $P_m(B_{m+1},\dots)=0$. При этом у нас, вообще говоря, растет число соотношений, их степени и их дифференциальные порядки. Достигая последнего, нулевого, уровня мы по порядку исключаем все функции переменных x и y, которые использовались для построения композиции и получаем конечную совокупность полиномиально дифференциальных условий на исходную функцию z, которая является критерием существования последней функции нулевого уровня. Полученная совокупность соотношений - это критерий существования для z декомпозиции данного вида. Т.е. совокупность уравнений, определяющих класс $Cl(S)$ - класс аналитических функций, допускающих представление с данной схемой S.

Имеет место следующее очевидное утверждение.

Утверждение 8: Если функция двух переменных z - представлена в виде некоторой минимальной композиции $z(x,y)=S(B)(x,y)$ и $P_m(B_{m+1},\dots)=0$ - система дифференциально полиномиальных уравнений, которая представляет собой критерий существования B_m, то эта система нетривиальна в том смысле, что ни одно из ее неизвестных не может принимать произвольные значения. И при выполнении этих соотношений неизвестная B_m также не может быть произвольной.

Теорема 9:
(a) Пусть $z(x,y)$ - росток функции, голоморфной в окрестности точки p и обладающий минимальным представлением со схемой S и данными

B, т.е. $z(x,y) = S(B)(x,y)$. Тогда это представление продолжается вдоль почти всех путей, по которым продолжается z.
(b) Для каждой схемы S существует система дифференциально полиномиальных уравнений $d(S)(Z) = 0$, вычисляемая алгоритмически, такая что элемент аналитической функции z в области D обладает представлением со схемой S почти всюду в D тогда и только тогда, когда $d(S)(z) = 0$. При этом z обладает минимальным представлением с некоторой схемой $S' \prec S$.
(c) Набор функций B, который определяет минимальное представление со схемой S' определяется однозначно, с точностью до выбора конечного набора постоянных.
Доказательство: Пусть $\mathcal{R}$ - дифференциальная алгебра Ритта над полем рациональных чисел. Пусть в этой алгебре имеются два коммутирующих дифференцирования (∂_x, ∂_y). В качестве набора неизвестных рассмотрим набор $B = (B_1,\ B_2,\ B_3, \ldots, B_N, z)$ с указанным порядком. Запишем систему дифференциальных соотношений, которые эквивалентны тому, что z представима в виде $S(B)(x,y)$. Это делается на основе леммы 1, так же, как мы это сделали для схемы композиции сложности один. Каждое такое условие - это дифференциальный эквивалент того, что некая функция есть функция одного переменного, примененная к сумме двух функций следующего уровня. Например, B_1 это функция от $(B_2 + B_3)$. Это эквивалентно тому, что

$$\partial_y\ (B_2 + B_3)\ \partial_x\ z - \partial_x\ (B_2 + B_3)\ \partial_y\ z = 0$$

Записав все такие соотношения мы получим конечную систему дифференциальных соотношений $eq = 0$, которая порождает I - радикальный дифференциальный идеал в $\mathcal{R}$. Этот идеал обладает конечным дифференциальным базисом, согласованным с заданным порядком неизвестных. Этот базис распадается на следующие группы дифференциальных полиномов $(P, P_N, \ldots, P_1)$. Соотношения группы $P = P(z)$ содержат полиномы только от z, группы $P_N(B_N, z)$ только от B_N и z, группы $P_{N-1}(B_{N-1}, B_N, z)$ только от (B_{N-1}, B_N, z) и т.д., группы P_1 от полного набора неизвестных $(z, B_N, \ldots, B_1)$. Каждый полином группы P_N представляет собой алгебраическое дифференциальное уравнение на функцию B_N, которая зависит от одного независимого переменного, пусть x. При каждом фиксированном y мы получаем аналитическое обыкновенное дифференциальное уравнение. Выберем одно из этих соотношений и значение y так, чтобы это соотношение при этом y не обращалось в ноль тождественно по x. Разрешим полученное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно старшей производной функции B_N. Получаем, что там, где z голоморфна, почти всюду (т.е. вне собственного аналитического подмножества) B_N - аналитична, причем этот выбор B_N однозначен, с точностью до выбора конечного набора начальных условий. То, что полученное решение удовлетворяет всем оставшимся уравнениям группы P_N - это следствие соотношений P, которые представляют собой условие интегрируемости переопределенной системы на B_N. Затем переходим к системе P_{N-1} и т.д. Для восстановления текущей функции B_m мы имеем систему соотношений $P_m(B_m, B_{m+1}, \ldots, B_N, z) = 0$. Функции $(B_{m+1}, \ldots, B_N)$ уже определены однозначно, с точностью до выбора набора постоянных и аналитичны почти всюду, где голоморфна z. При этом функция B_m - это функция своего переменного $t = B_j(x, y) + B_{j+1}(x, y)$ для некоторого $j > m$. Если перейти от переменных (x, y) к переменным (x, t), то B_m становится функцией одного независимого переменного $B_m = B_m(t)$, а системы уравнений

$$P_m(B_m, B_{m+1}, \ldots) = 0, \quad P_{m+1}(B_{m+1}, \ldots, B_N) = 0, \ldots$$

становятся системами дифференциально-полиномиальных соотношений в переменных (x, t). Также как и выше, получаем аналитичность B_m почти всюду и единственность, с точностью до выбора конечного набора констант. То, что полученная B_m будет удовлетворять всем соотношениям этой группы следует из того, что уже полученные $(B_{m+1}, \ldots, B_N, z)$ удовлетворяют всем группам уравнений $P_j = 0$ при $j > m$ (условия интегрируемости). На последнем шаге, решая $P_1 = 0$ относительно B_1, мы получаем искомое представление z. При этом соотношения $d(S)(z) = P(z) = 0$ это критерий возможности декомпозиции данного вида. Если функция z не удовлетворяет этой системе, то для нее такой декомпозиции не существует. Если же удовлетворяет, то восстановление дается описанным процессом. Теорема доказана.

Следствие 10: Если росток z в некоторой точке аналитической функции Z имеет представление со схемой S, т.е. $z = S(B)(x, y)$, то это верно и для ростков, полученных из z аналитическим продолжением по почти всем путям.

В этом смысле мы говорим, что представлением со схемой S обладает аналитическая функция Z и что она имеет определенную сложность.

С каждой схемой композиции S связано несколько объектов.
- Класс $Cl(S)$ аналитических функций Z, допускающих представление со схемой S.
- Система полиномиально дифференциальных уравнений $d(S)(z) = 0$, определяющих функции из $Cl(S)$.
- Радикальный дифференциальный идеал $I(S) = \{d(S)\}$, для которого набор полиномов $d(S)(z)$ является базисом.

Вот список очевидных свойств.

Утверждение 11:
(a) $Z \in Cl(S)$ тогда и только тогда, когда $d(S)(z) = 0$ для некоторого ростка z функции Z.
(b) $Z \in Cl(S)$ тогда и только тогда, когда $d(S)(z) = 0$ для любого ростка z функции Z.
(c) $S_1 \prec S_2$ тогда и только тогда, когда $Cl(S_1) \subset Cl(S_2)$.
(d) $S_1 \prec S_2$ тогда и только тогда, когда $I(S_1) \supset I(S_2)$.

Список литературы

[1] J.F.Ritt, Differential algebra, American mathematical society, 1950, p.184.

[2] И.Капланский, Введение в дифференциальную алгебру, Москва, 1959, Издательство иностранной литературы, 85 с.

[3] V. K. Beloshapka, Analytic complexity of functions of two variables, Russian J. Math. Phys. 14 (3), 243–249, (2007).