Простые решения трёх уравнений математической физики

В. К. Белошапка

В работе рассмотрены три уравнения математической физики для функций двух переменных: теплопроводности, Лиувилля и Кортевега — де Фриза (КдФ). Для всех трёх уравнений получены полные списки простых решений, т. е. решений аналитической сложности, не превышающей единицы. Для уравнения теплопроводности все такие решения выражаются через интеграл ошибок (теорема 1) и представляют собой 4-параметрическое семейство, для уравнения Лиувилля это объединение 6-параметрического и 3-параметрического семейств элементарных функций (теорема 2), а для уравнения Кортевега — де Фриза список состоит из четырёх 3-параметрических семейств, содержащих элементарные и эллиптические функции (теорема 3).

Библиография: 7 названий. *УДК*: 517.55, 517.923, 514.74. *MSC2010*: 32A, 33C, 35A24.
Ключевые слова: аналитические функции, аналитическая сложность, дифференциальные полиномы, уравнения математической физики.

§ 1. Введение

Круг вопросов, связанных с представимостью аналитических функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных, обсуждался в ряде работ [1, 2]. Рассмотрим строго возрастающую иерархию классов сложности аналитических функций двух переменных $z(x, y)$, определяемых индуктивно на базе функции $(x+y)$

$$Cl_0 \subset Cl_1 \subset Cl_2 \subset \ldots \subset Cl_n \subset \ldots$$

Здесь Cl_0 — это функции одного переменного (x или y), им приписывается сложность $N(z)=0$, Cl_1 — это функции вида $c(a(x)+b(y))$, они имеют сложность $N(z)\leqslant 1$, далее Cl_{n+1} состоит из функций вида $C(A_n(x, y)+B_n(x, y))$, где C — функция одного переменного, а A_n и B_n — функции из Cl_n. Функции, попавшие в Cl_n и не попавшие в Cl_{n-1}, имеют сложность $N(z)=n$. Условие $N(z)\leqslant 1$ равносильно тому, что росток, локально представляющий z, удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$z'_x z'_y \left(z'''_{xxy} z''_y - z'''_{xyy} z'_x\right) + z''_{xy}\left((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}\right) = 0. \tag{1}$$

Эта однородная форма степени 4 является числителем дифференциально-рационального выражения $(\ln(z'_y/z'_x))''_{xy}$ (см. [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 17–01–00592а.

На совокупности ростков аналитических функций двух переменных действует псевдогруппа $\mathscr{G}=\{z(x,y)\to c\,(z(a(x),b(y)))\}$, где (a,b,c) — ростки непостоянных аналитических функций. Эта псевдогруппа сохраняет аналитическую сложность z, поэтому мы называем её *калибровочной*. В соответствии с общим определением стабилизатор функции $z(x,y)$ — Stab_z — состоит из таких наборов (a,b,c), что $c(z(a(x),b(y)))=z(x,y)$. Пусть d_z — размерность стабилизатора Stab_z. В [4] было показано, что если z — это функция двух переменных (т. е. если обе частные производные не равны нулю тождественно), то d_z может принимать ровно три значения: 0, 1 и 3. При этом $d_z=3$ только для функций сложности 1, т. е. эквивалентных $(x+y)$. В этом уникальность функций первого класса. Можно сказать, что первый класс состоит из таких функций z, что $d_z>1$.

Таким образом, поиск *простых решений* какого-либо уравнения, т. е. принадлежащих первому классу, можно рассматривать как поиск решений с более чем 1-мерной группой симметрий из $\mathscr{G}$. В [5] было получено описание простых решений уравнения Дирихле и волнового уравнения. Здесь мы разберём уравнения теплопроводности, Лиувилля и Кортевега — де Фриза.

§ 2. Уравнение теплопроводности

Пусть $z(x,y)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая уравнению теплопроводности вида
$$z'_y=z''_{xx}. \tag{2}$$
Если z — решение (2) сложности нуль, то эта функция либо постоянна, либо линейна по x. Наша цель — описать все решения уравнения теплопроводности, имеющие сложность один.

Пусть G — группа преобразований, действующая на функции следующим образом:
$$z(x,y)\to\delta z\big(\gamma\,(x-\alpha),\gamma^2(y-\beta)\big)+\varepsilon,$$
где $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$ — комплексные константы, причём γ и δ отличны от нуля. Ясно, что эта группа переводит решения уравнения теплопроводности в решения и не меняет сложности. Поэтому естественно наше описание давать с точностью до преобразований из G.

Запишем уравнение (2) для $z(x,y)=c(a(x)+b(y))$ (нижние индексы — это порядки производных):
$$a_1^2c_2+a_2c_1-b_1c_1=0,\quad\text{или}\quad \frac{c_2}{c_1}=-\frac{a_2-b_1}{a_1^2}.$$
Записывая условие, что c_2/c_1 — это функция от $(a(x)+b(y))$, получаем
$$-b_2a_1^2-a_3a_1b_1+2a_2^2b_1-2a_2b_1^2=0. \tag{3}$$
Пользуясь тем, что a и b непостоянны, объявим $a_1=A$ и $b_1=B$ новыми независимыми переменными, тогда $a_2=P(A)$, $b_2=Q(B)$ — новые неизвестные

функции, при этом $a_3 = P'(A)P(A)$ и соотношение (3) принимает вид

$$-Q(B)A^2 - \Big(\frac{d}{dA}P(A)\Big)P(A)AB + 2P(A)^2B - 2P(A)B^2 = 0.$$

Откуда

$$-Q(B) = 2\,\frac{P(A)B^2}{A^2} + \frac{P(A)\Big(A\frac{d}{dA}P(A) - 2P(A)\Big)B}{A^2} = mB + nB^2.$$

Поскольку Q не зависит от A, оба коэффициента правой части — как m при B, так и n при B^2 — постоянны. Таким образом, получаем два уравнения на $P(A)$:

$$\frac{P(A)}{A^2} = n, \quad \Big(A\frac{d}{dA}P(A) - 2P(A)\Big) = m.$$

Из первого следует, что $P(A) = nA^2$, подставляем во второе, получаем $m = 0$, и тем самым $Q(B) = -2nB^2$. Эти соотношения являются дифференциальными уравнениями на $a(x)$ и $b(y)$. Решая их, получаем

$$a(x) = -\frac{1}{n}\ln(C_1x + C_2), \quad b(y) = \frac{1}{2n}\ln(C_3y + C_4).$$

Тогда

$$t = a(x) + b(y) = \frac{1}{2n}\ln\frac{C_3y + C_4}{(C_1x + C_2)^2}.$$

Таким образом, мы видим, что интересующие нас решения уравнения теплопроводности $z(x, y)$, с точностью до преобразований из G, имеют вид $z(x, y) = f(y/x^2)$. Условие того, что $z(x, y) = f(y/x^2)$ удовлетворяет (2), после подстановки $y = tx^2$ приобретает вид

$$4\Big(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\Big)t^2 - \Big(\frac{d}{dt}f(t)\Big) + 6\Big(\frac{d}{dt}f(t)\Big)t = 0. \tag{4}$$

Вот непостоянные решения этого уравнения:

$$f(t) = C_1 + \operatorname{erf}\Big(\frac{1}{2\sqrt{t}}\Big)C_2.$$

В итоге получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Любое решение уравнения $z'_y = z''_{xx}$, имеющее аналитическую сложность единица, с точностью до преобразований из G имеет вид*

$$z(x, y) = \operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2\sqrt{y}}\Big),$$

где

$$\operatorname{erf}(T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^T e^{-t^2}dt$$

— интеграл, известный в теории вероятностей как интеграл или функция ошибок.

Если подействовать на полученную функцию с помощью преобразований из G, то мы получим следующее 4-параметрическое семейство:

$$\delta \operatorname{erf}\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{y-\beta}}\right)+\varepsilon.$$

Имеется утверждение, восходящее к С. В. Ковалевской (1875, см. [6]), что все аналитические (по обеим переменным) решения уравнения теплопроводности продолжаются до целых функций пространственной переменной x, показатель роста которых не превосходит двух. Отметим, что при любом значении y полученная нами функция $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right)$ — это целая функция порядка два. Таким образом, максимум сложности решения, с точки зрения скорости роста (порядок два), реализуется на функциях, имеющих минимальную для функций двух переменных сложность, равную единице.

§ 3. Уравнение Лиувилля

Рассмотрим уравнение Лиувилля, т. е. уравнение $z''_{xy}=e^z$. Как показал Лиувилль [7], все его решения имеют вид

$$z=\ln\left(2\frac{a'(x)b'(y)}{(a(x)+b(y))^2}\right). \tag{5}$$

Если говорить об аналитических решениях, то a и b здесь аналитичны. Из данной формулы сразу видно, что аналитическая сложность общего решения $N(z)$ не превосходит двух. Возникает вопрос об описании решений сложности один (простых решений).

Теорема 2. (*а*) *Функция вида* (5), *где a и b — аналитические функции, имеет сложность один в двух случаях*:

$$\text{(I)}\quad a(x)=\frac{kx+l}{mx+n},\quad b(y)=\frac{Ky+L}{My+N};$$
$$\text{(II)}\quad a(x)=ke^{\pm x}+l,\quad b(y)=Ke^{\pm y}-l.$$

Все постоянные произвольны при условии, что функции a и b определены и непостоянны. Расстановки знаков во втором случае в показателях экспонент в a и b независимы.

(*б*) *Во всех остальных случаях сложность* (5) *равна двум.*

Доказательство. Ясно, что у уравнения Лиувилля нет решений, зависящих лишь от одного переменного, т. е. решений сложности нуль. Наша ближайшая цель — найти все решения сложности один, т. е. найти все пары $(a(x), b(y))$, удовлетворяющие соотношению (1). Причём мы можем предполагать, что a и b непостоянны.

Подставляя (5) в (1), получаем дифференциальную дробь, чей числитель равен нулю (нижние индексы — это порядки производных)

$$-a_0^2a_1a_3b_2^2+a_0^2a_2^2b_1b_3-2a_0a_1a_3b_2^2b_0-6a_0a_2^2b_2b_1^2+2a_0a_2^2b_1b_3b_0+$$

$$+6a_0a_2b_2^2a_1^2-4a_0a_1^2b_1b_3a_2+4a_0a_1a_3b_2b_1^2-6a_1^4b_2^2+4a_1a_3b_1^2b_2b_0+$$
$$+4a_1^4b_1b_3+6a_2b_2^2a_1^2b_0-6a_2^2b_2b_1^2b_0-4a_1^2b_1b_3a_2b_0+6a_2^2b_1^4-$$
$$-4a_1a_3b_1^4-a_1a_3b_2^2b_0^2+a_2^2b_1b_3b_0^2=0, \qquad (6)$$

а знаменатель имеет вид $(a_2a_0+a_2b_0-2a_1^2)^2(b_2a_0+b_2b_0-2b_1^2)^2$. Нетрудно заметить, что последнее выражение не может тождественно обращаться в нуль.

Выражая из (6) b_3b_1, получим дифференциальную дробь, чей знаменатель равен $(a_2a_0+a_2b_0-2a_1^2)^2$ и не есть тождественный нуль. Записывая условие, что эта дифференциальная дробь не зависит от x, т. е. приравнивая к нулю производную по x, получаем

$$-a_2^2b_2a_0^2+a_0^2b_2a_1a_3+6a_0b_2a_2^3-3a_0b_2a_1a_2a_3-2a_0a_2a_1^2b_2-$$
$$-2a_0a_2^2b_2b_0+2a_0a_1a_3b_2b_0-2a_0a_1a_3b_1^2+2a_0a_2^2b_1^2-2b_0a_2a_1^2b_2-$$
$$-b_2a_1a_2b_0a_3+b_2a_1a_3b_0^2-a_2^2b_2b_0^2+2a_1^4b_2+6b_0b_2a_2^3-$$
$$-3a_1^2b_2a_2^2-2a_1a_3b_1^2b_0+2a_2^2b_1^2b_0+6a_1b_1^2a_2a_3+2a_2a_1^2b_1^2-9b_1^2a_2^3=0. \qquad (7)$$

Откуда, в частности, видно, что для решения общего положения, т. е. для (a,b), не удовлетворяющих этому соотношению, $N(z)=2$.

Выражая b_1^2/b_2 из (7), получим дробь, чей знаменатель

$$-2a_2^2b_0-6a_1a_2a_3-2a_2a_1^2+2a_1a_3b_0-2a_0a_2^2+2a_0a_1a_3+9a_2^3$$

может обратиться в нуль тождественно лишь при условии $a_2=0$. Приравнивая к нулю производную этой дроби по x, получаем выражение, которое представляет собой многочлен второй степени от b_0 со следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned}C_2 = 27a_1^2a_2^4a_3-8a_0a_1^5a_2-2a_0^2a_1^4a_3-3a_0^2a_2^4a_3-27a_1^3a_2^4-4a_1^7+18a_1^5a_2^2+\\ +7a_0^2a_2^2a_3a_1^2+2a_0^2a_1^5-6a_0a_2^3a_3a_1^2-4a_0a_1^4a_3a_2+16a_1^6a_3-\\ -4a_0^2a_2^2a_1^3+18a_0a_2^3a_1^3-30a_1^4a_2^2a_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_1 = 18a_2^3a_1^3+14a_0a_2^2a_3a_1^2-8a_0a_2^2a_1^3-6a_0a_2^4a_3-\\ -4a_0a_1^4a_3-4a_1^4a_3a_2-6\,a_2^3a_3a_1^2+4a_0a_1^5-8a_1^5a_2,\end{aligned}$$

$$C_0 = -2a_1^4a_3-3a_2^4a_3+7a_2^2a_3a_1^2+2a_1^5-4a_2^2a_1^3.$$

Для существования непостоянного $b_0=b(y)$ необходимо, чтобы все три коэффициента были тождественно равны нулю. Необходимым условием разрешимости системы $C_0=C_1=C_2=0$ относительно a_3 является равенство

$$a_2(a_1-a_2)(a_1+a_2)(-3a_2^2+2a_1^2)=0.$$

Решая дифференциальные уравнения, получаем, что для функции $a(x)$ имеются лишь следующие возможности:

$$(1)\ a(x)=\frac{kx+l}{mx+n}, \quad (2)\ a(x)=ke^{\pm x}+l.$$

Аналогично для $b(y)$:

$$(1)\ b(y)=\frac{Ky+L}{My+N},\quad (2)\ b(y)=Ke^{\pm y}+L.$$

Далее, выбирая из этих пар (a,b) те, которые удовлетворяют (6), получаем, что это пары двух типов:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)}\quad a(x)=\frac{kx+l}{mx+n},\quad b(y)=\frac{Ky+L}{My+N};\\
&\text{(II)}\quad a(x)=ke^{\pm x}+l,\quad b(y)=Ke^{\pm y}-l.
\end{aligned}$$

Причём в обоих случаях постоянные произвольны при условии, что функции a и b определены и непостоянны. Во втором случае знаки в показателях экспоненты в a и b независимы.

Это завершает доказательство теоремы. □

§ 4. Уравнение Кортевега — де Фриза

Пусть $z(x,y)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая уравнению Кортевега — де Фриза вида $z'_y=Az'''_{xxx}+Bzz'_x$, где A и B — ненулевые комплексные константы. Преобразование $z(x,y)\to kz(lx,y)$, не меняя сложности z, переводит это уравнение в уравнение $z'_y=l^3Az'''_{xxx}+lkBzz'_x$. Подобрав подходящие k и l, мы можем считать, что уравнение имеет вид

$$z'_y=zz'_x+z'''_{xxx}. \tag{8}$$

Приведём сразу формулировку полученной теоремы.

Теорема 3. *Все решения уравнения* (8) *аналитической сложности единица содержатся в следующих четырёх* 3*-параметрических семействах*:

$$\begin{aligned}
z_1&=\frac{l}{k}-12k^2\wp(kx+ly+m),\\
z_2&=\frac{l}{k}+12\frac{k^2}{\operatorname{ch}^2(kx+ly+m)}-4k^2,\\
z_3&=\frac{l}{k}-12\frac{k^2}{(kx+ly+m)^2},\\
z_4&=\frac{kx+l}{m-ky},
\end{aligned}$$

где $k\neq0$, l *и* m *— комплексные константы,* $\wp$ *— эллиптическая функция Вейерштрасса,* ch *— гиперболический косинус.*

Отсюда можно легко получить все решения, зависящие от одной переменной, т. е. сложности нуль.

Следствие. *Все решения уравнения* (8) *аналитической сложности нуль содержатся в следующих четырёх семействах*:

$$z_1=-12k^2\,\wp(kx+m),\quad z_2=\frac{12k^2}{\operatorname{ch}^2(kx+m)}-4k^2,\quad z_3=-\frac{12}{(x+m)^2},\quad z_4=m.$$

А. В. Домрин сообщил автору, что у него имеется гипотеза относительно скорости роста решений КдФ (см. также [6]). Чтобы её сформулировать, нужно записать решения в виде

$$z(x,y) = 12(\ln(\tau(x,y))''_{xx}.$$

Тогда гипотеза утверждает, что всякое локально определённое аналитическое по обеим переменным решение представимо в таком виде, причём функция τ при фиксированном y может быть продолжена как целая функция от x, которая имеет порядок роста, не превосходящий 3. Для наших четырёх решений получаем:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{l}{k} - 12k^2\wp(kx+ly+m), & \tau_1 &= \exp\left\{\frac{lx^2}{24k}\right\}\sigma(kx+ly+m),\\
z_2 &= \frac{l}{k} + 12\frac{k^2}{\operatorname{ch}^2(kx+ly+m)} - 4k^2, & \tau_2 &= \exp\left\{\frac{x^2(l-4k^3)}{24k}\right\}\operatorname{ch}(kx+ly+m),\\
z_3 &= \frac{l}{k} - 12\frac{k^2}{(kx+ly+m)^2}, & \tau_3 &= (kx+ly+m)\exp\left\{\frac{lx^2}{24k}\right\},\\
z_4 &= \frac{kx+l}{m-ky}, & \tau_4 &= \exp\left\{\frac{x^2(kx+3l)}{72(m-ky)}\right\},
\end{aligned}$$

где σ — это сигма-функция Вейерштрасса, а ch, как и выше, гиперболический косинус.

Поскольку $\sigma(t)$ — это целая функция порядка 2, то τ_1 всегда имеет порядок 2; далее, τ_2 при $l \neq 4k^3$ имеет порядок 2, а при $l = 4k^3$ — порядок 1; τ_3 при $l \neq 0$ имеет порядок 2, а при $l = 0$ — порядок 0; τ_4 всегда имеет порядок 3.

Всё дальнейшее содержание работы — это доказательство теоремы 3. Отметим, что доказательство — это разбор дерева возможностей. Каждая развилка определяется соблюдением или несоблюдением некоторого дифференциально полиномиального условия (дискриминантное множество). Весь разбор потребовал значительных вычислительных усилий с применением системы Maple.

Сформулируем следующее легко проверяемое утверждение.

Лемма 4. *Группа преобразований*

$$\mathscr{H} = \left\{z(x,y) \to k^2 z(k(x+C_1),\ k^3(y+C_2))\right\}, \quad k \neq 0,$$

переводит решения (8) *в решения и не меняет их аналитической сложности.*

Лемма 5. *Для любой пары* $(k \neq 0, l)$ *все решения* (8) *вида* $z = c(kx+ly)$ *содержатся в следующем списке*:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{l}{k} - 12k^2\wp(kx+ly+C),\\
z_2 &= \frac{l}{k} + 12\frac{k^2}{\operatorname{ch}^2(kx+ly+C)} - 4k^2,\\
z_3 &= \frac{l}{k} - 12\frac{k^2}{(kx+ly+C)^2}.
\end{aligned}$$

Отметим, что лемму 5 можно понимать как описание всех решений (8) вида $z=c(a(x)+b(y))$ при дополнительном условии $a''=b''=0$.

Доказательство. В силу леммы 4 достаточно разобрать случай решений вида $z=c(x+ly)$. Записывая (8) для такой функции и обозначая $t=x+ly$, получаем

$$c'''(t)+c(t)c'(t)+lc'(t)=0.$$

Если c непостоянна, тогда пусть $A=c(t)$ — новая независимая переменная, а $c'=P(A)$ — новая неизвестная функция. На P получаем уравнение

$$P''P+(P')^2+A+l=0.$$

Все решения этого дифференциального уравнения, за исключением тождественного нуля, имеют вид

$$(P(A))^2=Q(A)=-\frac{1}{3l^2}A^3+A^2+C_1A+C_2.$$

И если кубический многочлен $Q(A)$ не имеет кратных корней, то, совершив замену $c(t)=-12Z(t)+l$, мы увидим, что $Z(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(Z')^2=4Z^3-g_2Z-g_3,$$

т. е. $Z(t)=\wp(t)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса. Соответствующее решение для $z_1=c(x+ly)$ имеет вид

$$z_1=-12\wp(x+ly+C)+l.$$

Пусть многочлен $Q(A)$ имеет один двукратный корень:

$$Q(A)=-\frac{1}{3}(A-m)^2(A-n),$$

тогда, по теореме Виета, третий корень — это $n=(2m-3l)$. В этом случае дифференциальное уравнение на $c(t)$ имеет решение в элементарных функциях. После подстановки $t=x+ly$ получаем

$$z_2=-3(m-l)\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\sqrt{m-l}}{2}(x+ly+C)\right)-2m-3l.$$

Эта функция с точностью до переобозначения постоянных и преобразований из $\mathscr{H}$ совпадает с z_2 из формулировки леммы.

Наконец, пусть многочлен $Q(A)$ имеет корень кратности три, т. е.

$$Q(A)=-\frac{1}{3}(A-m)^3.$$

Из теоремы Виета получаем, что $m=l$. Решая уравнение, получаем

$$z_3=1-12\frac{1}{(x+ly+C)^2}.$$

Лемма 5 доказана. □

Непосредственно устанавливается справедливость следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 6. (1) *Все решения уравнения* $d_1(a)=a_3a_1-2a_2^2=0$ *распадаются на общие* $a(x)=m\ln(kx+l)$ *и особые* $kx+l$.

(2) *Все решения уравнения* $d_2(a)=a_1a_2a_4-a_1a_3^2-a_2^2a_3=0$ *распадаются на общие* $a(x)=m\ln(\cos(kx+l))+n$ *и особые* kx^2+lx+m.

Ослабим в лемме 5 условие $a''=b''=0$. А именно, будем искать решения (8) вида $z=c(a(x)+b(y))$, где линейна лишь одна из функций: либо $a''=0$, либо $b''=0$.

Лемма 7. (1) *Если* $z=c(a(x)+b(y))$ — *решение* (8), *то из* $a_2=0$ *следует, что* $b_2=0$, *и из* $b_2=0$ *следует, что* $a_2=0$.

(2) *Список из леммы* 5 *содержит все решения* (8) *вида* $z=c(a(x)+b(y))$ *при условии, что хотя бы одна из внутренних функций* a *или* b *линейна.*

Доказательство. Первый случай: пусть $a''\neq 0$, $b''=0$. Поскольку $b'\neq 0$, в этом случае функция z может быть записана как $z=c(a(x)+y)$. Записывая для этой функции уравнение (8), получаем

$$c_3a_1^3+3c_2a_1a_2+6c_0c_1a_1+c_1a_3+c_1=0. \tag{9}$$

При этом если мы положим $y=t-a(x)$, то c становится функцией переменного t, независимого от x. Выражая c_3 из (9) и записывая условие независимости от x, получаем

$$-3a_1^2c_2a_3+6a_1c_2a_2^2+2a_1a_2c_1c_0-a_4a_1c_1+3a_2c_1a_3+3a_2c_1=0. \tag{10}$$

При условии $d_1(a)=a_1a_3-2a_2^2\neq 0$ отсюда можно выразить c_2/c_1 и записать условие независимости от x. Получаем

$$\begin{gathered}(2a_4a_1^3a_2-2a_1^3a_3^2-2a_1^2a_2^2a_3)c_0-a_4^2a_1^3+3a_4a_1^2a_2a_3+6a_4a_1a_2^3+\\ +a_1^3a_3a_5-2a_1^2a_2^2a_5-3a_1^2a_3^3-6a_2^4a_3+3a_4a_1^2a_2-3a_1^2a_3^2-6a_2^4=0.\end{gathered}$$

Поскольку c непостоянна, отсюда следует, что

$$\begin{aligned}d_2(a)&=a_1a_2a_4-a_1a_3^2-a_2^2a_3=0,\\ d_3(a)&=a_1^3a_3a_5-a_4^2a_1^3-2a_1^2a_2^2a_5+3a_4a_1^2a_2a_3-3a_1^2a_3^3+\\ &\qquad+6a_4a_1a_2^3-6a_2^4a_3+3a_4a_1^2a_2-3a_1^2a_3^2-6a_2^4=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Если $d_1=0$, то, подставляя $a(x)=m\ln(kx+l)$ в (9), получаем, что $c_1=0$. Противоречие. Пусть $d_2=d_3=0$. При этом d_2 имеет дифференциальный порядок 4, а d_3 имеет дифференциальный порядок 5. Дифференцируем d_2 по x, получаем соотношение 5-го порядка $dd_2=0$. Исключаем a_5 из d_3 и dd_2, получаем соотношение порядка четыре $\mathrm{res}=0$, где res — это результант d_3 и dd_2 по a_5. Исключаем a_4 из $\mathrm{res}=0$ и $d_2=0$. Получаем $-3a_1^2a_2^5(a_1a_3-2a_2^2)=0$, что возвращает нас к случаю $d_1=0$.

Второй случай: пусть $b''\neq 0$, $a''=0$. Поскольку $a'\neq 0$, в этом случае функция z может быть записана как $z=c(x+b(y))$. Записывая для этой функции уравнение (8) и подставляя $x=t-b(y)$, получаем

$$c'''(t)+c(t)c'(t)+c'(t)b'(y)=0.$$

Дифференцируя это соотношение по y, получаем $c'(t)b''(y)=0$. Противоречие. Этим завершается доказательство леммы 7. □

Лемма 8. *Решения* (8) *вида* $z(x,y)=c(a(x)+b(y))$ *с дополнительным условием* $d_1(a)=0$ *имеют вид*

$$z=\frac{kx+l}{m-ky}.$$

Доказательство. Преобразованиями из группы $\mathscr{H}$ всякое решение вида

$$z(x,y)=c(m\ln(kx+l)+b(y))$$

можно перевести в решение вида $z(x,y)=c(\ln(x)+b(y))$. Подставим это выражение в (8), получим

$$c_1b_1x^3+c_0c_1x^2+2c_1-3c_2+c_3=0.$$

Выразим c_3 и запишем условие, что это функция от $\ln(x)+b(y)$, получим

$$3b_1^2x-b_2x+2c_0b_1=0.$$

Дифференцируя это соотношение по x, получим

$$3b_1^2x-b_2x+2c_1b_1=0,$$

откуда следует, что $c_1=c_0$, т. е. $c(t)=\exp(t+\lambda)$. Подставляя

$$z=\exp(\ln(x)+b(y)+\lambda)$$

в исходное уравнение, получаем

$$b'(y)=\exp(\lambda)\exp(b(y)).$$

Откуда $b(y)=\lambda+\ln(C-y)$. В результате, с учётом преобразований из $\mathscr{H}$, получаем

$$z=\frac{kx+l}{m-ky}.$$

Лемма 8 доказана. □

Лемма 9. *Не существует такого решения* (8) *вида* $z(x,y)=c(a(x)+b(y))$, *что* $a_2\neq0$, $b_2\neq0$, $d_2(a)=0$.

Доказательство. В соответствии с леммой 6 решения $d_2(a)=0$ распадаются на два случая: общий $a(x)=m\ln(\cos(kx+l))+n$ и особый $a(x)=kx^2+lx+m$. Рассмотрим сначала особый.

Преобразованиями из $\mathscr{H}$ решение вида $z=c(kx^2+lx+m+b(y))$ можно перевести в решение вида $z=c(x^2+b(y))$. Подставим его в (8), получим

$$8c_3x^3+2c_0c_1x+12c_2x-c_1b_1=0.$$

Выражая c_3 и записывая, что это функция от $x^2+b(y)$, получим

$$-2b_2c_1x^2+4c_0c_1b_1x+24c_2xb_1-3c_1b_1^2=0.$$

Выражая c_2/c_1 и записывая, что это функция от $x^2+b(y)$, получим

$$-4b_3b_1x^4+4b_2^2x^4-4b_2b_1^2x^2-3b_1^4=0.$$

Откуда следует, что $b_1=0$. Противоречие.

Пусть теперь $a(x)=m\ln(\cos(kx+l))+n$. Соответствующее решение преобразованиями из $\mathscr{H}$ можно перевести в решение вида $z=c(\ln(\cos x)+b(y))$. Подставим его в (8), получим

$$\begin{aligned}-2\sin^3(x)c_1c_0b_1-3\sin^2(x)\cos(x)c_1b_1^2-2\sin(x)\cos^2(x)c_1c_0b_1-\\ -3\cos^3(x)c_1b_1^2+b_2\sin^2(x)\cos(x)c_1+6c_2b_1\sin^3(x)-\\ -4\sin^3(x)c_1b_1+6c_2\sin(x)\cos^2(x)b_1-4c_1b_1\cos^2(x)\sin(x)=0.\end{aligned}$$

Выражая c_3 и записывая, что это функция от $\ln(\cos x)+b(y)$, получим

$$\begin{aligned}-2\sin^3(x)c_1c_0b_1-3\sin^2(x)\cos(x)c_1b_1^2-2\sin(x)\cos^2(x)c_1c_0b_1-\\ -3\cos^3(x)c_1b_1^2+b_2\sin^2(x)\cos(x)c_1+6c_2b_1\sin^3(x)-\\ -4\sin^3(x)c_1b_1+6c_2\sin(x)\cos^2(x)b_1-4c_1b_1\cos^2(x)\sin(x)=0.\end{aligned}$$

Выражая c_2/c_1 и записывая, что это функция от $\ln(\cos x)+b(y)$, получим

$$\begin{aligned}-3\sin^4(x)b_1^4-6\sin^2(x)\cos^2(x)b_1^4-3\cos^4(x)b_1^4+\\ +4b_2\sin^4(x)b_1^2+2b_2\sin^2(x)\cos^2(x)b_1^2+b_2^2\sin^4(x)-b_3\sin^4(x)b_1=0.\end{aligned}$$

Откуда следует, что $b_1=0$. Противоречие. Лемма 9 доказана. □

Переходя к рассмотрению общего случая, мы предполагаем, что a_2, $d_1(a)$, $d_2(a)$, b_2, c_1 отличны от тождественного нуля. Запишем уравнение (8) для $z(x,y)=c(a(x)+b(y))$:

$$a_1^3c_3+3a_1a_2c_2+a_1c_0c_1+a_3c_1+b_1c_1=0 \tag{12}$$

и выразим из (12) c_3. Условие, что некоторая функция двух переменных $\varphi(x,y)$ представима в виде $\rho(a(x)+b(y))$, где ρ — функция одного переменного, — это $V\varphi=0$, где V — векторное поле вида

$$V=b'(y)\frac{\partial}{\partial x}-a'(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Записывая это условие для полученного выражения для c_3, получаем

$$\begin{aligned}-3a_1^2a_3b_1c_2+6a_1a_2^2b_1c_2+2a_1a_2b_1c_0c_1+a_1^2b_2c_1-\\ -a_1a_4b_1c_1+3a_2a_3b_1c_1+3a_2b_1^2c_1=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Так как $d_1=a_3a_1-2a_2^2\neq0$, из (13) можно выразить c_2/c_1. Запишем условие $V(c_2/c_1)=0$ и получим

$$\begin{aligned}(-2a_1^3a_2a_4b_1^3+2a_1^3a_3^2b_1^3+2a_1^2a_2^2a_3b_1^3)c_0-b_3a_3a_1^5b_1+\\ +a_3b_2^2a_1^5+2b_3a_2^2a_1^4b_1-2a_2^2b_2^2a_1^4-a_4b_2a_1^4b_1^2+\\ +a_2a_3b_2a_1^3b_1^2-a_5a_3a_1^3b_1^3+a_4^2a_1^3b_1^3+4a_2^3b_2a_1^2b_1^2+\end{aligned}$$

$$+2a_5a_2^2a_1^2b_1^3-3a_2a_3a_4a_1^2b_1^3-3a_2a_4a_1^2b_1^4+3a_3^3a_1^2b_1^3+$$
$$+3a_3^2a_1^2b_1^4-6a_2^3a_4a_1b_1^3+6a_2^4a_3b_1^3+6a_2^4b_1^4=0.$$

Поскольку $d_2=a_1a_2a_4-a_1a_3^2-a_2^2a_3\neq 0$, выражаем отсюда c_0, записываем $V(c_0)=0$ и получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Eq}_4 = a_1^7a_2a_4b_1^2b_4-4a_1^7a_2a_4b_1b_2b_3+3a_1^7a_2a_4b_2^3-a_1^7a_3^2b_1^2b_4+\\
+4a_1^7a_3^2b_1b_2b_3-3a_1^7a_3^2b_2^3-a_1^6a_2^2a_3b_1^2b_4+4a_1^6a_2^2a_3b_1b_2b_3-\\
-3a_1^6a_2^2a_3b_2^3+a_1^6a_2a_5b_1^3b_3-a_1^6a_2a_5b_1^2b_2^2-a_1^6a_3a_4b_1^3b_3+\\
+a_1^6a_3a_4b_1^2b_2^2-3a_1^5a_2a_3^2b_1^3b_3+3a_1^5a_2a_3^2b_1^2b_2^2+a_1^5a_3a_5b_1^4b_2-\\
-a_1^5a_4^2b_1^4b_2+2a_1^4a_2^2a_5b_1^4b_2-6a_1^4a_2a_3a_4b_1^4b_2-a_1^4a_2a_4a_6b_1^5+\\
+a_1^4a_2a_5^2b_1^5+2a_1^4a_3^3b_1^4b_2+a_1^4a_3^2a_6b_1^5-2a_1^4a_3a_4a_5b_1^5+a_1^4a_4^3b_1^5+\\
+3a_1^3a_2^3a_4b_1^4b_2-4a_1^3a_2^2a_3^2b_1^4b_2+a_1^3a_2^2a_3a_6b_1^5-6a_1^3a_2a_3^2a_5b_1^5+\\
+8a_1^3a_2a_3a_4^2b_1^5-3a_1^3a_3^3a_4b_1^5-3a_1^2a_2^4a_3b_1^4b_2-6a_1^2a_2^3a_4^2b_1^5+\\
+3a_1^2a_2^3a_5b_1^6-3a_1^2a_2^2a_3^2a_4b_1^5-12a_1^2a_2^2a_3a_4b_1^6+9a_1^2a_2a_3^4b_1^5+\\
+9a_1^2a_2a_3^3b_1^6+12a_1a_2^4a_3a_4b_1^5+6a_1a_2^4a_4b_1^6-6a_1a_2^3a_3^3b_1^5-\\
-6a_1a_2^3a_3^2b_1^6-6a_2^5a_3^2b_1^5-6a_2^5a_3b_1^6=0.\end{aligned}$$

Для существования $c=c_0$, удовлетворяющего (12), недостаточно того, чтобы выражения, полученные для $c_3=\varphi$, $c_2/c_1=\chi$, $c_0=\psi$, были функциями $a(x)+b(y)$. Для достаточности нужно ещё два условия согласованности:

$$\mathrm{Eq}_5=\chi-\left(\frac{\varphi'_y}{b'}\right)'_y\Big/\varphi'_y=0, \quad \mathrm{Eq}_6=\psi-\frac{1}{b'}\left(\frac{1}{b'}\left(\frac{1}{b'}\varphi'_y\right)'_y\right)'_y=0,$$

которые обеспечивают то, что c_1, c_2, c_3 являются последовательными производными c_0. Уравнение $\mathrm{Eq}_4=0$ имеет дифференциальный порядок $(6,4)$, т. е. 6 по a и 4 по b, $\mathrm{Eq}_5=0$ имеет порядок $(5,5)$ и $\mathrm{Eq}_6=0$ имеет порядок $(5,6)$.

Таким образом, нами доказана следующая

Лемма 10. *Для пары $(a(x), b(y))$ таких функций, что $a_2\neq 0$, $d_1(a)\neq 0$, $b_2\neq 0$, найдётся такая непостоянная функция $c(t)$, что $z=c(a(x)+b(y))$ — решение* (8) *в том и только том случае, если* $\mathrm{Eq}_4(a,b)=\mathrm{Eq}_5(a,b)=\mathrm{Eq}_6(a,b)=0$.

Сделаем в Eq_4 замену $a_1=A$, $a_2=P(A)$, $b_1=B$, $b_2=Q(B)$, где A и B — новые независимые переменные, а $P(A)$ и $Q(B)$ — новые неизвестные функции. Выражения d_1 и d_2 в новых переменных принимают вид:

$$d_1=P(A)(AP'(A)-2A), \quad d_2=P^3(A)(AP''(A)-P'(A)).$$

Выражения Eq_4, Eq_5, Eq_6 в новых переменных обозначим через EQ_4, EQ_5, EQ_6. Отметим, что EQ_4 имеет по Q дифференциальный порядок 2, EQ_5 — 3, EQ_6 — 4. Обозначим через Res_1 результант EQ_4 и $(\mathrm{EQ}\,4)'_A$ по переменной Q'', а через Res_2 — результант EQ_4 и $(\mathrm{EQ}\,4)''_{AA}$ по переменной Q''. Пусть далее

$\mathrm{Res}=R(P,Q)$ — это результант Res_1 и Res_2 по переменной Q'. Это выражение имеет вид

$$\mathrm{Res}(P,Q)=L(P)Q+M(P)B+N(P)B^2,$$

где $L(P)$, $M(P)$, $N(P)$ — дифференциальные полиномы порядков 5, 5 и 6. Из равенства $\mathrm{Res}(P,Q)=0$ сразу получаем, что имеет место следующая альтернатива.

Лемма 11. *Если $(P(A),Q(B))$ — решение*

$$\mathrm{EQ}_4(P(A),Q(B))=\mathrm{EQ}_5(P(A),Q(B))=\mathrm{EQ}_6(P(A),Q(B))=0,$$

то либо $Q(B)=B(mB+n)$, где m и n постоянные, либо $L(P(A))=M(P(A))=$ $=N(P(A))=0$.

Рассмотрим сначала первую возможность, т. е. пусть $Q(B)=B(mB+n)$. Условие $b_2\neq 0$ означает, что Q не есть тождественный нуль и, следовательно, хотя бы одна из констант отлична от нуля. При этом выполнено условие $Q'(B)=2mB+n\neq 0$.

Подставим $Q(B)=B(mB+n)$ в EQ_4, EQ_5 и EQ_6. Получаем дифференциальные полиномы, зависящие от P, которые мы обозначим E_4, E_5, E_6. Имеем:

$$\begin{aligned}E_4={}&A^7Bm^3p_2+A^7m^2np_2-A^6Bm^3p_1+A^6Bm^2p_0p_3+3A^6Bm^2p_1p_2-A^6m^2np_1+\\&+A^6mnp_0p_3+3A^6mnp_1p_2-3A^5Bm^2p_1^2+A^5Bmp_0p_1p_3-A^5Bmp_0p_2^2+\\&+2A^5Bmp_1^2p_2-A^4p_0^4p_2p_4+A^4p_0^4p_3^2-A^4p_0^3p_1p_2p_3-3A^4p_0^3p_2^3-3A^5mnp_1^2+\\&+A^5np_0p_1p_3-A^5np_0p_2^2+2A^5np_1^2p_2+2A^4Bmp_0^2p_3+2A^4Bmp_0p_1p_2-\\&-2A^4Bmp_1^3+A^3p_0^4p_1p_4+A^3p_0^3p_1^2p_3+12A^3p_0^3p_1p_2^2+2A^4np_0^2p_3+\\&+2A^4np_0p_1p_2-2A^4np_1^3+3A^3Bmp_0^2p_2-A^3Bmp_0p_1^2-6A^2p_0^4p_2^2-\\&-15A^2p_0^3p_1^2p_2+3A^3np_0^2p_2-A^3np_0p_1^2-3A^2Bmp_0^2p_1+3A^2Bp_0^3p_3+\\&+12Ap_0^4p_1p_2+6Ap_0^3p_1^3-3A^2np_0^2p_1+6ABp_0^3p_2-6p_0^4p_1^2-6Bp_0^3p_1=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_5={}&\big(A^5m^2p_1-2A^4m^2p_0+A^4mp_0p_2+A^4mp_1^2-A^3mp_0p_1-4A^2mp_0^2+\\&+3A^2p_0^2p_2-6p_0^3\big)\big(A^4Bm^2+3A^3mp_0^2p_2+A^4mn+A^3Bmp_1-3A^2mp_0^2p_1+\\&+A^2p_0^3p_3+3A^2p_0^2p_1p_2+A^3np_1+2A^2Bmp_0-3Ap_0^3p_2-3Ap_0^2p_1^2+\\&+2A^2np_0+3p_0^3p_1+3Bp_0^2\big)=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_6={}&\big(A^5m^2p_1-2A^4m^2p_0+A^4mp_0p_2+A^4mp_1^2-A^3mp_0p_1-4A^2mp_0^2+\\&+3A^2p_0^2p_2-6p_0^3\big)\big(-2A^5m^2p_0^2p_2+A^5Bm^2p_1+2A^4m^2p_0^2p_1+A^5mnp_1-\\&-2A^4Bm^2p_0+A^4Bmp_0p_2+A^4Bmp_1^2-6A^3mp_0^3p_2+A^3p_0^3p_1p_3-A^3p_0^3p_2^2+\\&+2A^3p_0^2p_1^2p_2-2A^4mnp_0+A^4np_0p_2+A^4np_1^2-A^3Bmp_0p_1+6A^2mp_0^3p_1-\\&-2A^2p_0^4p_3-7A^2p_0^3p_1p_2-2A^2p_0^2p_1^3-A^3np_0p_1-4A^2Bmp_0^2+A^2Bp_0^2p_2+\\&+6Ap_0^4p_2+8Ap_0^3p_1^2-4A^2np_0^2+2ABp_0^2p_1-6p_0^4p_1-6Bp_0^3\big)=0.\end{aligned}$$

Полином E_4 неприводим, а $E_5=e\cdot e_5$ и $E_6=e\cdot e_6$, где e — общий множитель:

$$e=A^5m^2p_1-2A^4m^2p_0+A^4mp_0p_2+A^4mp_1^2-A^3mp_0p_1-4A^2mp_0^2+3A^2p_0^2p_2-6p_0^3,$$

который имеет дифференциальный порядок 2, а e_5 и e_6 имеют порядок 3.

Пусть $e\neq 0$, тогда $E_4=e_5=e_6=0$. Исключаем p_3 из e_5 и e_6, получаем

$$R_{56}=2A^3m^2p_0+3A^2mp_0p_1-A^2Bm+Ap_0^2p_2+Ap_0p_1^2-A^2n-p_0^2p_1-Bp_0=0.$$

Дифференцируя по A, получаем

$$(R_{56})'_A=2A^3m^2p_1+6A^2m^2p_0+3A^2mp_0p_2+3A^2mp_1^2+6Amp_0p_1+\\+Ap_0^2p_3+4Ap_0p_2p_1+Ap_1^3-2ABm-p_0p_1^2-2An-Bp_1=0.$$

Исключая p_3 из уравнений $(R_{56})'_A=0$ и $e_5=0$, получаем $r_1=0$, исключая p_3 из уравнений $(R_{56})'_A=0$ и $e_6=0$, получаем $r_2=0$. Исключая p_2 из уравнений $R_{56}=0$ и $r_1=0$, получаем $r_3=0$. Наконец, исключая p_1 из r_1 и R_{56}, получаем, что

$$A^3p_0^2(Ap_1-2p_0)(mA^2+p_0)(Bm+n)=0,$$

т. е. $P(A)=-mA^2$. Но при этом, подставляя эту функцию в $e(P)$, получаем нуль. Таким образом, решение системы $E_4=E_5=E_6=0$ сводится к решению $E_4=e=0$. Итак, имеем следующий результат.

Лемма 12. (*а*) *Все решения системы* $E_4=E_5=E_6=0$ *имеют вид*

$$P(A)=-lA^2,\quad Q(B)=B(mB+n).$$

(*б*) *Соответствующие решения* $\mathrm{Eq}_4=\mathrm{Eq}_5=\mathrm{Eq}_6=0$ *имеют вид*

$$a(x)=l\ln(x+C_1)+c_2,\quad b(y)=-\frac{1}{m}\ln(m\exp(y+C_3)-1)+C_4.$$

(*в*) *Не существует непостоянных функций* $c(t)$, *таких что*

$$z=c(a(x)+b(y))$$

— *решение* (8).

Изучим оставшуюся возможность. Ищем решение системы $L(P)=M(P)==N(P)$. Исключая p_5 из $L=0$ и $M=0$, получаем приводимый полином дифференциального порядка 4. Те его множители, которые могут обращаться в нуль, обозначим R_1, R_2 и R_3. Они имеют следующий вид:

$$R_1=2A^3p_1p_3-3A^3p_2^2-4A^2p_0p_3+12A^2p_1p_2-12Ap_0p_2-9Ap_1^2+12p_0p_1=0;$$

$$R_2=A^5p_0p_2p_4-A^5p_0p_3^2+A^5p_1p_2p_3+3A^5p_2^3-A^4p_0p_1p_4-3A^4p_1^2p_3-\\-6A^4p_1p_2^2+8A^3p_0p_1p_3-6A^3p_0p_2^2-3A^3p_1^2p_2-8A^2p_0^2p_3+\\+36A^2p_0p_1p_2+6A^2p_1^3-24Ap_0^2p_2-30Ap_0p_1^2+24p_0^2p_1=0;$$

$$R_3=A^3p_0p_2p_4-A^3p_0p_3^2+A^3p_1p_2p_3+3A^3p_2^3-A^2p_0p_1p_4-\\-A^2p_1^2p_3-9A^2p_1p_2^2+9Ap_1^2p_2-3p_1^3=0.$$

Полином R_1 имеет дифференциальный порядок 3, полиномы R_2 и R_3 имеют порядок 4.

Лемма 13. (*а*) *Не существует нетривиальных решений системы* $L=M=N=R_1=0$.

(*б*) *Не существует нетривиальных решений системы* $L=M=N=R_2=0$.

(*в*) *Не существует нетривиальных решений системы* $L=M=N=R_3=0$.

Доказательство. Доказательство леммы — это цепочка исключений переменных с помощью вычисления результантов, а также удаления в полученных результантах тривиальных множителей.

1. Из уравнений $L=0$ и $(R_1)''_{AA}=0$ исключаем p_5, то, что получилось, обозначим $H=0$.

2. Из уравнений $H=0$ и $(R_1)'_A=0$ исключаем p_4, то, что получилось, обозначим $H_1=0$.

3. Из уравнений $H_1=0$ и $R_1=0$ исключаем p_3, то, что получилось, обозначим $H_2=0$. При этом

$$H_2 = A^4p_0p_2^2+6A^4p_1^2p_2-30A^3p_0p_1p_2-10A^3p_1^3+ \\ +32A^2p_0^2p_2+53A^2p_0p_1^2-80Ap_0^2p_1+32p_0^3 = 0.$$

4. Из уравнений $H_1=0$ и $(H_2)'_A=0$ исключаем p_3, то, что получилось, обозначим $H_3=0$.

5. Из уравнений $H_3=0$ и $H_2=0$ исключаем p_2, то, что получилось, обозначим $H_4=0$. При этом

$$H_4 = -70\,253\,568A^9p_1^9+1\,395\,283\,968A^8p_0p_1^8-12\,200\,444\,928A^7p_0^2p_1^7+ \\ +61\,620\,793\,344A^6p_0^3p_1^6-197\,967\,904\,768A^5p_0^4p_1^5+419\,085\,593\,600A^4p_0^5p_1^4- \\ -583\,726\,145\,536A^3p_0^6p_1^3+514\,831\,679\,488A^2p_0^7p_1^2-260\,220\,846\,080Ap_0^8p_1+ \\ +57\,230\,950\,400p_0^9 = 0.$$

6. Из уравнений $(H_4)'_A=0$ и $H_2=0$ исключаем p_2, то, что получилось, обозначим $H_5=0$. При этом

$$H_5 = 1\,103\,212\,141\,722\,206\,208A^{19}p_1^{19}- \\ -47\,127\,416\,742\,629\,867\,520A^{18}p_0p_1^{18}+ \\ +949\,249\,959\,445\,420\,572\,672A^{17}p_0^2p_1^{17}- \\ -11\,983\,786\,221\,719\,720\,558\,592A^{16}p_0^3p_1^{16}+ \\ +106\,306\,707\,637\,771\,054\,350\,336A^{15}p_0^4p_1^{15}- \\ -704\,030\,499\,159\,252\,418\,953\,216A^{14}p_0^5p_1^{14}+ \\ +3\,609\,492\,713\,687\,931\,533\,918\,208A^{13}p_0^6p_1^{13}- \\ -14\,658\,410\,173\,981\,465\,507\,790\,848A^{12}p_0^7p_1^{12}+ \\ +47\,843\,598\,571\,848\,865\,754\,906\,624A^{11}p_0^8p_1^{11}-$$

$$
\begin{aligned}
&-126\,586\,196\,852\,641\,571\,546\,333\,184A^{10}p_0^9p_1^{10}+\\
&\quad+272\,561\,521\,628\,794\,150\,809\,763\,840A^9p_0^{10}p_1^9-\\
&\qquad-477\,462\,984\,612\,843\,785\,103\,081\,472A^8p_0^{11}p_1^8+\\
&\qquad\quad+677\,459\,192\,105\,080\,195\,792\,240\,640A^7p_0^{12}p_1^7-\\
&\qquad\qquad-771\,477\,939\,339\,944\,949\,012\,496\,384A^6p_0^{13}p_1^6+\\
&\qquad\qquad\quad+694\,548\,641\,621\,792\,306\,115\,903\,488A^5p_0^{14}p_1^5-\\
&\qquad\qquad\qquad-482\,838\,964\,862\,957\,556\,336\,689\,152A^4p_0^{15}p_1^4+\\
&\qquad\qquad\qquad\quad+249\,801\,920\,472\,144\,918\,488\,285\,184A^3p_0^{16}p_1^3-\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad-90\,467\,314\,786\,526\,477\,326\,221\,312A^2p_0^{17}p_1^2+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad+20\,443\,125\,582\,599\,456\,471\,121\,920Ap_0^{18}p_1-\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-2\,166\,876\,439\,506\,913\,643\,724\,800p_0^{19}=0.
\end{aligned}
$$

7. Результант H_4 и H_5 относительно p_1 после деления на $(Ap_0)^{171}$ — это 277-значное целое число. Пункт (а) леммы доказан. Аналогично доказываются пункты (б) и (в). □

Этим доказательство теоремы 3 завершается.

Отметим, что решения уравнения Кортевега — де Фриза, фигурирующие в списке теоремы 3, были известны, в том или ином виде, и ранее [6]. Но теорема 3 утверждает невозможность его расширения в рамках функций сложности один.

Работая над статьёй, автор обсуждал её содержание с А. В. Доминым, который сделал несколько ценных замечаний, а С. В. Смирнов познакомил автора с уравнением Лиувилля, за что автор им благодарен.

Список литературы

[1] *Ostrowski A.* Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen // Math. Z. 1920. Bd. 8, S. 241–298.

[2] *Витушкин А. Г.* 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы // УМН. 2004. Т. 59, вып. 1(355). С. 11–24.

[3] *Beloshapka V. K.* Analytic complexity of functions of two variables // Russ. J. Math. Phys. 2007. Vol. 14, № 3. P. 243–249.

[4] *Beloshapka V. K.* Stabilizer of a function in the gauge group // Russ. J. Math. Phys. 2017. Vol. 24, № 2. P. 148–152.

[5] *Белошапка В. К.* Семимерное семейство простых гармонических функций // Матем. заметки. 2015. Т. 98, вып. 6. С. 803–808.

[6] *Домрин А. В.*, Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // Изв. РАН. Сер. Матем. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 23–44.

[7] *Liouville J.* Sur l'équation aux différences partielles $\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\,\partial v} \pm \frac{\lambda}{2a^2}=0$ // J. Math. Pure Appl. Ser. 1. 1853. Vol. 18. P. 71–72.

Валерий Константинович Белошапка
Мехмат МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: `vkb@strogino.ru`

Представлено в редакцию 19.10.2017/19.02.2018