Об интегрировании функций сложности один

Белошапка В.К.

16.11.2018

УДК 517.55, 517.923, 514.74

Аннотация

Описаны функции первого класса аналитической сложности, имеющие первообразные той же сложности.

[1]

На заре дифференциальной алгебры в работах Лиувилля и других классиков [1],[2] обсуждался вопрос об элементарности первообразных элементарных функций. В данной работе обсуждается вполне аналогичный вопрос, только класс элементарных функций одного переменного заменяется на класс аналитических функций двух переменных сложности один. Этот класс состоит из функций вида $z(x,y) = c(a(x)+b(y))$, где (a,b,c) - непостоянные аналитические функции одного переменного. Это самый простой класс в иерархии, описанной в [3], функции этого класса обладают некоторым уникальным свойством [4].

Правило дифференцирования сложной функции позволяет заключить, что для аналитической функции двух переменных $z(x,y)$ сложности n её частная производная z'_x имеет сложность не выше, чем $2\,n$. Если бы вместо неравенств в этом утверждении стояло равенство, то можно

[1]Механико-математический факультет, МГУ,
Воробьевы горы, 119991 Москва, Россия, vkb@strogino.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 17-01-00592 а и 18-51-41011 Узб т

было бы утверждать, что неопределенный интеграл (первообразная по какому-то переменному) функции сложности $2\,n$ это функция сложности n. Проблема в том, что формально сложное выражение, которым является производная сложной функции, может иметь низкую аналитическую сложность. Это означает, что при интегрировании сложность может расти. В связи с этим можно задать несколько вопросов, ответы на которые автору не известны.

Пусть $N(z)$ - сложность функции $z(x, y)$. Для аналитической функции z это число не зависит от точки и ростка [5].

Вопрос: Возможно ли, что первообразная функции конечной сложности имеет бесконечную сложность?

$$N(z) < \infty, \quad \text{а} \quad N(\int z(x, y)\, d\,x) = \infty$$

Частный случай этого вопроса для $N(z) = 1$. Возможно ли, что первообразная функции сложности один имеет бесконечную сложность?

$$N(\int c(a(x) + b(y))\, d\,x) = \infty$$

При этом отметим, что для функции сложности ноль ответ очевиден. Действительно, пусть $z = a(x)$, тогда $\int z\; dx = A(x)$ имеет ту же сложность ноль, а если $z = b(y)$, то $\int z\; dx = b(y)\,x + \beta(y)$ имеет сложность не выше чем два.

В данной работе мы даем ответ на следующий, более простой, вопрос. Для каких функций первого класса ее интеграл имеет такую же сложность, т.е. сложность один?

Рассмотрим функцию сложности один, т.е. $z(x, y) = c(a(x)+b(y))$, где (a, b, c) - не постоянны. Дифференцируя z по x, получаем

$$w(x, y) = z'_x = c'(a(x) + b(y))\, a'(x).$$

Функция w имеет сложность не выше двух. Пусть её сложность не превосходит единицы. Это (см.[?]) означает, что

$$\delta(z) = (\ln(\frac{z'_x}{z'_y}))''_{xy} = 0. \tag{1}$$

Записывая полученное соотношение получаем.

$$Eq = -c_4{a_1}^2a_2{c_2}^2c_1 + 2\,{a_1}^2{c_3}^2a_2c_2c_1 - {a_1}^2c_3a_2{c_2}^3 - a_1c_3{c_2}^2a_3c_1 + a_1{c_2}^4a_3 \\ - c_4{a_2}^2c_2{c_1}^2 + {c_3}^2{a_2}^2{c_1}^2 + 3\,c_3{a_2}^2{c_2}^2c_1 - 3\,{a_2}^2{c_2}^4 = 0 \tag{2}$$

Этот дифференциальный полином представляет собой линейную комбинацию дифференциальных мономов от производных c с первой по четвертую с коэффициентами, представляющими мономы от производных a с первой по третью.

Подставляя в $c(a(x) + b(y)$ вместо $y = b^{-1}(t - (a(x))$ получаем $c(t)$. Таким образом мы можем рассматривать a и c, а также их производные, как функции разных независимых переменных $a(x)$ и $c(t)$.

Случай A. $c_2 = 0$, т.е. $c(t)$ - линейна, т.е. меняя a и b, можем считать, что $z = a(x) + b(y)$. Однако мы видим, что производная такой функции $z'_x = a'(x)$ имеет сложность ноль.

Случай C. $a_2 = 0$, т.е. $a(x) = k\,x + l$. Меняя b и c, можем считать, что $a(x) = x$, т.е.$z = c(x + b(y))$. Ясно, что при любых непостоянных a и c как z, так и z'_x имееют сложность один.

Если же ни a_1 ни c_1 не постоянны, то можно $A = a_1$ и $C = c_1$ рассматривать как независимые переменные, а $P(A) = a_2$ и $Q(C) = c_2$ - как неизвестные функции, тогда (2) примет вид

$$A^2CQ\left(C\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}Q\left(C\right) - A^2C\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}Q\left(C\right)\right)^2 + A^2Q\left(C\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}Q\left(C\right) + \\ AC\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}Q\left(C\right)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}P\left(A\right) + C^2P\left(A\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}Q\left(C\right) - AQ\left(C\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}P\left(A\right) - \\ 3\,CP\left(A\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}Q\left(C\right) + 3\,P\left(A\right)Q\left(C\right) = 0 \tag{3}$$

При каждом фиксированном C это соотношение представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение на $P(A)$ вида

$$k\,A\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}P\,(A)+l\,P\,(A)+m\,A^2=0 \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
k &= C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}Q\,(C)-Q\,(C)\,,\\
l &= C^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}Q\,(C)-3\,C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}Q\,(C)+3\,Q\,(C)\,,\\
m &= CQ\,(C)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}Q\,(C)-C\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}Q\,(C)\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}Q\,(C)\right)Q\,(C)\,.
\end{aligned}$$

Случай B. $k=0$. Решая это уравнение, получаем $Q(C)=\lambda\,C$ и затем $c(t)=(\mu/\lambda)\exp(\lambda\,t)+\nu$. При этом z можно представить в виде $z=a(x)\,b(y)$. Ясно, что при любых непостоянных a и b как z, так и z'_x имеют сложность один.

Рассмотрим следующую псевдогруппу G, состоящую из преобразований g функций (a,b,c) вида

$$\begin{aligned}
&a(x)\to a(\alpha\,x+\tilde\alpha),\\
&b(y)\to b(\beta(y)),\\
&c(t)\to \gamma\,c(t)+\tilde\gamma.
\end{aligned}$$

для любых постоянных $\alpha\neq 0,\ \tilde\alpha,\gamma\neq 0,\ \tilde\gamma$ и любой непостоянной $\beta(y)$. А также ее (псевдо)подгруппу H вида

$$\begin{aligned}
&a(x)\to a(x),\\
&b(y)\to b(\beta(y)),\\
&c(t)\to \gamma\,c(t)+\tilde\gamma.
\end{aligned}$$

Прежде дальнейшего рассмотрения сформулируем следующее, вполне очевидное, предложение.

Предложение: (a) Функция $z(x,y)=c(a(x)+b(y))$, где (a,b,c) - не постоянны, имеет производную $z'_x(x,y)=c'(a(x)+b(y))\,a'(x)$ сложности

один тогда и только тогда, когда это справедливо для $Z = g \circ z$, где $g \in G$.
(b) (a) Функция $z(x,y) = c(x\,b(y))$, где (b,c) - не постоянны, имеет производную $z'_x(x,y) = c'(x\,b(y))\,b(y)$ сложности один тогда и только тогда, когда это справедливо для $Z = h \circ z$, где $h \in H$.

Случай 1. $l = 0, \quad k \neq 0$. Тогда, решая уравнение $l = 0$, получаем

$$Q\,(C) = C^3\lambda + C\mu. \tag{5}$$

Из $k \neq 0$ следует, что $\lambda \neq 0$.
Случай 1.1. (в формулировке теоремы он обозначен как (1)) $\mu = 0$, тогда из этого соотношения и (4) получаем

$$c(t) = -\frac{\sqrt{-2\,\lambda\,t + \nu}}{\lambda}, \quad a(x) = \tau\,x^2 + \kappa\,x + \rho.$$

Преобразованиями из G полученную функцию $z = c(a(x) + b(y))$ можно превратить в

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{а ее производную в } z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Случай 1.2. $\mu \neq 0$ (в формулировке теоремы этот случай обозначен как (2)), тогда решая полученное уравнение относительно $c'(t)$, получаем

$$c'\,(t) = \frac{\sqrt{(\nu\,\mu\,\mathrm{e}^{-2\,\mu\,t} - \lambda)\,\mu}}{\nu\,\mu\,\mathrm{e}^{-2\,\mu\,t} - \lambda}$$

$$c(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda\,\mu}}\arctan\left(\frac{\sqrt{\nu\,\mu^2\mathrm{e}^{-2\,\mu\,t} - \lambda\,\mu}}{\sqrt{\lambda\,\mu}}\right)$$

Подставляя (5) в (2), получаем

$$2\,A\mu + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}P\,(A) = 0$$

откуда следует, что $P\,(A) = -A^2\mu - \nu^2$ или

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a\,(x) + \mu\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a\,(x)\right)^2 + \nu^2 = 0.$$

Если $\nu = 0$, то интегрированием получаем

$$a(x) = \frac{\ln(\mu\,\kappa\,x + \mu\,\rho)}{\mu}$$

Преобразованиями из G полученную функцию $z = c(a(x) + b(y))$ можно превратить в

$$z = \arctan\left(\frac{\sqrt{-x^2y^2+1}}{xy}\right), \quad \text{а ее производную в } z'_x = -\frac{y}{\sqrt{-x^2y^2+1}}$$

Если $\nu \neq 0$, то интегрированием получаем

$$a(x) = \frac{1}{2\,\mu}\ln\left(\frac{\mu\,\left(\kappa\,\sin\left(\nu\,\sqrt{\mu}x\right) - \rho\,\cos\left(\nu\,\sqrt{\mu}x\right)\right)^2}{\nu^2}\right)$$

(в формулировке теоремы этот случай обозначен как (3)) Преобразованиями из G полученную функцию $z = c(a(x) + b(y))$ можно превратить в

$$z = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-(\sin(x))^2\,y^2}}{\sin(x)\,y}\right), \quad \text{а ее производную в } z'_x = -\frac{y\cos(x)}{\sqrt{1-(\sin(x))^2\,y^2}}$$

Случай 4. (в формулировке теоремы он обозначен как (I)) $k \neq 0, \quad l \neq 0, \quad l + 2\,k = 0$. Тогда, решая уравнение $l + 2\,k = 0$, получаем

$$Q(C) = \lambda\,C + \mu\,C\ln(C)$$

Если $\mu = 0$, то $Q(C) = \lambda\,C$ и при этом $k = 0$. Противоречие, т.е. $\mu \neq 0$. Имеем $Q(C) = \lambda\,C + \mu\,C\ln(C)$, т.е $c(t)$ удовлетворяет уравнению

$$c''(t) = c'(t)\,(\lambda + \mu\,\ln(c'(t)))$$

Подставляя полученное выражение для $Q(C)$ в (2), получаем условие на $P(A)$

$$A^2\mu - A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}P(A) + 2\,P(A) = 0$$

откуда получаем $P(A) = (\mu\,\ln(A) + \nu)\,A^2$, т.е. $a(x)$ находим из уравнения

$$a''(x) = (\mu\,\ln(a'(x)) + \nu)\,a'(x)^2$$

Отметим, что при $\lambda = 0$ производная $c'(t)$ это двойная экспонента

$$c'(t) = \mathrm{e}^{\kappa\,\mathrm{e}^{\mu\,t}},$$

а $c(t)$ - выражается через функцию

$$Ei\,(a, z) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-\tau\,z}\tau^{-a}\,\mathrm{d}\tau.$$

А именно,

$$c(t) = \mathrm{e}^{\kappa\,\mathrm{e}^{\mu\,t}}.$$

Случай 5. $k \neq 0, \quad l \neq 0, \quad l + 2\,k \neq 0$. Тогда, решая уравнение (4), получаем

$$P\,(A) = -\frac{mA^2}{2\,k + l} + A^{-\frac{l}{k}}n. \tag{6}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a\,(x) + \frac{m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a\,(x)\right)^2}{2\,k + l} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a\,(x)\right)^{-\frac{l}{k}} n = 0$$

Случай 5.1. (в формулировке теоремы он обозначен как (4)) $n = 0$, тогда $P\,(A) = -\frac{mA^2}{2\,k+l}$, откуда получаем

$$a(x) = -\frac{2\,k + l}{m}\,\ln(x) + \rho$$

Теперь z можно записать как $z = c(x\,b(y))$. Записывая для $w = z'_x = c'(x\,b(y))\,b(y)$ условие принадлежности первому классу (1) и делая подстановку $x = t/b(y)$, получаем уравнение

$$c_3{c_1}^2c_0t^2 - 2\,c_1c_0{c_2}^2t^2 + {c_1}^3c_2t^2 + c_3c_1{c_0}^2t - {c_0}^2{c_2}^2t - \\ 2\,{c_1}^2c_0c_2t + 2\,{c_1}^4t + c_1{c_0}^2c_2 - 2\,{c_1}^3c_0 = 0.$$

Решая это уравнение получаем

$$c\,(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mu}\nu}{t}\left(t^{-\lambda^{-1}}\mathrm{e}^{\frac{\mu}{\lambda}} - 1\right)^{-\lambda}$$

Преобразованиями из H полученную функцию $z = c(x\,b(y))$ можно превратить в

$$z = (1 + (xy)^m)^{(1/m)},\ \text{а ее производную в}\ z'_x = \frac{(1 + (xy)^m)^{(1/m)}\,(xy)^m}{x\,(1 + (xy)^m)}$$

Случай 5.2. (в формулировке теоремы он обозначен как (II)) $n \neq 0$ тогда, подставляя (6) в (2) и отделяя члены кратные A^2 и кратные $A^{-\frac{l}{k}}$ получаем два соотношения

$$\begin{aligned}
&-C^2kmq_2 + 2\,Ck^2q_0q_2 - 2\,Ck^2{q_1}^2 + Cklq_0q_2 - \\
&Ckl{q_1}^2 + Ckmq_1 + 2\,k^2q_0q_1 + klq_0q_1 - kmq_0 = 0, \\
&2\,C^2k^2nq_2 + C^2klnq_2 - 6\,Ck^2nq_1 - 5\,Cklnq_1 - \\
&Cl^2nq_1 + 6\,k^2nq_0 + 5\,klnq_0 + l^2nq_0 = 0
\end{aligned}$$

Исключая из них q_2 получаем с учетом наших неравенств

$$C\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}Q\,(C)\right)k + Cm - 3\,Q\,(C)\,k - Q\,(C)\,l = 0$$

Решая это уравнение получаем

$$Q(C) = \frac{Cm}{2\,k + l} + C^{3+\frac{l}{k}}\lambda$$

Это соотношение вместе с (6) обращают (2)в тождество. Записывая полученное выражение как уравнение на $c(t)$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}c\,(t) - \frac{m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c\,(t)}{2\,k + l} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c\,(t)\right)^{3+\frac{l}{k}}\lambda = 0$$

В итоге нами доказана следующая теорема.

Теорема: Если аналитическая функция $z(x, y)$ сложности один имеет производную $z'_x(x, y)$ сложности не выше, чем один, то это возможно лишь в следующих случаях

$$(A) \quad z = a(x) + b(y)), \quad z'_x = a'(x)$$

$$(B) \quad z = a(x)\ b(y), \quad z'_x = a'(x)\ b(y)$$

$$(C) \quad z = c(x + b(y)), \quad z'_x = c'(x + b(y))$$

Функция вида $z = c(a(x) + b(y))$, которая преобразованиями из G приводится к виду

$$(1) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$(2) \quad z = \arctan\left(\frac{\sqrt{-x^2y^2 + 1}}{xy}\right), \quad z'_x = -\frac{y}{\sqrt{-x^2y^2 + 1}},$$

$$(3) \quad z = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - (\sin(x))^2\, y^2}}{\sin(x)\, y}\right), \quad z'_x = -\frac{y\cos(x)}{\sqrt{1 - (\sin(x))^2\, y^2}},$$

$$(4) \quad z = (1 + (xy)^m)^{(1/m)}, \quad z'_x = \frac{(1 + (xy)^m)^{(1/m)}\,(xy)^m}{x\,(1 + (xy)^m)},$$

Функция вида $z = c(a(x) + b(y))$, где $b(y)$ - произвольна, а $c(t)$ и $a(x)$ любые решения уравнений

$$(I) \quad c''(t) = (\mu\ \ln(c'(t)) + m)\, c'(t), \quad a''(x) = (\mu\ \ln(a'(x)) + n)\, a'(x)^2$$

$$(II) \quad c''(t) - \lambda\, c'(t) + \nu\,(c'(t))^{3+\mu} = 0$$
$$a''(x) + \lambda\ (a'(x))^2 + n\ (a'(x))^{-\mu} = 0$$

При этом $z'_x = c'(a(x) + b(y))\, a'(x)$ и имееет сложность один.

Замечание: Отметим, функции $c(t)$ и $a(x)$ в пунктах (I) и (II) выражаются в квадратурах. Точнее, в случае (I) они выражаются через экспоненциальный интеграл $Ei(p,s)$, а в случае (II) через гипергеометрическую функцию ${}_2\mathrm{F}_1(\alpha,\beta;\,\gamma;\,s)$.

Действительно, рассмотрим уравнения из пункта (I). Преобразованием $c(t)\to\gamma\,c(t)$ в уравнении на $c(t)$ можно сделать параметр $m=0$, а преобразованием $a(x)\to a(\alpha\,x)$ в уравнении на a - параметр $n=0$. Решая первое из полученных уравнений

$$c''(t)=\mu\;c'(t)\;\ln\left(c'(t)\right)),$$

получаем

$$c\,(t)=-\frac{Ei\,(1,\rho\;\mathrm{e}^{\mu\,t})}{\mu}+\sigma.$$

где

$$Ei\,(p,s)=\int_1^\infty e^{-t\,s}\;t^{-p}\,d\,t$$

- экспоненциальный интеграл. Из второго уравнения можно получить $a(x)$ обращением и повторным интегрированием того же самого экспоненциального интеграла $Ei(p,s)$.

Рассмотрим уравнения из пункта (II). Решая первое уравнение относительно $c(t)$, получаем

$$c\,(t)=\int\left(\frac{\lambda}{\nu\;\mathrm{e}^{\rho\,\lambda\,\mu}\mathrm{e}^{\lambda\,\mu\,t}\left(\mathrm{e}^{\rho\,\lambda}\right)^2\left(\mathrm{e}^{\lambda\,t}\right)^2+1}\right)^{(\mu+2)^{-1}}\mathrm{e}^{\rho\,\lambda}\mathrm{e}^{\lambda\,t}\,\mathrm{d}t+\sigma.$$

Ясно, что эта функция есть композиция экспоненты и неопределенного интеграла вида

$$\int\frac{d\,\sigma}{\left(\Lambda\,\sigma^2+1\right)^{\frac{1}{\mu+2}}}=\sigma\;{}_2\mathrm{F}_1(1/2,(\mu+2)^{-1}\,;\;3/2;\;-\Lambda\,\sigma^2),$$

который представляет собой гипергеометрическую функцию. Функцию $a(x)$ получаем из второго уравнения. При этом она получается обращением и интегрированием интеграла (первообразной) функции

$$\int\frac{d\,\sigma}{\lambda\,\sigma^2+n\,\sigma^{-\mu}}.$$

В свою очередь, этот интеграл после замены $\sigma \to \frac{\rho}{\sigma}$ с подходящим ρ превращается в интеграл вида

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma^{2-\mu}+1} = \sigma\, {}_2\mathrm{F}_1(1, (2-\mu)^{-1}\, ;\, 1+(2-\mu)^{-1}\, ;\, -\sigma^{2-\mu}),$$

который также выражается через гипергеометрическую функцию

Список литературы

[1] Liouville, J. Sur la d*é*termination des int*é*grales dont la valeur est algbrique, Journal de l'ecole polytechnique, vol. XIV (1833), Section 23.

[2] J.F.Ritt, Integration in finite term, Liouville's theory of elementary methods, NY Colombia University Press, 1948, 100 pp.

[3] V.K.Beloshapka, Analytic complexity of functions of two variables, Russian J. Math. Phys., 14(2007), no. 3, 243–249.

[4] V. K. Beloshapka, Algebraic Functions of Complexity One, a Weierstrass Theorem, and Three Arithmetic Operations, Russian J. Math. Phys., 2016, Vol. 23, no. 3, pp. 343–347.

[5] V.K. Beloshapka, Decomposition of Functions of Finite Analytical Complexity, Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics 2018, 11(6), 680–685