Полиномиальные модельные CR-многообразия с условием жесткости

Белошапка В.К.

01.11.2018

УДК 517.55, 517.923, 514.74

Аннотация

В данной работе результаты, полученные недавно автором для модельных многообразий с числами Хермандера (2,3) без условия полной невырожденности распространяются на произвольный тип по Блуму-Грэму. При этом делается упрощающее предположение, что модельная поверхность является жесткой.

[1]

CR-многообразие общего положения является вполне невырожденным [1]. Условие полной невырожденности, в духе построений Блума и Грэма [2], может формулироваться как аналитически, так и геометрически. В геометрических терминах это означает, что алгебра Леви-Танаки (алгебра Ли векторных полей порожденная, комплексными касательными полями) - это свободная градуированная алгебра Ли. В аналитических терминах это условие на тип по Блуму-Грэму. А именно, кратность

[1]Московский университет им.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории функций и функционального анализа,
119991 Москва, Ленинские горы,д.1, vkb@strogino.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 18-41-05003

каждого числа Хермандера для фиксированной размерности комплексной касательной - максимальна. Полная невырожденность ростка многообразия в точке равносильна полной невырожденности касательной модельной поверхности.

Рассмотрение вполне невырожденных модельных поверхностей показало, что ранее изученный случай квадратичных модельных поверхностей (длина l алгебры Леви-Танаки равна двум) имеет существенное отличие от общего случая $l > 2$. Алгебра Ли инфинетезимальных автоморфизмов вполне невырожденного ростка CR-многообразия это конечноградуированная алгебра Ли, содержащая отрицательные градуированные компоненты - g_-, нулевую - g_0 и положительную - g_+. Составляющие g_- и g_0 всегда нетривиальны. При $l = 2$ имеется масса примеров с $g_+ \neq 0$. В то время как при $l > 2$ не известно ни одного примера с $g_+ \neq 0$. Это позволило сформулировать соответствующую гипотезу. Данная гипотеза была доказана для $l = 3$ в [4], а также для CR-размерности равной единице в [10].

В 2018 году, почти одновременно, появились два независимых доказательства этой гипотезы в полном объеме. Первое - М.Сабзевари и А.Спиро [6], а днем позже Я.Грегоровича [7]. Доказанная ими теорема имеет массу следствий. Например, при $l > 2$ из нее непосредственно следует, что биголоморфное отображение ростка одного вполне невырожденного многообразия на другой такой росток однозначно определяется сужением дифференциала отображения в одной точке на комплексную касательную. Это утверждение аналогично теореме А.Картана для областей ограниченного вида и теореме Белошапки-Лободы для несферических вещественных гиперповерхностей. Другое следствие касается вполне невырожденных модельных многообразий. Следствие состоит в том, что стабилизатор точки в группе голоморфных автоморфизмов модельной поверхности есть некоторая, явно описанная, подгруппа полной линейной группы. Т.е., другими словами, в стабилизаторе точки нет нелинейных преобразований.

При этом отметим, что за рамками условия полной невырожденности имеется множество примеров модельных поверхностей с нетривиальной g_+-подалгеброй и, соответственно, с нелинейными автоморфизмами в стабилизаторе точки. Таким образом, доказательство гипотезы повышает интерес к таким модельным поверхностям, которые и являются предметом изучения в данной работе.

В [8] была предложена теория модельных поверхностей с числами

Хермандера $(2,3)$ без условия полной невырожденности. В данной работе, которую можно рассматривать как естественное продолжение [8], аналогичное построение проводится для произвольного типа по Блуму-Грэму. Т.е. допускается произвольный набор чисел Хермандера произвольных кратностей. При этом, однако, предполагается, что модельная поверхность является жесткой (определение см.ниже).

Пусть в комплексном пространстве $\mathbf{C}^N$ координаты делятся на группы

$$z \in \mathbf{C}^n, w_1 \in \mathbf{C}^{k_1}, \dots, w_l \in \mathbf{C}^{k_l},$$
$$n + k_1 + \dots + k_l = N,\ w_j = u_j + i\, v_j,\ 1 \le j \le l$$

При этом задан набор весов $2 \le m_1 < m_2 < \dots < m_l$. Переменной z присвоен вес 1, переменной w_j - вес m_j. Рассмотрим росток M_ξ, заданный в некоторых координатах с началом в точке ξ уравнениями вида

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}) + o(m_j), \quad 1 \le j \le l \tag{1}$$

где Φ_j - вещественная векторзначная форма однородной степени m_j, не содержащая плюригармонических членов, а $o(\mu)$ - это сумма слагаемых зависящих от $(z, \bar{z}, u)$ веса, больше чем μ. Если координаты всех векторзначных форм Φ_j - линейно независимы, то данный росток имеет тип по Блуму-Грэму

$$m = ((m_1, k_1), (m_2, k_2), \dots, (m_l, k_l)) = (m_1, \dots, m_1, m_2, \dots, m_2, \dots, m_l \dots, m_l)$$

В частности, это росток конечного типа.

В таком случае *касательная модельная поверхность* к ростку M_ξ это поверхность Q, заданная уравнениями

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}), \quad 1 \le j \le l \tag{2}$$

При этом будем говорить, что ростки, заданные уравнениями вида (1) это ростки, *подчиненные* модельной поверхности Q. Ясно, что при этом касательное пространство в начале координат - это $\{v = 0\}$, а его комплексная часть - это $\{w = 0\}$. Т.е. CR-размерность равна n и z - это координата, параметризующая комплексную касательную. При этом коразмерность многообразия равна $K = k_1+\cdots+k_l$, а размерность $(2n+K)$.

Неверно, что любой росток конечного типа m имеет локальные уравнения вида (1). В соответствии с теоремой Блума-Грэма любой росток типа m имеет уравнения, аналогичные (1), но формы Φ_j могут зависеть от $u = \mathrm{Re}w$. В случае, если зависимости форм Φ_j от $u = \mathrm{Re}w$ нет, говорят, что модельная поверхность Q - *жесткая* . Это утверждение, как не трудно видеть, равносильно тому, что среди автоморфизмов поверхности Q содержатся сдвиги вида

$$(z \to z, \quad w \to w + b) \quad \text{для всех } b \in \mathbf{R}^K$$

Термин "жесткость"используется, даже в CR-геометрии, в нескольких смыслах. Использование его в данной ситуации представляется не очень удачным, но, поскольку он устоялся, мы будем его использовать. В дальнейшем, в этой работе будем предполагать, что модельная поверхность Q - жесткая. Подчеркнем, что это предположение делается только по отношению модельных поверхностей и не относится к росткам CR-многообразий, которые являются их возмущениями.

Данное выше определение жесткости связано с фиксированной системой локальных координат. Можно предложить его бескоординатную версию. А именно, жесткость ростка означает, что в алгебре Ли инфинетизимальных автоморфизмов есть поле, отличное от нуля в центре ростка и трансверсальное там комплексной касательной.

Утверждение 1:
(a) Росток M_ξ и его модельная поверхность Q имеют конечный тип $m = ((m_1, k_1), (m_2, k_2), \ldots, (m_l, k_l))$ тогда и только тогда, когда среди координат форм Φ_j в нормальной форме по Блуму-Грэму нет тождественных нулей.
(b) Росток M_ξ и его модельная поверхность Q имеют конечный тип $m = ((m_1, k_1), (m_2, k_2), \ldots, (m_l, k_l))$ тогда и только тогда, когда координаты всех форм Φ_j линейно независимы.
(c) Если координатные формы линейно зависимы, то Q имеет бесконечный тип и не является минимальной в начале координат.
Доказательство: Пункт (a) и (b) следуют из следствия 8.3 работы [2], (c) - очевидно.

Пусть два ростка M_ξ и $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ голоморфно эквивалентны. Тип ростка является голоморфным инвариантом, поэтому их типы совпадают. Пусть их общиий тип это $m = ((m_1, k_1), (m_2, k_2), \ldots, (m_l, k_l))$, поверхности Q и $\tilde{Q}$ - это их касательные модельные поверхности, каждая из которых задается набором форм $\{\Phi_j\}$ и $\{\tilde{\Phi}_j\}$. Пусть, далее,

$$(z \to f(z, w),\ w_j \to g_j(z, w))$$

голоморфное в окрестности начала обратимое отображение, которое отображает M_ξ на $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ и оставляет начало координат на месте. В дальнейшем мы будем использовать разложения вида $f(z, w) = \sum_1^\infty f_j(z, w)$, где f_j - это j-я весовая компонента разложения f.

Утверждение 2:
(a) Младшие члены отображения имеют вид

$$\begin{aligned} &f(z, w) = C\ z + o(1), \\ &g_j(z, w) = \rho_j\ w_j + o(m_j), \end{aligned} \tag{3}$$

где $C \in GL(n, \mathbf{C}),\ \rho_j \in GL(k_j, \mathbf{R})$, причем

$$\tilde{\Phi}_j(z, \bar{z}) = \rho_j^{-1}\ \Phi_j(Cz, \overline{Cz})). \tag{4}$$

(b) Линейное отображение $(z \to C\ z,\ w_j \to \rho_j\, w_j)$ отображает Q на $\tilde{Q}$, т.е. модельные поверхности голоморфно эквивалентны в том и только том случае, когда они эквивалентны линейно.
Доказательство: Пусть уравнения ростков это

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}) + \varphi_j(z, \bar{z}, u), \quad v_j = \tilde{\Phi}_j(z, \bar{z}) + \tilde{\varphi}_j(z, \bar{z}, u)$$

Тогда соотношения, которые выражают тот факт, что если $(z, w) \in M_\xi$, то $(f, g_1, \ldots, g_l) \in \tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ имеют вид

$$\begin{aligned} &Im\ g_1 = \tilde{\Phi}_1(f, \bar{f}) + \tilde{\varphi}_1(f, \bar{f}, Re\ g) \\ &\ldots \\ &Im\ g_l = \tilde{\Phi}_l(f, \bar{f}) + \tilde{\varphi}_l(f, \bar{f}, Re\ g) \end{aligned}$$

$$\text{при } w_j = u_j + i\ (\Phi_j(z, \bar{z}) + \varphi_j(z, \bar{z}, u)) \tag{5}$$

Отделяя в первом из них компоненты веса от 1 до m_1, а во втором от 1 до m_2 и т.д., получаем (a), откуда сразу следует (b). Утверждение доказано.

Заметим, что соотношение (4) задает действие прямого произведения линейных групп $GL(n, \mathbf{C}) \times GL(k_1, \mathbf{R}) \times \cdots \times GL(k_l, \mathbf{R})$ на пространстве форм $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_l)$, которые определяют модельные поверхности данного типа. Т.е. две модельные поверхности CR-эквиваленитны тогда и только тогда, когда соответствующие наборы форм принадлежат одной орбите этого действия. В силу утверждения 2 любые инварианты указанного действия являются голоморфными инвариантами ростка. Это позволяет, на основе теоремы Гильберта о базисе, дать описание пространства модулей модельных поверхностей фиксированного типа, построить "гауссово "отображение многообразия данного типа в свое пространство модулей, дать определение CR-характеристических классов. Соответствующие конструкции, для вполне невырожденных поверхностей, были описаны в [9]. Все они переносятся в данный контекст без изменений.

Для понимания CR-геометрии ростка большой интерес представляют его голоморфные автоморфизмы. Пусть aut M_ξ - это алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов. Она состоит из ростков вещественных голоморфных векторных полей вида

$$X = 2\, Re \left(\alpha \, \frac{\partial}{\partial z} + \sum \beta_j \, \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \qquad (6)$$

где $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_l)$ - голоморфны в окрестности точки ξ и поле X в точках M_ξ касательно к M_ξ. Каждое такое поле порождает локальную однопараметрическую группу обратимых голоморфных отображений ростка в себя. Совокупность порожденных таким образом отображений - это локальная группа автоморфизмов M_ξ, которую мы обозначим $\mathrm{Aut} M_\xi$. В $\mathrm{aut} M_\xi$ можно выделить подалгебру Ли $\mathrm{aut}_\xi M_\xi$, которая состоит из векторных полей, обращающихся в ξ в ноль. Поля из этой подалгебры порождают локальные однопараметрические группы голоморфных преобразований, оставляющих ξ на месте. Эти преобразования образуют локальную подгруппу $\mathrm{Aut}_\xi M_\xi$ в $\mathrm{Aut} M_\xi$.

Введенные выше веса переменных позволяют в алгебре Ли векторных полей в пространстве $\mathbf{C}^N$ ввести градуировку. Для этого соглашение о весах переменных надо распространить на координатные дифференцирования, полагая

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\right] = -1, \quad \left[\frac{\partial}{\partial w_j}\right] = -m_j.$$

После этого структуру градуированной алгебры Ли получает и autM_ξ, которая распадается в прямую сумму градуированных компонент от компоненты веса $(-l)$ и, вообще говоря, до $+\infty$. Компоненту веса j алгебры aut Q обозначим через $\mathcal{G}_j$ сумму отрицательных компонент алгебры aut Q через $\mathcal{G}_-$, а положительных через $\mathcal{G}_+$. При этом aut $Q = \mathcal{G}_- + \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_+$, а $\text{aut}_0\ Q = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_+$. Алгебра модельной поверхности Q обладает рядом особенностей

Утверждение 3:
(a) Если поле $X = \sum_{-l}^{+\infty} X_j$ принадлежит aut Q, то $\forall j\ X_j \in$ aut Q.
(b) aut Q содержит поле веса ноль

$$X = 2\ Re\left(z\,\frac{\partial}{\partial z} + \Sigma\ m_j\ w_j\ \frac{\partial}{\partial w_j}\right)$$

которому соответсвует однопараметрическя подгруппа растяжений

$$z \to e^t\ z, \quad w_j \to e^{m_j\,t}\ w_j$$

(c) Подалгебра $\mathcal{G}_- = \mathcal{G}_{-l} + \dots + \mathcal{G}_{-2} + \mathcal{G}_{-1}$ порождает подгруппу G_- голоморфных преобразований Q, т.ч. ее орбита начала координат совпадает с орбитой начала координат для полной группы автоморфизмов.
(d) Алгебра Ли конечно-градуирована (в разложении на компоненты конечное число компонент отлично от нуля), тогда и только тогда, когда она конечномерна. В этом случае она состоит из векторных полей с полиномиальными коэффициентами.
(e) Условием того, что поле (6) принадлежит aut Q_0 являются соотношения

$$\begin{aligned} &2\ Re\,(i\,\beta_j(z,w) + 2\ Re\ (\partial\Phi_j(z,\bar z)(\alpha(z,w))) = 0,\\ &\text{при } w_j = u_j + i\ \Phi_j(z,\bar z) \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство: Касательное пространство к Q задается соотношениями

$$Im\,(d\,w_j) = 2\ Re\ (\partial\Phi_j(z,\bar z)(dz))$$

откуда следует (e). Подстановка не меняет весов w_j, поэтому линейные соотношения (7) это соотношения на каждую градуированную компоненту поля X_j, которая формируется из однородных компонент коэффициентов, а именно $(\alpha^{j+1}, \beta_1^{j+m_1}, \dots, \beta_l^{j+m_l})$. Это доказывает (a). Пункты (b) и (c) очевидны, (d) - следует из (a). Утверждение доказано.

Критерием конечномерности $\mathrm{aut} M_\xi$ алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов ростка конечного типа является голоморфная невырожденность ([**?**],[11]). В соответствии с определением, голоморфная вырожденность Q означает существование ненулевого голоморфного векторного поля, т.е. поля вида

$$X = \alpha \, \frac{\partial}{\partial z} + \sum \beta_j \, \frac{\partial}{\partial w_j}$$

где $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_l)$ - голоморфны в окрестности начала, касательного к Q т.е. с условием

$$\beta_j = 2 \, i \, \partial \Phi_j(z, \bar{z})(\alpha) \qquad (8)$$

при $w_j = u_j + i \, \Phi_j(z, \bar{z})$.

Данный критерий конечномерности сам по себе неконструктивен. Однако, для Q - алгебраической поверхности специального вида ему, как это было сделано для рассмотренных ранее случаев чисел Хермадера (2) и $(2,3)$, можно придать вполне конструктивный характер.

Отметим, что $X = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. А также то, что выполнение этих соотношений на Q означает их выполнение в окрестности начала координат.

Теорема 4: Необходимым и достаточным условием голоморфной вырожденности Q является каждое из следующих условий
(a) существование однородной голоморфной $\mathbf{C}^n$-значной формы на $\mathbf{C}^n$ - $a(z) \neq 0$, степени не выше чем $(l-1)(n-1)$, такой что для всех $(z, \ \eta, \ \zeta)$ из $\mathbf{C}^n$ имеет место

$$\partial \overline{\partial} \Phi_j(z, \bar{\zeta})(a(z), \bar{\eta}) = 0.$$

(b) существование однородной голоморфной $\mathbf{C}^n$-значной формы на $\mathbf{C}^n$ - $a(z) \neq 0$, степени не выше чем $(l-1)(n-1)$, такой что для всех z из $\mathbf{C}^n$ и любых $(1 \leq i_1, \ i_2 \leq n)$ имеет место

$$\partial \overline{\partial} \Phi_j(z, \bar{e}_{i_1})(a(z), \bar{e}_{i_2}) = 0,$$

где e_i - элемент стандартного базиса в $\mathbf{C}^n$.
(c) Ранг системы из $K\,n^2$ линейных уравнений относительно неизвестного $A \in \mathbf{C}^n$

$$L(\Phi)(z)(A) = \partial\overline{\partial}\Phi_j(z, \bar{e}_{i_1})(A, \bar{e}_{i_2}) = 0$$

меньше n для всех z при $(1 \le j \le l, \quad 1 \le i_1,\, i_2 \le n)$.
Доказательство: Зафиксируем $\alpha(z, w)$, голоморфное в окрестности нуля. Необходимым и достаточным условием, того что $(\beta_1, \dots, \beta_l)$ определенные соотношением (8) на Q голоморфны в окрестности начала координат являются касательные уравнения Коши-Римана. Пусть $\eta \in \mathbf{C}^n$ произвольный вектор. Рассмотрим CR-векторное поле на Q

$$\bar{X}_{\bar{\eta}} = \bar{\eta}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2\,i \sum \bar{\partial}\Phi_j(z, \bar{z})(\bar{\eta})\,\frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}.$$

Если $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ - базис в $\mathbf{C}^n$, то набор полей $(\bar{X}_{\bar{\eta}_1}, \dots, \bar{X}_{\bar{\eta}_n})$ - базисный набор CR-полей на Q. Применяя эти поля к соотношениям (8), получаем соотношения, которые представляют собой критерий существования голоморфных коэффициентов β_j.

$$\partial\overline{\partial}\Phi_j(z, \bar{z})(\alpha(z, w), \bar{\eta}) = 0, \quad \forall \eta \in \mathbf{C}^n, \quad 1 \le j \le l \tag{9}$$

Пусть $\zeta \in \mathbf{C}^n$ - новая независимая переменная. Применяя к (9) $\bar{X}_{\bar{\zeta}}$ достаточное количество раз и используя голоморфность α, получаем

$$\partial\overline{\partial}\Phi_j(z, \bar{\zeta})(\alpha(z, w), \bar{\eta}) = 0, \quad \forall \eta, \zeta \in \mathbf{C}^n, \quad 1 \le j \le l \tag{10}$$

Подставим в (10) $\bar{z} = 0$, получим

$$\partial\overline{\partial}\Phi_j(z, \bar{\zeta})(\alpha(z, u), \bar{\eta}) = 0 \tag{11}$$

Разложим α в степенной ряд по u. Тогда (11) распадется на покоэффициентные соотношения, откуда следует, что существование ненулевого $\alpha(z, u)$ равносильно существованию ненулевого коэффициента $a(z)$, удовлетворяющего (11) и, далее, однородной по z голоморфной $\mathbf{C}^n$-значной формы $a(z)$. Имеем

$$\partial\overline{\partial}\Phi_j(z, \bar{\zeta})(a(z), \bar{\eta}) = 0 \tag{12}$$

Эта система эквивалентна системе вида

$$\partial\overline{\partial}\Phi_j(z, \bar{e}_{i_1})(a(z), \bar{e}_{i_2}) = 0, \tag{13}$$

где e_i - элемент стандартного базиса в $\mathbf{C}^n$. Если поставить вместо $a(z)$ формальную неизвестную $A \in \mathbf{C}^n$, то мы получаем систему линейных уравнений $L(\Phi)(A) = 0$ на A, причем элементы матрицы коэффициентов - это формы степени не выше, чем $(l-1)$, составленные из производных форм Φ. Условие существования ненулевого решения, как хорошо известно, это условие того, что её ранг $r < n$. При этом решение, по правилу Крамера, это набор определителей матрицы порядка r. Откуда следует, что интересующая нас форма $A = a(z)$, это форма степени не выше, чем $(l-1)(n-1)$. Теорема доказана.

Определение: Если координатные формы вектрзначных форм Φ_j линейно независимы (конечность типа) и Φ удовлетворяет любому из условий теоремы 4 (голоморфная невырожденность) мы будем говорить, что модельная поверхность Q - *невырождена* (в отличие от старого условия полной невырожденности). А если росток M_ξ многообразия M подчинен невырожденной поверхности Q, то мы будем говорить, что многообразие M невырождено в точке ξ.

Из утверждений 1 и 4 получаем

Следствие 5: Алгебра Ли aut Q автоморфизмов модельной поверхности Q - конечномерна, тогда и только тогда, когда Q - невырождена. *Доказательство:* Если Q невырождена, то из теорем 1 и 4 получаем минимальность и голоморфную невырожденность,т.е. конечномерность. Если нарушено любое из этих условий, сразу получаем бесконечномерную группу автоморфизмов. Следствие доказано.

Теорема 6: Пусть два ростка вида (1) M_ξ и $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ голоморфно эквивалентны. Тогда
(a) линейное пространство $\mathrm{aut}_0\, Q$ параметризует семейство отображений первого во второй;
(b) если Q невырождена, то это семейство имеет размерность не выше $\dim \mathrm{aut}_0\, Q$ и, в частности,

$$\dim\ \mathrm{aut}_\xi M_\xi \leq \dim\ \mathrm{aut}_0\ Q_0 < \infty.$$

Доказательство: Из рассуждений, проведенных при доказательстве утверждения 2 следует, что любое отображение ростка M_ξ в $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ можно разложить в композицию двух отображений. Отображения вида

$$z \to z + f_2 + \dots, \quad w_j \to w_j + g_j^{m_j+1} + \dots \tag{14}$$

и

$$z \to C\, z, \quad w_j \to \rho_j\, w_j$$

Теорему достаточно доказать для первого отображения, которое не меняет уравнений касательной модельной поверхности Q, т.е. полагаем $\tilde{\Phi} = \Phi$. Подставим (14) в соотношения (5). Отделяя в первом из этих соотношений $(m_1 + \mu)$-ю, а во втором $(m_2 + \mu)$-ю и т.д. весовые компоненты, получим для каждлго $\mu = 1, 2, \dots$ и $j = 1, \dots, l$ соотношение вида

$$\begin{aligned} &Re\ (i\ g_j^{m_j+\mu}(z,w) + 2\ \Phi(f^{1+\mu}(z,w), \bar{z})) + \dots = 0 \\ &\text{где } w_j = u_j + i\ \Phi_j(z, \bar{z}) \end{aligned} \tag{15}$$

и многоточие означает сумму выражений, зависящих от $(f^{1+\nu}, g_j^{m_j+\nu})$ при $\nu < \mu$. При фиксированном φ соотношение (15) можно использовать для рекуррентного вычисления последовательных наборов $(f^{1+\mu}, g_j^{m_j+\mu})$, состоящих из компонент отображения. На каждом шаге этого вычисления для определения следующего набора нужно решить алгебраическую систему линейных уравнений, правая часть которой вычислена на предыдущием шаге. Решение неоднородной системы линейных уравнений однозначно определено с точностью до выбора решений однородной системы. В силу утверждения 3, пункт (e) пространство решений однородной системы совпадает с $\mathrm{aut}\ Q_0$. Теорема доказана.

Это рассуждение (конструкция Пуанкаре, см.[12]), которое применялось в CR-геометрии неоднократно, представляет собой некоторую версию теоремы о неявном отображении для формальных степенных рядов. Пункт (b) полученного утверждения демонстрирует одно из основных свойств модельных поверхностей. Модельная поверхность является самой симметричной в классе подчиненных ей ростков данного типа. Хотя доказанное неравенство является не строгим, во всех известных ситуациях совпадение размерностей означает, что росток эквивалентен Q. Это, по-видимому, справедливо и в данной ситуации, но доказательство требует дополнительных рассуждений.

Все вполне невырожденные модельные поверхности Q - голоморфно однородны, т.е. начало координат голоморфным автоморфизмом Q может быть переведено в любую другую точку Q. Причем этот автоморфизм является треугольно-полиномиальным. Рассмотрим вопрос о голоморфной однородности невырожденной модельной поверхности, которая, вообще говоря, не является вполне невырождненной. Если модельная поверхность Q, которая в начале координат имеет тип m однородна, то тот же тип она обязана иметь и во всех остальных точках. Для модельной поверхности Q это условие оказывается и достаточным.

Теорема 7:
(a) Модельная поверхность Q - голоморфно однородна тогда и только тогда, когда она имеет постоянный тип во всех точках.
(b) В этом случае голоморфная однородность обеспечивается действием подгруппы G_- группы $\mathrm{Aut}\, Q$, состоящей из треугольно-полиномиальных отображений, степени меньше l, которая порождается $\mathcal{G}_-$.
(c) $\mathcal{G}_-$ как алгебра Ли порождается $\mathcal{G}_{-1}$, т.е. является фундаментальной по Танаке.
(d) При этом G_- имеет стркутуру CR-многообразия эквивалентного Q.
Доказательство: Переразложим однородные формы $\Phi_j(z,\bar{z})$, определяющие Q, в точке $a \in \mathbf{C}^n$. Получаем

$$\Phi_j(z+a,\bar{z}+\bar{a}) = \Phi_j(z,\bar{z}) + d\Phi_j(z,\bar{z})(a) + \frac{1}{2!}d^2\Phi_j(z,\bar{z})(a,a) + \dots$$

Заметим, что второе слагаемое справа имеет вес (=степень) равную (m_j-1), третье - (m_j-2) и т.д. Если для какого-то J в этом соотношении есть хотя бы один член не редуцируемый к нулю в соответствии с процессом, описанном в [2], то это означает, что кратность какого-то числа Хермандера m_j при $j < J$ возрасла. Таким образом, если тип сохранился, то все члены, начиная со второго редуцируются к нулю, а это, в свою очередь, означает наличие треугольно-полиномиального отображения Q в себя, переводящего точку a в начало координат. Это доказывает (a) и (b). Отметим, что при этом возникает отображение h из $\mathbf{C}^n$ в G_-, которое ставит в соответствие точке a треугольно-полиномиальный автоморфизм Q - h_a, т.ч. $h_a(0) = a$. Пользуясь этим соответствием нетрудно определить определить базисный набор векторных полей из $\mathcal{G}_{-1}$, которые в каждой точке Q порождают распределение комплексных касательных. Далее, в соответсятвии с определением типа по Блуму-Грэму, эти поля порождают агебру Ли $\mathcal{G}_-$, которая, тем самым, оказывается фундаментальной по Танаке [13]. После чего Q отождествляется со стандартной моделью фундаментальной градуированной алгебры Ли $\mathcal{G}_-$. Это доказывает (c) и (d). Теорема доказана.

Учитывая нетривиальность $\mathcal{G}_0$, полиномиальность векторных полей составляющих aut$Q$, а также используя прием, восходящий к В.Каупу ([14], [15]), получаем

Теорема 8: Группа голоморфных автоморфизмов Aut$Q$ невырожденной модельной поверхности является конечномерной подгруппой Ли группы бирациональных автоморфизмов $\mathbf{C}^N$ (группа Кремоны), ограниченной степени. Равномерная оценка на степень - это константа $D = D(n, K)$, зависящая отCR-размерности и коразмерности .

Используя этот результат можно, как это было сделано в [16], показать, что Aut Q обладает структурой группы Ли.

Как было отмечено во введении в случае, если Q - вполне невырождена, то $\mathcal{G}_+ = 0$. Если же Q только невырождена, то вопрос об оценке на d (номер старшей ненулевой компоненты $\mathcal{G}_+$) для фиксированного типа m открыт. Если получить такую оценку, то из этой оценки на d и из конструкции Каупа нетрудно извлечь оценку на $D(n, K)$ - степень бирациональных автоморфизмов Q. .

Список литературы

[1] В. К. Белошапка, “Универсальная модель вещественного подмногообразия”, Матем. заметки, 75:4 (2004), 507–522; Math. Notes, 75:4 (2004), 475–488

[2] Th.Bloom,I.Graham, On Type Conditions for Generic Real Submanifolds of $\mathbf{C}^n$, Inventiones math. 40, 217-243 (1977).

[3] В. К. Белошапка, “Кубическая модель вещественного многообразия”, Матем. заметки, 70:4 (2001), 503–519; Math. Notes, 70:4 (2001), 457–470.

[4] Р.В.Гаммель, И.Г.Коссовский, Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен “жесткости”, Труды МИРАН, т.253 (2006), 30–45.

[5] M.Sabzevari, Biholomorphic equivalence to totally nondegenerate model CR manifolds, Ann. Mat. Pura Appl., 2018, doi: 10.1007/s10231-018-0812-2.

[6] M.Sabzevari, A.Spiro, On the Geometric Order of Totally Nondegenerate CR-manifolds,
arXiv: 1807.03076v1 [mathCV] 9 Jul 2018.

[7] J.Gregorovich, On the Beloshapka's Rigidity Conjecture for Real Submanifolds in Complex Space,
arXiv: 1807.03502v1 [mathCV] 10 Jul 2018.

[8] V. K. Beloshapka, Cubic Model CR-manifolds Without the Assumption of Complete Nondegeneracy, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 25, No. 2, 2018, pp. 148–157.

[9] V. K. Beloshapka, Moduli Space of Model Real Submanifolds // Russian Journal of Math. Physics, vol.13, No.3, 2006, pp. 245-252.

[10] Stanton, N., Infinitesimal CR-automorphisms, Amer. J. Math. 118 (1996), 209—233.

[11] M.S.Baouendi, P.Ebenfelt, L.P.Rothschild, CR automorphisms of real analytic CR in complex space, Conun. Anal. Geom. 6(1998), 291—315.

[12] H. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, Rend. Circ. Mat. Palermo 23 (1907), 185–220.

[13] N.Tanaka, On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables, J. Math. Soc. Japan, 14(1962), 397-429.

[14] Kaup W., Einige Bemerkungen uber polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten // Math. Ann. 1973. Bd. 204. S. 131–144.

[15] Туманов А.Е., Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собствен- ные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 3. С. 651–659.

[16] A.Huckleberry, D.Zaitsev, Actions of groups of birationally extendible automorphisms, Geometric complex analysis (Hayama, 1995), 261–285, World Sci. Publ., River Edge, NJ,1996.