Кубические модельные CR-многообразия без условия полной невырожденности

Белошапка В.К.

04.02.2018

УДК 517.55, 517.923, 514.74

Аннотация

В работе изучаются модельные поверхности с числами Хермандера (2,3) без условия полной невырожденности. Даны простые критерии конечности типа, голоморфной невырожденности, голоморфной однородности. Доказано, что размерность группы автоморфизмов модельной поверхности максимальна в классе подчиненных ей ростков. А также то, что эта группа представляет собой подгруппу Ли в группе Кремоны. Отдельно рассмотрен случай поверхности с единственным числом Хермандера 3.

[1]

В работе Блума и Грэма [1] был введен тип порождающего ростка CR-многообразия. А также была доказана эквивалентность двух определений типа: геометрического и координатного. В геометрическом определении тип связывался со свойствами распределения комплексных касательных, а в координатном с видом уравнений, определяющих росток. В координатном определении тип ростка совпадает с типом квазиоднородной поверхности, которая задается младшими весовыми компонентами

[1]Механико-математический факультет, МГУ,
Воробьевы горы, 119991 Москва, Россия, valery@beloshapka.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 18-41-05003

уравнений ростка. Эта поверхность является каноническим представителем ростков данного типа - модельной поверхностью, свойства которой во многом определяют свойства ростка. Модельные поверхности с единственным числом Хермандера $m_1 = 2$ произвольной кратности k_1 были изучены достаточно хорошо. В работе [2] были описаны и изучены вполне невырожденные модельные поверхности. Это модельные поверхности, соответствующие росткам произвольных CR-размерностей и коразмерностей общего положения. В частности, если тип поверхности CR-размерности n это два числа Хермандера $m_1 = 2$ кратности k_1 и $m_2 = 3$ кратности k_2, то в случае выполения условия полной неврожденности, необходимо выполнение равенства $k_2 = n^2$ и неравенства $k_3 \leq n^2\,(n+1)$. Вполне невырожденные модельные поверхности типа $((2,k_1),(3,k_2))$ были рассмотрены в [3] и [4].

В данной работе техника модельных поверхностей применяется к изучению CR-многообразий типа $((2,k),(3,K))$, которые, в случае $k < n^2$, не являются вполне невырожденными.

Пусть в комплексном пространстве $\mathbf{C}^N$ координаты делятся на три группы

$$\begin{aligned}&z = (z_1,\ldots,z_n),\ w = (w_1,\ldots,w_k),\ W = (W_1,\ldots,W_K),\\ &w = u + i\,v,\ W = U + i\,V\end{aligned}$$

переменной z присвоен вес 1, переменной w - вес 2, переменной W - вес 3. Росток M_ξ типа $((2,k),(3,K)) = (2,\ldots,2,3,\ldots,3)$ (k двоек и K троек) - это росток, заданный в некоторых координатах с началом в точке ξ уравнениями вида

$$v = \theta(z,\bar z) + o(2), \quad V = \Theta(z,\bar z) + o(3)$$

где θ - вещественная векторзначная форма однородной степени 2, Θ - вещественная векторзначная форма однородной степени 3, причем обе формы не содержат плюригармонических членов, а $o(j)$ - это сумма слагаемых зависящих от $(z,\bar z,u,U)$ веса, больше чем j. Условие отсутствия плюригармонических членов позволяет записать эти формы в виде

$$\theta(z,\bar z) = \Phi(z,\bar z), \quad \Theta(z,\bar z) = 2Re\ \Psi(z,z,\bar z) = \Psi(z,z,\bar z) + \bar\Psi(\bar z,\bar z,z)$$

где $\Phi(z,\bar z)$ - векторзначная эрмитова форма, а $\Psi(z,z,\bar z)$ - форма бистепени $(2,1)$, полилинейная и симметрическая по двум первым аргументам.

Эримтова $\mathbf{R}^k$-значная форма $\Phi(z, \bar{z})$ в развернутом виде это

$$\Phi(z, \bar{z}) = (\varphi_1\, z \cdot \bar{z}, \dots, \varphi_k\, z \cdot \bar{z}),$$

где $z \cdot \bar{\zeta}$ - стандартное эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$, т.е.

$$z \cdot \bar{\zeta} = z_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + \dots + z_n \cdot \bar{\zeta}_n,$$

$\varphi_j\, z \cdot \bar{z}$ - j-я скалярная эрмитова форма. Далее $\mathbf{C}^K$-значная форма $\Psi(z, z, \bar{z})$ это

$$\Psi(z, z, \bar{z}) = \psi(z, z) \cdot \bar{z} = (\psi_1(z, z) \cdot \bar{z}, \dots, \psi_K(z, \bar{z}) \cdot \bar{z}),$$

где $\psi_j(z, z)$ - это $\mathbf{C}^n$-значная квадратичная форма на $\mathbf{C}^n$.

Тогда *касательная модельная поверхность* к ростку M_ξ это поверхность Q, заданная уравнениями

$$\begin{aligned} &v = \Phi(z, \bar{z}) \\ &V = \Psi(z, z, \bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}, \bar{z}, z) \end{aligned} \tag{1}$$

При этом будем говорить, что ростки, заданные уравнениями вида

$$\begin{aligned} &v = \Phi(z, \bar{z}) + o(2) \\ &V = \Psi(z, z, \bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}, \bar{z}, z) + o(3) \end{aligned}$$

это ростки, *подчиненные* модельной поверхности Q. Ясно, что при этом касательное пространство в начале координат - это $\{v = 0,\ V = 0\}$, а его комплексная часть - это $\{w = 0,\ W = 0\}$. Т.е. CR-размерность равна n и z - это координата, параметризующая комплексную касательную.

Утверждение 1:
(a) Росток порождающего CR-многообразия M в точке ξ и его касательная модельная поверхность Q в начале координат имеют тип $((2, k), (3, K))$ тогда и только тогда, когда координаты эрмитовой формы $\Phi(z, \bar{z}) = (\Phi_1(z, \bar{z}), \dots, \Phi_k(z, \bar{z}))$ вещественно линейно независимы и координаты трилинейной формы $\Psi(z, z, \bar{z}) = (\Psi_1(z, z, \bar{z}), \dots, \Psi_K(z, z, \bar{z}))$ вещественно линейно независимы.
(b) Если условие линейной независимости из пункта (a) не выполнено, то Q имеет бесконечный тип и не является минимальной в начале координат.

Доказательство: Пункт (a) следует из следствия 8.3 работы [1], (b) - очевидно.

Поскольку вещественная размерность пространства эрмитовых форм на пространстве размерности n равна n^2, а вещественная размерность пространства форм вида $2Re\ \Psi(z, z, \bar{z})$ равна $n^2\,(n+1)$, то из условия линейной независимости следует необходимость выполнения неравенств $k \leq n^2, \quad K \leq n^2\,(n+1)$.

Пусть два ростка M_ξ и $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ голоморфно эквивалентны. Тип ростка является голоморфным инвариантом, поэтому их типы совпадают. Пусть их общиий тип равен $((2, k), (3, K))$, поверхности Q и $\tilde{Q}$ - это их касательные модельные поверхности, каждая из которых задается парой форм (Φ, Ψ) и $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$. Пусть, далее,

$$(z \to f(z, w, W),\ w \to g(z, w, W),\ W \to G(z, w, W))$$

голоморфное в окрестности начала обратимое отображение, которое отображает M_ξ на $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ и оставляет начало координат на месте. В дальнейшем мы будем использовать разложения вида $f(z, w, W) = \sum_1^\infty f_j(z, w, W)$, где f_j - это j-я весовая компонента разложения f.

Утверждение 2:
(a) Младшие члены отображения имеют вид

$$\begin{aligned}
&f(z, w, W) = C\ z + o(1),\\
&g(z, w, W) = \rho\ w + o(2),\\
&G(z, w, W) = P\,W + o(3),
\end{aligned}$$

где $C \in GL(n, \mathbf{C}),\ \rho \in GL(k, \mathbf{R}),\ P \in GL(K, \mathbf{R})$, причем

$$\tilde{\Phi}(z, \bar{z}) = \rho^{-1}\ \Phi(Cz, \overline{Cz}), \quad \tilde{\Psi}(z, z, \bar{z}) = P^{-1}\ \Psi(Cz, Cz, \overline{Cz}). \tag{2}$$

(b) Линейное отображение $(z \to C\ z,\ w \to \rho\, w,\ W \to P\,W)$ отображает Q на $\tilde{Q}$, т.е. модельные поверхности голоморфно эквивалентны в том и только том случае, когда они эквивалентны линейно.
Доказательство: Пусть уравнения ростков это

$$\begin{aligned}
&v = \Phi(z, \bar{z}) + \varphi(z, \bar{z}, u, U), \quad V = 2Re\ \Psi(z, z, \bar{z}) + \psi(z, \bar{z}, u, U)\\
&v = \tilde{\Phi}(z, \bar{z}) + \tilde{\varphi}(z, \bar{z}, u, U), \quad V = 2Re\ \tilde{\Psi}(z, z, \bar{z}) + \tilde{\psi}(z, \bar{z}, u, U)
\end{aligned}$$

Тогда соотношения, которые выражают тот факт, что если $(z, w, W) \in M_\xi$, то $(f, g, G) \in \tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&Im\ g = \tilde{\Phi}(f, \bar{f}) + \tilde{\varphi}(f, \bar{f}, Re\ g, Re\ G),\\
&Im\ G = 2Re\ \tilde{\Psi}(f, f, \bar{f}) + \tilde{\psi}(f, \bar{f}, Re\ g, Re\ G) \qquad (3)\\
&\text{при } w = u + i\ \Phi(z, \bar{z}) + \varphi(z, \bar{z}, u), \quad W = U + i\ 2\ Re\ \Psi(z, z, \bar{z}) + \psi(z, \bar{z}, u)
\end{aligned}$$

Отделяя в первом из них компоненты веса 1 и 2, а во втором 1,2 и 3, получаем (a), откуда сразу следует (b). Утверждение доказано.

Заметим, что соотношение (17) задает действие прямого произведения трех линейных групп $GL(n, \mathbf{C}) \times GL(k, \mathbf{R}) \times GL(K, \mathbf{R})$ на пространстве пар форм (Φ, Ψ), которые определяют модельные поверхности данного типа. В силу утверждения 2 любые инварианты этого действия являются голоморфными инвариантами ростка.

Для понимания CR-геометрии ростка большой интерес представляют его голоморфные автоморфизмы. Пусть aut M_ξ - это алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов. Она состоит из ростков вещественных голоморфных векторных полей вида

$$X = 2\ Re \left(\alpha\ \frac{\partial}{\partial z} + \beta\ \frac{\partial}{\partial w} + \gamma\ \frac{\partial}{\partial W} \right) \qquad (4)$$

где (α, β, γ) - голоморфны в окрестности точки ξ и поле X в точках M_ξ касательно к M_ξ. Каждое такое поле порождает локальную однопараметрическую группу обратимых голоморфных отображений ростка в себя. Совокупность порожденных таким образом отображений - это локальная группа автоморфизмов M_ξ, которую мы обозначим $\mathrm{Aut}M_\xi$. В $\mathrm{aut}M_\xi$ можно выделить подалгебру Ли $\mathrm{aut}_\xi M_\xi$, которая состоит из векторных полей, обращающихся в ξ в ноль. Поля из этой подалгебры порождают локальные однопараметрические группы голоморфных преобразований, оставляющих ξ на месте. Эти преобразования образуют локальную подгруппу $\mathrm{Aut}_\xi M_\xi$ в $\mathrm{Aut}M_\xi$.

Введенные выше веса переменных позволяют в алгебре Ли векторных полей в пространстве $\mathbf{C}^N$ ввести градуировку. Для этого соглашение о весах переменных надо распространить на координатные дифференцирования, полагая

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\right] = -1, \quad \left[\frac{\partial}{\partial w}\right] = -2, \quad \left[\frac{\partial}{\partial W}\right] = -3.$$

После этого структуру градуированной алгебры Ли получает и $\mathrm{aut} M_\xi$, которая распадается в прямую сумму градуированных компонент от компоненты веса (-3) и, вообще говоря, до $+\infty$. Алгебра модельной поверхности Q обладает рядом особенностей

Утверждение 3:

(a) Если поле $X = \sum_{-3}^{+\infty} X_j$ принадлежит $\mathrm{aut}\, Q$, то $\forall j\ X_j \in \mathrm{aut}\, Q$.

(b) $\mathrm{aut}\, Q$ содержит поле веса ноль

$$X = 2\, Re \left(z\, \frac{\partial}{\partial z} + 2\, w\, \frac{\partial}{\partial w} + 3\, W\, \frac{\partial}{\partial W} \right)$$

которому соответсвует однопараметрическя подгруппа растяжений

$$z \to e^t\, z, \quad w \to e^{2\,t}\, w, \quad W \to e^{3\,t}\, W$$

(c) Подалгебра $\mathrm{aut}_0\, Q_0$ - это $\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \dots$, т.е. сумма неотрицательных весовых компонент полной алгебры. Подалгебра $\mathcal{G}_- = \mathcal{G}_{-3} + \mathcal{G}_{-2} + \mathcal{G}_{-1}$ порождает группу голоморфных преобразований Q, т.ч. ее орбита начала координат совпадает с орбитой начала координат для полной группы автоморфизмов.

(d) Алгебра Ли конечно-градуирована (в разложении на компоненты конечное число компонент отлично от нуля), тогда и только тогда, когда она конечномерна. В этом случае она состоит из векторных полей с полиномиальными коэффициентами.

(e) Условием того, что поле (4) принадлежит $\mathrm{aut}\ M_\xi$ являются соотношения

$$\begin{aligned} &2\, Re\, (i\, \beta + 2\, \Phi(\alpha, \bar z)) = 0 \\ &2\, Re\, (i\, \gamma + 4\, \Psi(\alpha, z, \bar z) + 2\, \bar\Psi(\bar z, \bar z, \alpha)) = 0 \\ &\text{при } w = u + i\, \tilde\Phi(z, \bar z), \quad W = U + i\, 2\, Re\, \tilde\Psi(z, z, \bar z) \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство: Касательное пространство к Q задается соотношениями

$$\begin{aligned} &Im\, (d\, w) = 2\, Re\, \Phi(d\, z, \bar z) \\ &Im\, (d\, W) = 2\, Re\, (2\, \Psi(d\, z, z, \bar z) + \bar\Psi(\bar z, \bar z, d\, z)) \end{aligned}$$

откуда следует (e). Подстановка не меняет весов w и W, поэтому линейные соотношения (5) это соотношения на каждую градуированную компоненту поля X_j, которая формируется из однородных компонент коэффициентов, а именно $(\alpha_{j+1}, \beta_{j+2}, \gamma_{j+3})$. Это доказывает (a). Пункты (b) и (c) проверяются непосредственно, (d) - следует из (a). Утверждение доказано.

Критерием конечномерности autM_ξ алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов ростка конечного типа является голоморфная невырожденность ([6],[7]). В соответствии с определением, голоморфная вырожденность Q означает существование ненулевого голоморфного векторного поля, т.е. поля вида

$$X = \alpha \, \frac{\partial}{\partial z} + \beta \, \frac{\partial}{\partial w} + \gamma \, \frac{\partial}{\partial W}, \tag{6}$$

где (α, β, γ) - голоморфны в окрестности начала, касательного к Q т.е. с условием

$$\begin{aligned} &\beta = 2\, i\, \Phi(\alpha, \bar{z})) \\ &\gamma = 4\, i\, \Psi(\alpha, z, \bar{z}) + 2\, i\, \bar{\Psi}(\bar{z}, \bar{z}, \alpha)) \\ &\text{при } w = u + i\, \tilde{\Phi}(z, \bar{z}), \quad W = U + i\ 2\ Re\ \tilde{\Psi}(z, z, \bar{z}) \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что $(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. А также то, что выполнение этих соотношений на Q означает их выполнение в окрестности начала координат.

Теорема 4: Необходимым и достаточным условием голоморфной вырожденности Q является существование однородной голоморфной $\mathbf{C}^n$-значной формы на $\mathbf{C}^n$ - $a(z) \neq 0$, степени не выше чем $(n-1)$, такой что для всех $(z,\ \zeta,\ \eta)$ из $\mathbf{C}^n$ вполнены три условия

$$(4.i) \qquad \Phi(\zeta, \bar{a}(\bar{z})) = 0, \tag{8}$$

$$(4.ii) \qquad \Psi(\eta, \zeta, \bar{a}(\bar{z})) = 0, \tag{9}$$

$$(4.iii) \qquad \bar{\Psi}(\bar{a}(\bar{z}), \bar{z}, \zeta) = 0 \tag{10}$$

Доказательство: Зафиксируем $\alpha(z,w,W)$, голоморфное в окрестности нуля. Необходимым и достаточным условием, того что (β,γ) определенные соотношением (7) на Q голоморфны в окрестности начала координат являются касательные уравнения Коши-Римана. Пусть $\zeta \in \mathbf{C}^n$ произвольный вектор. Тогда произвольное CR-векторное поле на Q имеет вид

$$\bar{X}_{\bar{\zeta}} = \zeta\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2\,i\,\bar{\Phi}(\bar{\zeta},z)\,\frac{\partial}{\partial \bar{w}} - 2\,i\,(2\bar{\Psi}(\bar{\zeta},\bar{z},z) + \Psi(z,z,\bar{\zeta}))\,\frac{\partial}{\partial \bar{W}}).$$

Применяя его к соотношениям (7), получаем два соотношения

$$\Phi(\alpha,\bar{\zeta}) = 0 \tag{11}$$

$$\Psi(\alpha,z,\bar{\zeta}) + \bar{\Psi}(\bar{z},\bar{\zeta},\alpha) = 0 \tag{12}$$

Применяя ко второму соотношению $\bar{X}_{\bar{\eta}}$, получим

$$\bar{\Psi}(\bar{\eta},\bar{\zeta},\alpha) = 0. \tag{13}$$

Теперь из (11) получаем

$$\Psi(\alpha,z,\bar{\zeta}) = 0 \tag{14}$$

Выбирая, теперь, ненулевое значение $\alpha(z,w,W)$, удовлетворяющее (12), (13),(14),и подставляя в них $\bar{z} = 0$, получаем аналогичные соотношения с $\alpha(z,u,U) \neq 0$. Если разложить α в степенной ряд по (u,U), то можно получить ненулевое решение (12), (13),(14) для $\alpha = A(z) \neq 0$. Аналогично, разлагая $A(z)$ в сумму однородных форм, получим ненулевое решение в виде однородной формы $a(z)$. Условия (14) на $a(z)$ это однродная система линейных уравнений на координаты формы $a(z)$, коэффициенты которой линейны по z. Наличие ненулевого решения эквивалентно, как известно, тому, что ранг этой систмы не выше $(n-1)$. При этом из формул Крамера можно получить общее решение в виде форм, степени не выше $(n-1)$. Оставшиеся два соотношения (12), (13) представляют собой дополнительные линейные соотношения на коэффициенты полученных форм. Ясно, что наличие решение с таким $a(z) \neq 0$ влечет за собой голоморную вырожденность . Теорема доказана.

Из утверждений 1 и 4 получаем

Теорема 5: $\mathrm{aut}\ Q$ - конечномерна, тогда и только тогда, когда выполнены два условия на формы (Φ, Ψ):
(i) Координатные формы Φ и Ψ - линейно независимы.
(ii) Формы удовлетворяют условиям (4.i), (4.ii) и (4.iii) (из теоремы 4).
Доказательство: Условие (i) влечет минимальность, условие (ii) - голоморфную невырожденность. Откуда получаем конечномерность. Если нарушено любое из этих условий, сразу получаем бесконечномерную группу автоморфизмов. Теорема доказана.

В случае, если для Q выполнены оба условия, (i) и (ii), то мы будем говорить, что модельная поверхность Q и подчиненные ей ростки - *невырожденными.* Как было отмечено выше, условие (i) означает, что поверхность Q и все, подчиненные ей ростки, имеют тип $((2,k),(3,K))$. Отметим также, что условия (4.i) и (4.ii) полностью аналогичны условию голоморфной невырожденности квадратичной модельной поверхности - поверхности типа $(2,k)$ (см.[8]). Эти условия можно формулировать как условие существования ненулевого постоянного вектора, удовлетворяющего соответствующим условиям. Тогда как условие (4.iii) - это условие другого типа. Его решения - это ненулевые однородные формы степени, не выше $(n-1)$. Это является особенностью кубического случая по сравнению с квадратичным. В квадратичном случае голоморфная невырожденность была эквивалентна существованию ненулевого касательного голоморфного поля, имеющего постоянную z-координату. В кубическом случае, который мы здесь рассматриваем, это поле имеет ненулевую z-координату степени меньше n.

Теорема 6: Пусть M_ξ и $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ два ростка типа $((2,k),(3,K))$, т.е. выполнено уловие (i). Тогда
(a) линейное пространство $\mathrm{aut}_0\, Q$ параметризует семейство отображений первого во второй;
(b) если Q голоморфно невырождена, т.е. выполнено условие (ii), то это семейство конечномерно и, в частности,

$$\dim\, \mathrm{aut}_\xi M_\xi \leq \dim\, \mathrm{aut}_0\, Q < \infty.$$

Доказательство: Из рассуждений, проведенных при доказательстве утверждения 2, следует, что любое отображение одного ростка в другой можно разложить в композицию двух отображений. Отображения вида

$$z \to z + f_2 + \ldots, \quad w \to w + f_3 + \ldots, \quad W \to W + G_4 + \ldots \tag{15}$$

и

$$z \to C\, z, \quad w \to \rho\, w, \quad W \to P\, W$$

Заметим, что первое из отображений не меняет форм (Φ, Ψ), определяющих касательную модльную поверхность. Положим $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}) = (\Phi, \Psi)$ и подставим (15) в соотношения (3). Отделяя в первом из соотношений (3) $(\mu+1)$-ю, а во втором $(\mu+2)$-ю весовые компоненты и выделяя главные члены, получим два соотношения вида

$$\begin{aligned} &Re\ (i\ g_{\mu+1}(z, w, W) + 2\ \Phi(f_\mu(z, w, W), \bar{z})) + \cdots = 0 \qquad (16) \\ &Re\,(i\, G_{\mu+2}(z, w, W) + 4\ \Psi(f_\mu(z, w, W), z, \bar{z}) + 2\,\bar{\Psi}(\bar{z}, \bar{z}, f_\mu(z, w, W))) + \cdots = 0 \\ &\text{где } w = u + i\ \tilde{\Phi}(z, \bar{z}),\ W = U + i\ 2\ Re\ \tilde{\Psi}(z, z, \bar{z}) \end{aligned}$$

и многоточие означает сумму выражений, зависящих от $(f_\nu, g_{\nu+1}, G_{\nu+2})$ при $\nu < \mu$. При фиксированных $(\varphi, \psi, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ соотношение (16) можно использовать для рекуррентного вычисления последовательных наборов $(f_\mu, g_{\mu+1}, G_{\mu+2})$, состоящих из компонент отображения. На каждом шаге этого вычисления для определения следующей тройки нужно решить алгебраическую систему линейных уравнений, правая часть, которой вычислена на предыдущием шаге. Решение неоднородной системы линейных уравнений однозначно определено с точностью до выбора решений однородной системы. В силу утверждения 3, пункт (d) пространство решений однородной системы содержится в $\mathrm{aut}_0\, Q$. Теорема доказана.

Это рассуждение (конструкция Пуанкаре, см.[9]), которое применялось в CR-геометрии неоднократно, представляет собой некоторую версию теоремы о неявном отображении для формальных степенных рядов. Пункт (b) полученного утверждения демонстрирует одно из основных свойств модельных поверхностей. Модельная поверхность является самой симметричной в классе подчиненных ей ростков данного типа. Хотя доказанное неравенство является нестрогим, во всех известных ситуациях совпадение размерностей означает, что росток эквивалентен Q. Это, по-видимому, справедливо и в данной ситуации, но доказательство требует дополнительных рассуждений.

Все вполне невырожденные модельные поверхности Q - голоморфно однородны, т.е. начало координат голоморфным автоморфизмом Q может быть переведено в любую другую точку Q. Рассмотрим вопрос о голоморфной однородности модельной поверхности типа $((2,k),(3,K))$, которые, вообще говоря, не являются вполне невырождннами. Если модельная поверхность Q, которая в начале координат имеет тип $((2,k),(3,K))$ однородна, то тот же тип она обязана иметь и во всех остальных точках. Для модельной поверхности Q это условие оказывается и достаточным.

Пусть $\mathcal{H}$ пространство эрмитовых форм на $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{H}_\Phi$ - подпространство, порожденное координатными формами $\Phi(z,\bar{z})$, $\mathcal{H}'_\Phi$ - прямое дополнение, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Phi + \mathcal{H}'_\Phi$ и Π_Φ - проектор на $\mathcal{H}'_\Phi$ вдоль $\mathcal{H}_\Phi$.

Теорема 7:
(a) Подалгебра Ли $\mathcal{G}_- = \mathcal{G}_{-3} + \mathcal{G}_{-2} + \mathcal{G}_{-1}$ алгебры Ли aut$Q$ имеет следующий вид

$$a\,\frac{\partial}{\partial z} + (b + 2\,i\,\Phi(z,\bar{a}))\;\frac{\partial}{\partial w} + (B + 2\,i\,\Psi(z,z,\bar{a}) + \delta'(w,a) + \delta''(w,\bar{a}))\;\frac{\partial}{\partial W}$$

где $\Pi_\Phi(\mathrm{Re}\;\Psi(a,z,\bar{z})) = 0$, а параметры δ' и δ'' однозначно определяются из (19).
(b) Орбита начала координат для группы AutQ_0 голоморфных автоморфизмов ростка поверхности Q в начале координат - Orb_0 это совокупность таких точек $\xi = (a,b,B) \in Q$

$$\mathrm{Orb}_0 = \{(a,b,B) \in Q : \Pi_\Phi(\mathrm{Re};\Psi(a,z,\bar{z})) = 0,\ \forall z\}.$$

(c) Подалгебра $\mathcal{G}_0$ это алгебра Ли группы $\mathbf{G}_0$ которая является подгруппой группы $GL(n,\mathbf{C}) \times GL(k,\mathbf{R}) \times GL(K,\mathbf{R})$, заданной соотношением

$$\Phi(z,\bar{z}) = \rho^{-1}\,\Phi(Cz,\overline{Cz}), \quad \Psi(z,z,\bar{z}) = P^{-1}\,\Psi(Cz,Cz,\overline{Cz}). \qquad (17)$$

(d) Группа $\mathbf{G}_-$, порожденная $\mathcal{G}_- = \mathcal{G}_{-3} + \mathcal{G}_{-2} + \mathcal{G}_{-1}$ это группа Ли, состоящая из треугольно-квадратичных преобразований $\mathbf{C}^N$
Доказательство: Как было отмечено, координаты поля веса j из aut$Q$ имеют вид $(f_{j+1}, g_{j+2}, G_{j+3})$ и удовлетворяют соотношениям (5).
Для $j = -3$ получаем $X_{-3} = (0,0,B)$, где $B \in \mathbf{R}^K$ постоянный вещественный вектор. Для $j = -2$ получаем $X_{-2} = (0,b,Az)$, где $b \in \mathbf{R}^k$ постоянный вещественный вектор и $Az = 0$. Для $j = -1$ получаем $X_{-1} =$

$(a, \beta\, z, \gamma(z,z) + \delta(w))$, где $a \in \mathbf{C}^n$ постоянный вектор. Из первого соотношения (5) получаем $\beta z = 2\, i\, \Phi(z, \bar{a})$. Из второго $\gamma(z,z) = 2\, i\, \Psi(z, z, \bar{a})$, а также соотношение

$$\delta(\Phi(z,\bar{z})) = 4\, \mathrm{Re}\, \Psi(a, z, \bar{z}) \tag{18}$$

Критерием разрешимости соотношения (18) относительно δ является условие

$$\Pi_\Phi(\mathrm{Re}\, \Psi(a, z, \bar{z})) = 0$$

Если это условие выпонено, то, в силу линейной независимости координатных форм Φ линейный оператор δ восстанавливается однозначно. При этом зависимость решения от a - вещественно линейная и мы можем записать, что $\delta(w) = \delta'(w, a) + \delta''(w, \bar{a})$, причем

$$\delta'(\Phi(z,\bar{z}), a) = 2\ \Psi(z, \bar{z}, a) \qquad\qquad \delta''(\Phi(z,\bar{z}), \bar{a}) = 2\ \bar{\Psi}(z, \bar{z}, \bar{a}) \tag{19}$$

Это доказывает (a).

Пусть точка $\xi = (a, b, B) \in Q$, такова что росток Q_ξ эквивалентен Q_0. Перенесем начало координат в эту точку с помощью замены $z \to a + z, \quad w \to b + w, \quad W \to c + W$. В новых координатах уравнения Q получают вид

$$\begin{aligned} &Im\,(w + b) = \Phi(z + a, \bar{z} + \bar{a}) \\ &Im\,(W + B) = 2\ Re\ \Psi(z + a, z + a, \bar{z} + \bar{a}) \end{aligned}$$

которые простыми треугольно-квадратичными заменами сводятся к виду

$$\begin{aligned} &v = \Phi(z, \bar{z}) \\ &V = 2\ Re\ (2\Psi(z, a, \bar{z}) + \Psi(z, z, \bar{z})) \end{aligned} \tag{20}$$

Если хотя бы для одного a и одной из координатных форм эрмитова форма $2\ Re\ (\Psi_j(z, a, \bar{z}))$ не содержится в $\mathcal{H}$, то это меняет тип в соответствующей точке. Действительно (см. следствие 8.3 [1]), это увеличивает кратность числа 2 и, соответственно, уменьшает кратность числа 3. Если же для всех координат тождественно по a эти формы содержатся в $\mathcal{H}$, то добваляя в W линейный член зависящий от w, приводим уравнения

(20) к исходному виду (1). Это доказывает пункты (b) и (d). Пункт (c) следует из пукта (b) утверждения 2. Теорема доказана.

Теорема 8:
(a) Поверхность Q - голоморфно однородна тогда и только тогда, когда ее тип не зависит от точки.
(b) Поверхность Q - голоморфно однородна тогда и только тогда, когда для $\Pi_\Phi(4\,\mathrm{Re}\,\Psi(a, z, \bar{z})) = 0$ для всех $a \in \mathbf{C}^n$. В этом случае Q естественно отождествляется с $\mathbf{G}_-$.
Доказательство: Пусть тип не зависит от точки, тогда как было показано при доказательстве теоремы 7, выполнено условие пункта (b) и Q - однородна. Теорема доказана.

Заметим, что для вполне невырожденной поверхности с числами Хермандера (2,3) условие однородности из теоремы 7 выполнено автоматически, т.к. в этом случае пространство $\mathcal{H}$ совпадает со всем пространством эрмитовых форм.

Учитывая строение $\mathbf{G}_-$ (теорема 7 пункт (d)), полиномиальность векторных полей составляющих $\mathrm{aut}Q$ (утверждение 3 пункт (d)), а также используя прием, восходящий к В.Каупу [10] и примененный в похожей ситуации А.Тумановым [11], получаем

Теорема 9: Группа голоморфных автоморфизмов кубики, невырожденной в смысле выполнения требований (i) и (ii) является конечномерной подгруппой Ли группы бирациональных автоморфизмов $\mathbf{C}^N$, ограниченной степени. Равномерная оценка на степень - это константа $D = D(n, k, K)$.

Как было отмечено, квадратичные модельные поверхности (единственное число Хермандера равное 2) являются формально частным случаем рассмотренного типа $((2, k), (3, K))$ при $K = 0$. С другой стороны, полагая $k = 0$, получаем второй экстремальный случай - поверхность $\mathcal{Q}$ типа $(3, K)$ с единственным числом Хермандера равным 3 (кубическая модельная поверхность). В этом случае координаты пространства делятся на две группы переменных z и W, группа переменных w - исчезает, как и эрмитова форма Φ.

$$V = \Psi(z, z, \bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}, \bar{z}, z) \tag{21}$$

Как полученные выше восемь утверждений будут реализовываться в этом случае?

Ответ следующий: все утверждения с 1-го по 6-е редактируются очевидным образом: следует убрать w и Φ.

Рассуждение из теоремы 7 показывает, что кубическая модельная поверхность может быть однородной тогда и только тогда, когда $\Psi = 0$. Но это бесконечный тип. Т.е. поверхность типа $(3, K)$) *не может быть однородной*. Однако из этого рассуждения можно извлечь более тонкую информацию. А именно, получаем следующий аналог теорем 7 и 8.

Утверждение 10:
(a) Орбита начала координат для группы $\mathrm{Aut}\,\mathcal{Q}_0$ голоморфных автоморфизмов поверхности $\mathcal{Q}$ - это совокупность таких точек

$$\mathrm{Orb}_0 = \{(a, B) \in \mathcal{Q} : 2\,Re\ \Psi(z, a, \bar{z}) = 0,\ \forall z\},$$

(b) Подгруппа $\mathbf{G}_-$ группы автоморфизмов, соответствующая $\mathcal{G}_{-3} + \mathcal{G}_{-2} + \mathcal{G}_{-1}$ состоит из треугольно квадратичных преобразований $\mathbf{C}^N$.
(c) $\mathbf{G}_-$ естественно отождествляется с $\mathrm{Orb}_0 \subset \mathcal{Q}$.
(d) Группа $\mathrm{Aut}\,\mathcal{Q}_0$ голоморфных автоморфизмов кубики, невырожденной в смысле выполнения требований (i) и (ii) является конечномерной подгруппой Ли группы бирациональных автоморфизмов $\mathbf{C}^N$, ограниченной степени.

Вернемся к общему случаю типа $((2, k), (3, K))$. Есть вопросы, которые остались за рамками нашего исследования. Обозначим $\mathcal{G}_+$ подалгебру Ли в $\mathrm{aut}\ Q_0$, порожденную полями положительного веса. Условия невырожденности (i) и (ii) гарантируют, что $\mathcal{G}_+$ конечномерна и состоит из конечного числа градуированных слагаемых, т.е.

$$\mathcal{G}_+ = \mathcal{G}_1 + \cdots + \mathcal{G}_d.$$

Остается открытым вопрос об оценке на d.

Если Q вполне невырождена, то, как доказали Р.Гамель и И.Коссовский [4], $\mathcal{G}_+ = 0$. Если отказаться от условия полной невырожденности, то это не так.

Пример 11: Пусть модельная поверхность Q в $\mathbf{C}^4$ с координатами $(z_1\,, z_2,\ w = u + i\,v,\ W = U + i\,V)$ типа $((2,1),(3,1))$ задана уравнениями

$$v = |z_1|^2, \quad V = 2\,\mathrm{Re}\, z_2^2\, \bar{z}_2.$$

Это прямое произведение двух гиперповерхностей: сферы Q^1 из $\mathbf{C}^2$, автоморфизмы которой хорошо известны, и кубической гиперповерхности Q^2 из $\mathbf{C}^2$ с вырождением в начале координат, рассмотренной в [12]. Алгебра гиперповерхности Q^2 не содержит полей положительного веса. Но алгебра автоморфизмов Q - это прямая сумма алгебр Q^1 и Q^2. А поскольку в алгебру сферы входят поля веса 1 и 2, то это верно и для алгебры Q. Т.е. в этом случае $d = 2$.

Список литературы

[1] Th.Bloom,I.Graham, On Type Conditions for Generic Real Submanifolds of $\mathbf{C}^n$, Inventiones math. 40, 217-243 (1977).

[2] В. К. Белошапка, “Универсальная модель вещественного подмногообразия”, Матем. заметки, 75:4 (2004), 507–522; Math. Notes, 75:4 (2004), 475–488

[3] В. К. Белошапка, “Кубическая модель вещественного многообразия”, Матем. заметки, 70:4 (2001), 503–519; Math. Notes, 70:4 (2001), 457–470.

[4] Р.В.Гаммель, И.Г.Коссовский, Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен “жесткости”, Труды МИРАН, т.253 (2006), 30–45.

[5] M.S.Baouendi, P.Ebenfelt, L.P.Rothschild, Real submanifolds in complex space and their mappings, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ 1999.

[6] Stanton, N., Infinitesimal CR-automorphisms, Amer. J. Math. 118 (1996), 209—233.

[7] M.S.Baouendi, P.Ebenfelt, L.P.Rothschild, CR automorphisms of real analytic CR in complex space, Conun. Anal. Geom. 6(1998), 291—315.

[8] В. К. Белошапка, “Конечномерность группы автоморфизмов вещественно аналитической поверхности”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:2 (1988), 437–442; Math. USSR-Izv., 32:2 (1989), 443–448

[9] H. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, Rend. Circ. Mat. Palermo 23 (1907), 185–220.

[10] Kaup W., Einige Bemerkungen uber polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten // Math. Ann. 1973. Bd. 204. S. 131–144.

[11] Туманов А.Е., Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собствен- ные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 3. С. 651–659.

[12] 3. V. K. Beloshapka, Automorphisms of Dedenerate Hypersurfaces in $\mathbf{C}^2$ and a Dimension Conjecture, Russian Journal of Mathematical Physics, 1997, Volume 4, Issue 3, pp 393-396.