Математические заметки

Том 105 выпуск 3 март 2019

УДК 517.55+512.628.2+517.58

# О сложности дифференциально-алгебраического описания классов аналитической сложности

**В. К. Белошапка**

Цель работы – проследить как нарастает сложность описания классов аналитической сложности (введенных автором в предыдущих работах) при переходе от класса $Cl_1$ к классу $Cl_2$. Для этого приводится описание двух подклассов $Cl_2$, выходящих за рамки $Cl_1$, а именно, $Cl_1^+$ и $Cl_1^{++}$ с точки зрения сложности определяющих их дифференциальных уравнений. Оказалось, что $Cl_1^+$ имеет достаточно простые определяющие соотношения: два дифференциальных полинома дифференциального порядка 5 и алгебраической степени 6 (теорема 1). Тогда как полученный критерий принадлежности функции $Cl_1^{++}$ это одно соотношение порядка 6 и пять соотношений порядка 7, которые имеют степень 435 (теорема 2). В работе обсуждается феномен "падения сложности", в частности, дается явное описание тех функций класса $Cl_1^+$, которые содержатся в $Cl_1$ (теорема 3).

Библиография: 6 названий.

**Ключевые слова:** ???????????????????????

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12056

**1. Введение.** Вопрос представимости аналитических функций суперпозициями функций меньшего числа переменных обсуждался в ряде работ [1], [2].

Рассмотрим строго возрастающую иерархию классов сложности аналитических функций двух переменных $z(x, y)$, определяемых индуктивно на базе функции $x+y$,

$$Cl_0 \subset Cl_1 \subset Cl_2 \subset Cl_n \subset \cdots .$$

$Cl_0$ – это аналитические функции одного переменного ($x$ или $y$); им приписывается сложность $N(z) = 0$, $Cl_1$ – это функции вида $c(a(x) + b(y))$; они имеют сложность $N(z) \leqslant 1$; далее $Cl_{n+1}$ состоит из функций вида

$$C(A_n(x, y) + B_n(x, y)),$$

где $C$ – функция одного переменного, а $A_n$ и $B_n$ – функции из $Cl_n$, они имеют сложность $N(z) \leqslant n+1$. Если же некая функция $z$ не попала ни в один из классов

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-01-00592 а).

$Cl_n = \{z : N(z) \leqslant n\}$, то мы полагаем $N(z) = \infty$. Все классы это дифференциально-алгебраические множества; они имеют определяющие уравнения, которые являются дифференциальными полиномами с целыми коэффициентами. Класс с номером $n$ задается дифференциальными соотношениями, среди которых есть соотношения дифференциального порядка $2^{n+2}-5$. Первый класс $Cl_1$ задается соотношением порядка три $(ln(z'_y/z'_x))''_{xy} = 0$ или

$$d(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z''_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0. \tag{1}$$ {eq1}

Второй класс, т.е. функции вида

$$z(x,y) = s\{c[a(x) + b(y)] + r[p(x) + q(y)]\},$$

задается соотношениями порядка не ниже 11 (см. [3]).

В уравнениях классов по очевидной причине (инвариантность относительно сдвигов) координаты $x$, $y$, и $z$ явно не присутствуют. Пусть $V_k$ – это усеченная $k$ струя, т.е. аффинное пространство, координаты которого – это значения всех производных функции $z$ в точке $(x, y)$ от 1-го порядка до $k$-го включительно, но без самих координат точки $(x, y)$ и без значения $z$. Размерность этого пространства равна $k(k + 3)/2$.

Каждому дфференциально-алгебраическому множеству $M$ соответствует система дифференциально полиномиальных уравнений его определяющих. Сложность этой системы дает представление о сложности самого множества. Сложность такой системы (не путать со сложностью функции) можно охарактеризовать набором из трех натуральных чисел $(k, m, d)$. Здесь $k$ – максимальный дифференциальный порядок уравнений, $m$ – их количество, $d$ – максимальная алгебраическая степень этих уравнений. Эти характеристики определяются системой и неинвариантно связаны с самим множеством $M$. Возможен инвариантный подход основанный на рассмотрении характеристик дифференциального идеала $I(M)$, соответствующего $M$. Однако такой подход представляется нам труднореализуемым и в данной работе мы его не обсуждаем.

В данной заметке мы планируем изучить уравнения двух подклассов $Cl_2$, а именно

$$Cl_1^+ = \{z(x,y) = c(a(x) + b(y)) + p(x)\},$$
$$Cl_1^{++} = \{z(x,y) = c(a(x) + b(y)) + d(x + y)\}.$$

Отметим, что проблема описания этих классов рассматривалась также в [4].

Для того, чтобы было удобнее проследить, как нарастает сложность описания класса $M$, соберем здесь имеющиеся результаты, в том числе, полученные ниже в этой работе.

Для $M = Cl_0 = \{z = a(x)$ или $z = b(y)\}$ этот набор имеет вид

$$k = 1, \qquad m = 1, \qquad d = 2;$$

для $M = Cl_1 = \{z = c(a(x) + b(y)\}$

$$k = 3, \qquad m = 1, \qquad d = 4;$$

для $M = Cl_1^+ = \{z(x,y) = c(a(x)+b(y)) + p(x)\}$, как показывает теорема 1,

$$k = 5, \qquad m = 2, \qquad d = 6;$$

для $M = Cl_1^{++} = \{z(x,y) = c(a(x)+b(y)) + d(x+y)\}$, как показывает теорема 2,

$$k = 7, \qquad m = 6, \qquad d \leqslant 435.$$

Для $M = Cl_2$ у нас нет точного утверждения. Однако можно предложить следующее правдоподобное рассуждение. Посмотрим на образ второго класса в 11-струе. Это образ полиномиального отображения из пространства 11-струй семи функций одного переменного в пространство 11-струй функций двух переменных. Координатные функции этого отображения – это однородные формы степеней $3, 5, \ldots, 23$. Если оценить степень образа через произведение этих степеней – получаем

$$3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 23 \approx 2,5 \cdot 10^{89}.$$

Нетрудно показать, что коразмерность образа не меньше трех. Чтобы получить поверхность коразмерности три как пересечение трех гиперповерхностей, их максимальная степень должна быть не меньше

$$(2,5 \cdot 10^{89})^{1/3} \approx 1,4 \cdot 10^{30}.$$

Общий многочлен такой степени от 77 переменных это объект, который слишком велик для нашей маленькой Вселенной. Число его мономов превосходит $10^{2000}$.

Перейдем к нашим построениям.

**2. Класс $Cl_1^+$.** Начнем с $Cl_1^+$. То, что $z \in Cl_1^+$, равносильно тому, что найдется $p(x)$ такая, что $z(x,y) - p(x)$ принадлежит $Cl_1$. Записывая соотношение, определяющее первый класс, получаем (производные обозначаем индексами)

$$\begin{aligned} &- z_{0,1}p_1^2 z_{1,2} + z_{0,2}z_{1,1}p_1^2 - z_{2,1}z_{0,1}^2 p_1 + 2z_{0,1}z_{1,0}p_1 z_{1,2} - 2z_{0,2}z_{1,1}z_{1,0}p_1 \\ &\qquad + p_2 z_{0,1}^2 z_{1,1} + z_{0,1}^2 z_{1,0}z_{2,1} - z_{0,1}^2 z_{1,1}z_{2,0} - z_{0,1}z_{1,0}^2 z_{1,2} + z_{0,2}z_{1,0}^2 z_{1,1} = 0. \end{aligned}$$

Выразим отсюда $p_2$:

$$\begin{aligned} p_2 = \big(&p_1^2 z_{0,1}z_{1,2} - p_1^2 z_{0,2}z_{1,1} + p_1 z_{0,1}^2 z_{2,1} - 2p_1 z_{0,1}z_{1,0}z_{1,2} + 2z_{0,2}z_{1,1}z_{1,0}p_1 \\ &- z_{0,1}^2 z_{1,0}z_{2,1} + z_{0,1}^2 z_{1,1}z_{2,0} + z_{0,1}z_{1,0}^2 z_{1,2} - z_{0,2}z_{1,0}^2 z_{1,1}\big)/(z_{0,1}^2 z_{1,1}). \end{aligned} \tag{2}$$
{eq2}

Отметим, что если $z$ не содержится в $Cl_1$, то знаменатель не есть тождественный ноль. Поскольку $p$ не зависит от $y$, продифференцировав это выражение по $y$ и приравняв числитель нулю, получим

$$\begin{aligned} (p_1 - z_{1,0})\big(&p_1 z_{0,1}^2 z_{1,1}z_{1,3} - p_1 z_{0,1}^2 z_{1,2}^2 - p_1 z_{0,1}z_{0,2}z_{1,1}z_{1,2} - p_1 z_{0,1}z_{0,3}z_{1,1}^2 + 2p_1 z_{0,2}^2 z_{1,1}^2 \\ &+ z_{0,1}^3 z_{1,1}z_{2,2} - z_{0,1}^3 z_{1,2}z_{2,1} - z_{0,1}^2 z_{1,0}z_{1,1}z_{1,3} + z_{0,1}^2 z_{1,0}z_{1,2}^2 - 2z_{0,1}^2 z_{1,1}^2 z_{1,2} \\ &+ z_{0,1}z_{0,2}z_{1,0}z_{1,1}z_{1,2} + 2z_{0,1}z_{0,2}z_{1,1}^3 + z_{0,1}z_{0,3}z_{1,0}z_{1,1}^2 - 2z_{0,2}^2 z_{1,0}z_{1,1}^2\big) = 0. \end{aligned}$$

Если $z$ не содержится в $Cl_1$, то первый сомножитель не равен нулю тождественно, поэтому можем приравнять к нулю второй. Выражая отсюда $p_1$, получим

$$\begin{aligned} p_1 = -\big(&z_{0,1}^3 z_{1,1}z_{2,2} - z_{0,1}^3 z_{1,2}z_{2,1} - z_{0,1}^2 z_{1,0}z_{1,1}z_{1,3} + z_{0,1}^2 z_{1,0}z_{1,2}^2 - 2z_{0,1}^2 z_{1,1}^2 z_{1,2} \\ &+ z_{0,1}z_{0,2}z_{1,0}z_{1,1}z_{1,2} + 2z_{0,1}z_{0,2}z_{1,1}^3 + z_{0,1}z_{0,3}z_{1,0}z_{1,1}^2 - 2z_{0,2}^2 z_{1,0}z_{1,1}^2\big)/ \\ &(z_{0,1}^2 z_{1,1}z_{1,3} - z_{0,1}^2 z_{1,2}^2 - z_{0,1}z_{0,2}z_{1,1}z_{1,2} - z_{0,1}z_{0,3}z_{1,1}^2 + 2z_{0,2}^2 z_{1,1}^2). \end{aligned} \tag{3}$$
{eq3}

Дифференцируем по $y$, отделяем числитель, убираем ненулевой множитель $z_{01}^2 z_{11}$, получаем:

$$\begin{aligned}
F_1(z) = &-z_{0,1}^3 z_{1,1} z_{1,3} z_{2,3} + z_{0,1}^3 z_{1,1} z_{1,4} z_{2,2} + z_{0,1}^3 z_{1,2}^2 z_{2,3} - z_{0,1}^3 z_{1,2} z_{1,3} z_{2,2}\\
&- z_{0,1}^3 z_{1,2} z_{1,4} z_{2,1} + z_{0,1}^3 z_{1,3}^2 z_{2,1} + z_{0,1}^2 z_{0,2} z_{1,1} z_{1,2} z_{2,3} - 2z_{0,1}^2 z_{0,2} z_{1,1} z_{1,3} z_{2,2}\\
&+ z_{0,1}^2 z_{0,2} z_{1,2} z_{1,3} z_{2,1} + z_{0,1}^2 z_{0,3} z_{1,1}^2 z_{2,3} - 3z_{0,1}^2 z_{0,3} z_{1,1} z_{1,2} z_{2,2}\\
&- z_{0,1}^2 z_{0,3} z_{1,1} z_{1,3} z_{2,1} + 3z_{0,1}^2 z_{0,3} z_{1,2}^2 z_{2,1} - z_{0,1}^2 z_{0,4} z_{1,1}^2 z_{2,2} + z_{0,1}^2 z_{0,4} z_{1,1} z_{1,2} z_{2,1}\\
&- 2z_{0,1}^2 z_{1,1}^2 z_{1,2} z_{1,4} + 3z_{0,1}^2 z_{1,1}^2 z_{1,3}^2 + 2z_{0,1}^2 z_{1,1} z_{1,2}^2 z_{1,3} - 3z_{0,1}^2 z_{1,2}^4\\
&- 2z_{0,1} z_{0,2}^2 z_{1,1}^2 z_{2,3} + 6z_{0,1} z_{0,2}^2 z_{1,1} z_{1,2} z_{2,2} + 2z_{0,1} z_{0,2}^2 z_{1,1} z_{1,3} z_{2,1}\\
&- 6z_{0,1} z_{0,2}^2 z_{1,2}^2 z_{2,1} + 6z_{0,1} z_{0,2} z_{0,3} z_{1,1}^2 z_{2,2} - 6z_{0,1} z_{0,2} z_{0,3} z_{1,1} z_{1,2} z_{2,1}\\
&+ 2z_{0,1} z_{0,2} z_{1,1}^3 z_{1,4} - 10z_{0,1} z_{0,2} z_{1,1}^2 z_{1,2} z_{1,3} + 6z_{0,1} z_{0,2} z_{1,1} z_{1,2}^3 - 6z_{0,1} z_{0,3} z_{1,1}^3 z_{1,3}\\
&+ 6z_{0,1} z_{0,3} z_{1,1}^2 z_{1,2}^2 + 2z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1}^3 z_{1,2} - 6z_{0,2}^3 z_{1,1}^2 z_{2,2} + 6z_{0,2}^3 z_{1,1} z_{1,2} z_{2,1}\\
&+ 8z_{0,2}^2 z_{1,1}^3 z_{1,3} - 3z_{0,2}^2 z_{1,1}^2 z_{1,2}^2 - 6z_{0,2} z_{0,3} z_{1,1}^3 z_{1,2} - 2z_{0,2} z_{0,4} z_{1,1}^4 + 3z_{0,3}^2 z_{1,1}^4 = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

{eq4}

Теперь, продифференцировав (3) по $x$ и приравняв ответ к (2), получим соотношение, которое после деления на ненулевой множитель $z_{01}^3$ принимает вид

$$\begin{aligned}
F_2(z) = &-z_{0,1}^2 z_{1,1}^2 z_{1,3} z_{3,2} + z_{0,1}^2 z_{1,1}^2 z_{2,2} z_{2,3} + z_{0,1}^2 z_{1,1} z_{1,2}^2 z_{3,2} + z_{0,1}^2 z_{1,1} z_{1,2} z_{1,3} z_{3,1}\\
&- z_{0,1}^2 z_{1,1} z_{1,2} z_{2,1} z_{2,3} - 3z_{0,1}^2 z_{1,1} z_{1,2} z_{2,2}^2 + 2z_{0,1}^2 z_{1,1} z_{1,3} z_{2,1} z_{2,2} - z_{0,1}^2 z_{1,2}^3 z_{3,1}\\
&+ 3z_{0,1}^2 z_{1,2}^2 z_{2,1} z_{2,2} - 2z_{0,1}^2 z_{1,2} z_{1,3} z_{2,1}^2 + z_{0,1} z_{0,2} z_{1,1}^2 z_{1,2} z_{3,2} - z_{0,1} z_{0,2} z_{1,1} z_{1,2}^2 z_{3,1}\\
&- 3z_{0,1} z_{0,2} z_{1,1} z_{1,2} z_{2,1} z_{2,2} + 3z_{0,1} z_{0,2} z_{1,2}^2 z_{2,1}^2 + z_{0,1} z_{0,3} z_{1,1}^3 z_{3,2}\\
&- z_{0,1} z_{0,3} z_{1,1}^2 z_{1,2} z_{3,1} - 3z_{0,1} z_{0,3} z_{1,1}^2 z_{2,1} z_{2,2} + 3z_{0,1} z_{0,3} z_{1,1} z_{1,2} z_{2,1}^2\\
&- 2z_{0,1} z_{1,1}^3 z_{1,2} z_{2,3} + 6z_{0,1} z_{1,1}^2 z_{1,2}^2 z_{2,2} + 2z_{0,1} z_{1,1}^2 z_{1,2} z_{1,3} z_{2,1} - 6z_{0,1} z_{1,1} z_{1,2}^3 z_{2,1}\\
&- 2z_{0,2}^2 z_{1,1}^3 z_{3,2} + 2z_{0,2}^2 z_{1,1}^2 z_{1,2} z_{3,1} + 6z_{0,2}^2 z_{1,1}^2 z_{2,1} z_{2,2} - 6z_{0,2}^2 z_{1,1} z_{1,2} z_{2,1}^2\\
&+ 2z_{0,2} z_{1,1}^4 z_{2,3} - 6z_{0,2} z_{1,1}^3 z_{1,2} z_{2,2} - 2z_{0,2} z_{1,1}^3 z_{1,3} z_{2,1} + 6z_{0,2} z_{1,1}^2 z_{1,2}^2 z_{2,1} = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

{eq5}

Теорема 1. *Функция $z(x,y)$ содержится в $Cl_1^+$ тогда и только тогда, когда*

$$F_1(z) = F_2(z) = 0,$$

*где $F_1$ и $F_2$ две различные неприводимые однородные формы алгебраической степени 6 и дифференциального порядка 5 (см. (4) и (5)). Если при этом $d(z) \neq 0$ (см. (1)), то $z \in Cl_1^+ \setminus Cl_1$ и $N(z) = 2$.*

Доказательство. *Необходимость* доказана выше. *Достаточность* следует из того, что условие $F_1(z) = F_2(z) = 0$ в силу обратимости нашего рассуждения позволяет определить такую функцию $p(x)$, что $z(x,y) - p(x)$ принадлежит $Cl_1$.

**3. Класс $Cl_1^{++}$.** Пусть, теперь, $z(x,y) \in Cl_1^{++}$, т.е.

$$z(x,y) = c(a(x) + b(y)) - d(x+y).$$

Записывая уравнение 1-го класса для $z(x,y)+d(x+y)$, получаем

$$\begin{aligned}
&(-z_{1,0}z_{0,1}^2z_{2,1}+z_{1,1}z_{2,0}z_{0,1}^2+z_{1,2}z_{1,0}^2z_{0,1}-z_{1,0}^2z_{1,1}z_{0,2})\\
&\quad+(-z_{0,1}^2z_{2,1}+2z_{0,1}z_{1,0}z_{1,2}-2z_{0,1}z_{1,0}z_{2,1}+2z_{0,1}z_{1,1}z_{2,0}-2z_{0,2}z_{1,0}z_{1,1}+z_{1,2}z_{1,0}^2)d_1\\
&\quad+(z_{0,1}^2z_{1,1}+z_{0,1}^2z_{2,0}-z_{0,2}z_{1,0}^2-z_{1,0}^2z_{1,1})d_2+(-z_{1,0}z_{0,1}^2+z_{0,1}z_{1,0}^2)d_3\\
&\quad+(z_{0,1}z_{1,2}-2z_{0,1}z_{2,1}-z_{0,2}z_{1,1}+2z_{1,0}z_{1,2}-z_{1,0}z_{2,1}+z_{1,1}z_{2,0})d_1^2\\
&\quad+(2z_{0,1}z_{1,1}+2z_{0,1}z_{2,0}-2z_{0,2}z_{1,0}-2z_{1,0}z_{1,1})d_1d_2+(-z_{0,1}^2+z_{1,0}^2)d_1d_3\\
&\quad+(z_{0,1}^2-z_{1,0}^2)d_2^2+(z_{1,2}-z_{2,1})d_1^3+(-z_{0,2}+z_{2,0})d_1^2d_2\\
&\quad+(-z_{0,1}+z_{1,0})d_1^2d_3+(2z_{0,1}-2z_{1,0})d_1d_2^2=0.
\end{aligned}$$

Это соотношение линейно относительно $d_3$. Выражая $d_3$ через $d_1$ и $d_2$ и записывая, что полученное выражение есть функция от $(x+y)$, получаем полиномиально-дифференциальное соотношение вида

$$\begin{aligned}
P(z,d_1,d_2)=d_2^2&(k_2(z)\,d_1^2+k_1(z)\,d_1+k_0(z))\\
&+d_2(l_4(z)\,d_1^4+l_3(z)\,d_1^3+l_2(z)\,d_1^2+l_1(z)\,d_1+l_0(z))\\
&+(m_5(z)\,d_1^5+m_4(z)\,d_1^4+m_3(z)\,d_1^3+m_2(z)\,d_1^2+m_1(z)\,d_1+m_0(z))=0.
\end{aligned}$$

При этом знаменатель, на который мы домножили, это

$$(z_{0,1}-z_{1,0})^2(d_1+z_{1,0})^2(d_1+z_{0,1})^2=0.$$

Полученное выражение имеет дифференциальный порядок 4. Применяя к соотношению $P=0$ $j$-ю степень дифференциального оператора

$$D=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y},$$

получаем последовательность соотношений

$$\begin{aligned}
&P_j(z,d_1,d_2)\\
&\quad=d_2^2(k_{2j}(z)\,d_1^2+k_{1j}(z)\,d_1+k_{0j}(z))\\
&\qquad+d_2(l_{4j}(z)\,d_1^4+l_{3j}(z)\,d_1^3+l_{2j}(z)\,d_1^2+l_{1j}(z)\,d_1+l_{0j}(z))\\
&\qquad+\big(m_{5j}(z)\,d_1^5+m_{4j}(z)\,d_1^4+m_{j3}(z)\,d_1^3+m_{j2}(z)\,d_1^2+m_{j1}(z)\,d_1+m_{j0}(z)\big)=0,
\end{aligned}$$

где каждый из коэффициентов с индексом $j$ это результат применения $D^j$ к соответствующему коэффициенту из $P$. Дифференциальный порядок, при этом, возрастает до $4+j$. Следующий шаг – это исключение $d_2$ из этих соотношений. Результант пары полиномов $at^2+bt+c$ и $At^2+Bt+C$ имеет вид

$$A^2c^2-ABbc-2ACac+ACb^2+B^2ac-BCab+C^2a^2.$$

Полиномы $P$, $P_1$ и $P_2$ неприводимы. Пусть $Q_1(d_1,z)$ и $Q_2(d_1,z)$ – это результанты пар полиномов $(P_1,P)$ и $(P_2,P)$ по переменной $d_2$ соответственно. Каждое из этих выражений это полином от $d_1$ степени 15. Дифференциальные порядки $Q_1$ и $Q_2$ 5 и 6 соответственно. Оба полинома делятся на $(z_{10}-z_{01})^2$, т.е.

$$Q_1(z,d_1)=(z_{10}-z_{01})^2q_1(z,d_1),\qquad Q_2(z,d_1)=(z_{10}-z_{01})^2q_2(z,d_1),$$

полиномы $q_1$ и $q_2$ неприводимы. Как $q_1$, так и $q_2$ это однородные формы от производных $z$ и $d_1$ степени 22. Таким образом, как у $q_1$, так и у $q_2$ коэффициенты, свободные от $d_1$, это однородные формы степени 22, а по мере увеличения степени $d_1$ степени коэффициентов уменьшаются и при $d_1^{15}$ стоят формы степени 7.

Чтобы получить соотношение на $z$, надо сделать последний шаг – исключить $d_1$ из системы $q_1(z, d_1) = q_2(z, d_1) = 0$. Таким соотношением является соотношение

$$R(z) = 0,$$

где $R(z)$ – результант $q_1(z, d_1)$ и $q_2(z, d_1)$ по переменной $q_1$. Этот результант представляет собой определитель матрицы размером $30 \times 30$, составленной из коэффициентов $q_1$ и $q_2$. $R$ – это однородная форма от производных $z$. Чтобы вычислить степень этой формы, достаточно сложить степени форм, стоящих на диагонали соответствующей квадратной матрицы. Получаем

$$d = 15 \times 7 + 15 \times 22 = 435.$$

Дифференциальный порядок $R(z)$ равен 6.

Если $R(z) = 0$, то уравнения $q_1(d_1, z) = 0$ и $q_2(d_1, z) = 0$ имеют общий корень. Пользуясь правилом Крамера, этот корень, в точке общего положения, можно выразить (см., например, [6; следствие 1, с. 20]) как рациональную функцию коэффициентов уравнений $d_1 = M_1(z)$, т.е. как рациональную функцию от производных $z$ . Далее, аналогично получаем рациональные выражения $d_2 = M_2(z)$ и $d_3 = M_3(z)$. Для получения критерия существования функции $d$ осталось записать два условия. Условие того, что $M_1$, $M_2$, $M_3$ это функции от $(x + y)$, а именно

$$D(M_1(z)) = D(M_2(z)) = D(M_3(z)) = 0,$$

а также

$$(M_1(z))'_x - M_2(z) = 0, \qquad (M_2(z))'_x - M_3(z) = 0$$

– условия того, что $(d_1, d_2, d_3)$ являются последовательными производными. Все эти соотношения имеют вид обращения в ноль дифференциально рациональных соотношений. Пусть $(m_1(z), m_2(z), m_3(z))$ – это числители $D(M_1(z))$, $D(M_2(z))$, $D(M_3(z)))$, а $(m_4(z),\ m_5(z))$ – числители $((M_1(z))'_x - M_2(z))$ и $((M_2(z))'_x - M_3(z))$, которые являются дифференциальными полиномами. В итоге, получаем

Теорема 2. *Функция $z \in Cl_1^{++}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет дифференциально полиномиальным соотношениям*

$$R(z) = m_1(z) = m_2(z) = m_3(z) = m_4(z) = m_5(z) = 0,$$

*где алгебраические степени всех полиномов не превосходят* 435, *причем $R$ имеет дифференциальный порядок* 6, *а* $(m_1(z), m_2(z), m_3(z), m_4(z), m_5(z))$ – 7.

Отметим, что рассмотренный здесь подкласс $Cl_1^{++}$ класса $Cl_2$ обладает следующим вполне очевидным свойством. Любая функция $z(x, y) \in Cl_2$, с точностью до преобразований калибровочной псевдогруппы

$$G = \{x \to \alpha(x),\ y \to \beta(y),\ z \to \gamma(z)\}$$

эквивалентна функции из $Cl_1^{++}$.

**4. Феномен падения сложности.** Рассмотрим теперь следующий вопрос, связанный с теоремой 1. Для каких наборов $(a, b, f, g)$ непостоянных функций функция класса $Cl_1^+$ $z(x, y) = f(a(x) + b(y)) + g(x)$ принадлежит $Cl_1$?

Первая очевидная причина – линейность функции $f$, т.е. $f'' = 0$ (**1**-*случай*). Далее можем предполагать, что $a'b'g'f'' \neq 0$. Поскольку $Cl_1$ инвариантен относительно замен $(x \to \alpha(x),\ y \to \beta(y))$, функция $z(x, y) = f(a(x)+b(y))+g(x)$ попадет в первый класс тогда и только тогда, когда туда попадет $w(x, y) = f(x+y)+d(a^{-1}(x))$. Поэтому нам достаточно ответить на вопрос, для каких $r$ и $p$ функция $z = r(x+y)+p(x)$ содержится в $Cl_1$.

Записывая для $z$ уравнение первого класса, получаем

$$- r_3 r_1 p_1^2 + r_2^2 p_1^2 - r_3 r_1^2 p_1 + 2 r_1 r_2^2 p_1 - r_1^2 r_2 p_2 = 0. \tag{6}$$

{eq6}

Этому соотношению можно придать вид (знаменатель не ноль)

$$\frac{p_2}{p_1} = -\frac{p_1 r_1 r_3 - p_1 r_2^2 + r_1^2 r_3 - 2 r_1 r_2^2}{r_1^2 r_2}.$$

Дифференцируя по $y$ и отделяя числитель, получаем

$$-(r_1^2 r_2 r_4 - r_1^2 r_3^2 - 2 r_1 r_2^2 r_3 + 2 r_2^4)(p_1 + r_1) = 0.$$

Второй множитель не может обращаться в ноль тождественно, поэтому

$$r_1^2 r_2 r_4 - r_1^2 r_3^2 - 2 r_1 r_2^2 r_3 + 2 r_2^4 = 0.$$

Заменяя $r(x+y)$ на $r(t)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка. Рассмотрим $r'(t) = s$ как независимое переменное; пусть $r''(t) = R(s)$ – новая неизвестная функция; получим

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} R(s)\right) t^2 - 2\left(\frac{d}{ds} R(s)\right) t + 2R(s) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $R(s) = ms + ns^2$. Подставляя его в (6), получаем

$$\left(\frac{d}{dx} p(x)\right)^2 n - \left(\frac{d}{dx} p(x)\right) m + \frac{d^2}{dx^2} p(x) = 0.$$

Решая, получаем

$$\begin{aligned}
&\text{2-й } \textit{случай} \quad p(x) = \frac{\ln(C_1 \mathrm{e}^{mx} + C_2)}{n} && \text{при} \quad m\,n \neq 0,\\
&\text{3-й } \textit{случай} \quad p(x) = C_1 \mathrm{e}^{mx} + C_2 && \text{при} \quad n = 0, \quad m \neq 0,\\
&\text{4-й } \textit{случай} \quad p(x) = \frac{\ln(C_1 x + C_2)}{n} && \text{при} \quad m = 0, \quad n \neq 0.
\end{aligned}$$

Последняя возможность $m = n = 0$ соответствует $r'' = R = 0$, при этом $r$ – линейна и последняя возможность поглощается 1-м случаем. Решая уравнение для трех последних случаев, получаем

$$\begin{aligned}
&\text{2-й } \textit{случай} \quad r(t) = -\frac{1}{n} \ln(C_3 - n\mathrm{e}^{m\,t}) + C_4,\\
&\text{3-й } \textit{случай} \quad r(t) = C_3 \mathrm{e}^{m\,t} + C_4,\\
&\text{4-й } \textit{случай} \quad r(t) = -\frac{1}{n} \ln(n(x+y) + C_3) + C_4.
\end{aligned}$$

Итак, резюмируем.

Теорема 3. *Пусть имеется пара функций*

$$z_1 = f(a(x) + b(y)), \qquad z_2 = g(x),$$

*где функции* $(a, b, f, g)$ *непостоянны и* $z_1 + z_2 \in Cl_1$. *Тогда, с точностью до преобразований*

$$x \to \alpha(x), \qquad y \to \beta(y), \qquad f(t) \to f(t) + C_1, \qquad g(x) \to g(\alpha(x)) + C_2$$

*все такие пары функций содержатся в следующем списке*:

$$\begin{array}{lll} (1) & z_1 = x + y, & z_2 = p(x), \\ (2) & z_1 = xy, & z_2 = Cx, \\ (3) & z_1 = C_1 \ln(xy + C_2), & z_2 = -C_1 \ln(x + C_2), \\ (4) & z_1 = C \ln(x + y), & z_2 = -C \ln(x). \end{array}$$

Этот результат можно проинтерпретировать следующим образом. Пусть некоторая функция $z$, имеющая представление 2-го класса, есть функция 0-го класса, скажем,

$$z = s\{c[a(x) + b(y)] + C[A(x) + B(y)]\} = q(x).$$

Это равносильно тому, что

$$c[a(x) + b(y)] + p(x) \in Cl_1^+,$$

где $p(x) = -s^{-1} \circ q(x)$ принадлежит $Cl_1$. Тогда теорема 2 дает описание всех наборов $(s, a, b, c, A, B, C)$, так что соответствующая композиция зависит только от $x$. Меняя местами $x$ и $y$ получаем описание всех суперпозиций 2-го класса, представляющие функции, зависящие только от $y$.

Можно поставить следующий аналогичный вопрос. Когда функция 2-го класса имеет сложность 1? Также, как и выше, этот вопрос сводится к вопросу, какие функции из $Cl_1^{++}$ содержатся в $Cl_1$? Или же к вопросу об описании пар функций 1-го класса, так что их сумма есть также функция 1-го класса

$$c(a(x) + b(y)) + C(A(x) + B(y)) = \gamma(\alpha(x) + \beta(y)).$$

Но поскольку у нас нет аналога теоремы 2 для $Cl_1^{++}$, мы не можем дать конструктивный ответ на этот вопрос. Однако, если усилить требование к паре функций 1-го класса, а именно, потребовать, чтобы любая их линейная комбинация оставалась в 1-ом классе, то такие функции ($L$-пары) допускают простое описание (см. [5]).

Вычисления, описанные в работе, осуществлялись средствами системы Maple.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Ostrovski, “Über Dirichletsche Raihen und algebraishe Differentialgleichungen”, *Math. Z.*, **8**:3-4 (1920), 241–298.

[2] А. Г. Витушкин, “13-я проблема Гильберта и смежные вопросы”, *УМН*, **59**:1 (355) (2004), 11–24.

[3] V. K. Beloshapka, “Analytic Complexity of Functions of Two Variables”, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:3 (2007), 243–249.

[4] В. А. Красиков, Т. М. Садыков, “Об аналитической сложности дискриминантов”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2012, 86–101.

[5] V. K. Beloshapka, “Three families of functions of complexity one”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **9**:4 (2016), 416–426.

[6] Е. А. Калинина, А. Ю. Утешев, *Теория исключения*, НИИХ СПбГУ, 2002.

**В. К. Белошапка**
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
*E-mail*: vkb@strogino.ru

Поступило
30.04.2018
После доработки
04.09.2018
Принято к публикации
04.09.2018