О стабилизаторе функции в калибровочной группе

Белошапка В.К.

26.03.2017

УДК 517.55, 517.923, 514.74

Аннотация

В работе доказано, что для размерности d стабилизатора аналитической функции $z(x, y)$ в калибровочной псевдогруппе $\mathcal{G} = \{z(x, y) \to c(z(a(x), b(y))\}$ имеется ровно 4 возможности:
(1) $d = \infty$ и сложность z равна нулю,
(2) $d = 3$ и сложность z равна единице,
(3) $d = 1$ и z эквивалентна функции $r(x + y) - x$, сложности два,
(4) $d = 0$ во всех остальных случаях.

[1]

В [1] была введена в рассмотрение строго возрастающая иерархия классов сложности аналитических функций двух переменных $z(x, y)$, определяемых индуктивно на базе функции $(x + y)$

$$Cl_0 \subset Cl_1 \subset Cl_2 \subset Cl_n \subset \dots$$

Cl_0 – это функции одного переменного (x или y), им приписывается сложность $N(z) = 0$, Cl_1 – это функции вида $c(a(x) + b(y))$, они имеют сложность $N(z) \leq 1$, далее Cl_{n+1} состоит из функций вида $C(A_n(x, y) + B_n(x, y))$, где C – функция одного переменного, а A_n и B_n – функции из

[1]Механико-математический факультет, МГУ,
Воробьевы горы, 119991 Москва, Россия, vkb@strogino.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ
и

Cl_n. Функции попавшие в Cl_n и не попавшие в Cl_{n-1} имеют сложность $N(z) = n$. Если же некая функция z не попала ни в один из классов $Cl_n = \{z : \ N(z) \leq n\}$, то мы полагаем $N(z) = \infty$. Условие $N(z) \leq 1$ равносильно тому, что росток, локально представляющий z, удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$d(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z''_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0 \qquad (1)$$

Эта однородная форма степени 4 является числителем дифференциально-рационального выражения $\delta(z) = (ln(z'_y/z'_x))''_{xy}$.

На совокупности ростков аналитических функций двух переменных действует следующая псевдогруппа $\mathcal{G} = \{z(x,y) \rightarrow c^{-1}(z(a(x), b(y)))\}$, где $(a, \ b, \ c)$ – ростки непостоянных аналитических функций. Эта псевдогруппа сохраняет аналитическую сложность z, поэтому мы называем ее *калибровочной.* В соответствии с общим определением $\mathrm{Stab}(z)$, стабилизатор функции $z(x,y)$, состоит из наборов $(a, \ b, \ c)$, таких что $c(z(a(x), b(y))) = z(x,y)$. В [2], лемма 2 было показано, что стабилизатор функции $(x+y)$ имеет вид

$$a(x) = \frac{x+\alpha}{\lambda}, \quad b(y) = \frac{y+\beta}{\lambda}, \quad c(z) = \lambda\, z - (\alpha+\beta), \quad \lambda \neq 0,$$

в частности, $\dim \mathrm{Stab}(x+y) = 3$. Очевидно, что 3-мерный стабилизатор имеют и все функции, эквивалентные $(x+y)$, т.е. функции вида $z(x,y) = c(a(x) + b(y))$. Такие функции имеют аналитическую сложность равную единице. Если функция имеет сложность ноль, то это означает, что она зависит лишь от одного переменного или, вообще, постоянна. Ясно, что в таком случае стабилизатор имеет размерность равную бесконечности.

Наряду с псевдогруппой $\mathcal{G}$ мы будем рассматривать соответствующую ей алгебру Ли g, состоящую из ростков векторных полей вида

$$V = a(x)\, \frac{\partial}{\partial x} + b(y)\, \frac{\partial}{\partial y} + c(z)\, \frac{\partial}{\partial z} \qquad (2)$$

с аналитическими коэффициентами. Каждому такому полю соответствует локальная 1-параметрическая подгруппа из g. Стабилизатору $\mathrm{Stab}(z)$ в $\mathcal{G}$ соответствует подалгебра $\mathrm{stab}(z) \subseteq g$, состоящая из таких полей V, что

$$V\ z = z'_x(x,y)\ a\,(x) + z'_y(x,y)\ b(y) + c\,(z\,(x,y)) = 0 \qquad (3)$$

stab(z) является линейным пространством, поэтому размерность стабилизатора функции мы будем понимать как $\dim\ \mathrm{stab}(z)$.

Цель данной работы - изучить стабилизаторы функций, которые не попали в два класса, рассмотренные выше, т.е.функции, чья аналитическая сложность больше, чем единица. Пусть $z(x, y)$ некоторая функция и V - поле вида (3) из ее стабилизатора.Всякое поле на прямой в окрестности точки, где оно не обращается в ноль, можно распрямить локальной заменой координаты. Применяя это соображение покоординатно получаем утверждение

Лемма 1: Любое векторное вида (3) заменой координат из $\mathcal{G}$ в точке общего положения (вне изолированных нулей координат) можно привести к виду, где $(a(x),\ b(y),\ c(z))$ - это постоянные равные либо единице, либо нулю.

После этого мы получаем 8 вариантов, в каждом из которых соответствующая 1-параметрическая подгруппа из стабилизатора дана явно. Рассмотрим их последовательно.

1. $(a(x) = 0,\ b(y) = 0,\ c(z) = 0)$, это тривиальный случай $V = 0$, преобразование тождественно.
2. $(a(x) = 1,\ b(y) = 0,\ c(z) = 0)$, преобразования имеют вид $(x \to x + t,\ y \to y,\ z \to z$. В таком случае $z = z(y)$.
3. $(a(x) = 0,\ b(y) = 1,\ c(z) = 0)$, преобразования имеют вид $(x \to x,\ y \to y + t,\ z \to z$. В таком случае $z = z(x)$.
4. $(a(x) = 0,\ b(y) = 0,\ c(z) = 1)$, преобразования имеют вид $(x \to x,\ y \to y,\ z \to z + t$. Таких функций не существует.
5. $(a(x) = 1,\ b(y) = 1,\ c(z) = 0)$, преобразования имеют вид $(x \to x + t,\ y \to y + t,\ z \to z$. В таком случае $z = r(x - y)$.
6. $(a(x) = 1,\ b(y) = 0,\ c(z) = 1)$, преобразования имеют вид $(x \to x + t,\ y \to y,\ z \to z + t$. В таком случае $z = x + b(y)$.
7. $(a(x) = 0,\ b(y) = 1,\ c(z) = 1)$, преобразования имеют вид $(x \to x,\ y \to y + t,\ z \to z + t$. В таком случае $z = a(x) + y$.
8. $(a(x) = 1,\ b(y) = 1,\ c(z) = 1)$, преобразования имеют вид $(x \to x + t,\ y \to y + t,\ z \to z + t$. В таком случае $z = r(x - y) - x$.

Не трудно заметить, что все случаи со 2-го по 7-й не выводят нас за рамки функций, сложности не выше единицы, которые уже были нами рассмотрены. Поэтому интерес представляет только 8-й случай. Заменим в выражении для z переменную y на $(-y)$, это равносильно тому, что при распрямлении поля мы сделали $b = -1$, а не 1. Будем в дальнейшем считать, что Функция записана именно в таком виде. Функция $z = r(x+y) - x$ имеет сложность ноль только если r' либо ноль, либо единица. Пусть сложность z выше нуля. Подставляя $z = r(x+y) - x$ в уравнение первого класса (1), получаем

$$d(r) = r''' \, (r')^2 - 2\,(r'')^2 \, r' - r''' \, r' + (r'')^2 = 0 \qquad (4)$$

Получаем

Лемма 2: (1) Функция $z(x, y)$, чья сложность выше единицы имеет сабилизатор положительной размерности тогда и только тогда, когда она эквивалентна функции вида $z(x, y) = r(x + y) - x$.
(2) Условие, что $z(x, y) = r(x+y)-x$ имеет сложность выше, чем единица эквивалентно неравенству $d(r) \neq 0$.

Мы знаем, что для всякой такой функции стабилизатор содержит поле вида (2), где $a = -b = c = 1$. Покажем, что других полей в стабилизаторе нет. Пусть поле вида (2) - произвольное поле из стабилизатора $z = r(x + y) - x$. Записывая соотношение (3), получаем

$$c\,(r\,(x + y) - x) = -r'(x + y)\,(a(x) + b(y)) + a(x) \qquad (5)$$

В дальнейшем порядок производной будем обозначать нижним индексом. Записывая, что правая часть (5) - это функция от $r(x + y) - x$, получаем

$$-a_1\, {r_1}^2 + b_1\, {r_1}^2 - r_2\, a_0 + r_1\, a_1 - r_2\, b_0 - r_1\, b_1 = 0 \qquad (6)$$

Выражая отсюда b_1 и записывая, что это выражение не зависит от x, получаем

$$a_2{r_1}^4 + a_0r_3{r_1}^2 - 2\,a_0r_1{r_2}^2 + a_1{r_1}^2r_2 - 2\,a_2{r_1}^3 + b_0r_3{r_1}^2 - 2\,b_0r_1{r_2}^2 - \\ a_0r_3r_1 + a_0{r_2}^2 - a_1r_1r_2 + a_2{r_1}^2 - b_0r_3r_1 + b_0{r_2}^2 = 0 \qquad (7)$$

При этом отмечаем, что знаменатель - $r_1^2(r_1-1)^2$ не есть тождественный ноль, т.к. сложность $z = r(x+y) - x$ больше нуля. Выражая из (7) функцию b_0 и записывая, что она не зависит от x, получаем

$$\begin{aligned}
r_4 a_2 {r_1}^4 - 6\, a_2 r_3 {r_1}^3 r_2 + 6\, a_2 {r_1}^2 {r_2}^3 - a_3 r_3 {r_1}^4 + 2\, a_3 {r_1}^3 {r_2}^2 + r_4 a_1 {r_1}^2 r_2 - \\
2\, a_1 {r_3}^2 {r_1}^2 + 2\, a_1 r_3 r_1 {r_2}^2 - 2\, a_1 {r_2}^4 - 2\, r_4 a_2 {r_1}^3 + 8\, a_2 r_3 {r_1}^2 r_2 - 4\, a_2 r_1 {r_2}^3 + \\
2\, a_3 r_3 {r_1}^3 - 3\, a_3 {r_1}^2 {r_2}^2 - r_4 a_1 r_1 r_2 + 2\, a_1 {r_3}^2 r_1 - \\
a_1 r_3 {r_2}^2 + r_4 a_2 {r_1}^2 - 2\, a_2 r_3 r_1 r_2 + a_2 {r_2}^3 - a_3 r_3 {r_1}^2 + a_3 r_1 {r_2}^2 = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

При этом мы освободились от знаменателя $d(r)^2$, который обращается в тождественный ноль только тогда, когда $z = r(x+y) - x$ имеет сложность не выше единицы. Теперь мы можем записать следующее соотношение: производная по y выражения для b_0, полученного из (7) совпадает с выражением для b_1, полученное из (6) и в которое подставлено выражение для b_0, получаем

$$\begin{aligned}
r_4 a_2 {r_1}^6 - 6\, a_2 r_3 {r_1}^5 r_2 + 6\, a_2 {r_1}^4 {r_2}^3 + r_4 a_1 {r_1}^4 r_2 - 2\, a_1 {r_3}^2 {r_1}^4 + 2\, a_1 r_3 {r_1}^3 {r_2}^2 - \\
2\, a_1 {r_1}^2 {r_2}^4 - 3\, r_4 a_2 {r_1}^5 + 16\, a_2 r_3 {r_1}^4 r_2 - 14\, a_2 {r_1}^3 {r_2}^3 - 2\, r_4 a_1 {r_1}^3 r_2 + 4\, a_1 {r_3}^2 {r_1}^3 - \\
2\, a_1 r_3 {r_1}^2 {r_2}^2 + 3\, r_4 a_2 {r_1}^4 - 14\, a_2 r_3 {r_1}^3 r_2 + 11\, a_2 {r_1}^2 {r_2}^3 + \\
r_4 a_1 {r_1}^2 r_2 - 2\, a_1 {r_3}^2 {r_1}^2 + a_1 {r_2}^4 - r_4 a_2 {r_1}^3 + 4\, a_2 r_3 {r_1}^2 r_2 - 3\, a_2 r_1 {r_2}^3 = 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

Отметим, что знаменатель, от которого мы освободились - это то же самое выражение $d(r)^2$. Выражения (8) и (9) - это условия существования функции b. Полагая в (8) и (9) $y = t - x$, мы получаем, что в этих выражениях a и r - это функции разных независимых переменных. Продифференцируем (9) по x, получим соотношение, линейное по (a_2, a_3). Исключим a_3 из этого соотношения и соотношения (8), получим

$$\begin{aligned}
-r_1\,(r_1-1)\,(a_2 {r_1}^8 {r_4}^2 - 12\, a_2 {r_1}^7 r_2 r_3 r_4 + 12\, a_2 {r_1}^6 {r_2}^3 r_4 + \\
36\, a_2 {r_1}^6 {r_2}^2 {r_3}^2 - 72\, a_2 {r_1}^5 {r_2}^4 r_3 + 36\, a_2 {r_1}^4 {r_2}^6 + a_1 {r_1}^6 r_2 {r_4}^2 - \\
2\, a_1 {r_1}^6 {r_3}^2 r_4 - 4\, a_1 {r_1}^5 {r_2}^2 r_3 r_4 + 12\, a_1 {r_1}^5 r_2 {r_3}^3 + 4\, a_1 {r_1}^4 {r_2}^4 r_4 - \\
24\, a_1 {r_1}^4 {r_2}^3 {r_3}^2 + 24\, a_1 {r_1}^3 {r_2}^5 r_3 - 12\, a_1 {r_1}^2 {r_2}^7 - 4\, a_2 {r_1}^7 {r_4}^2 + \\
43\, a_2 {r_1}^6 r_2 r_3 r_4 - 2\, a_2 {r_1}^6 {r_3}^3 - 38\, a_2 {r_1}^5 {r_2}^3 r_4 - 102\, a_2 {r_1}^5 {r_2}^2 {r_3}^2 + \\
174\, a_2 {r_1}^4 {r_2}^4 r_3 - 68\, a_2 {r_1}^3 {r_2}^6 - 3\, a_1 {r_1}^5 r_2 {r_4}^2 + 6\, a_1 {r_1}^5 {r_3}^2 r_4 + \\
11\, a_1 {r_1}^4 {r_2}^2 r_3 r_4 - 32\, a_1 {r_1}^4 r_2 {r_3}^3 - 10\, a_1 {r_1}^3 {r_2}^4 r_4 + 54\, a_1 {r_1}^3 {r_2}^3 {r_3}^2 - \\
42\, a_1 {r_1}^2 {r_2}^5 r_3 + 16\, a_1 r_1 {r_2}^7 + 6\, a_2 {r_1}^6 {r_4}^2 - 57\, a_2 {r_1}^5 r_2 r_3 r_4 +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&6\,a_2{r_1}^5{r_3}^3+45\,a_2{r_1}^4{r_2}^3r_4+102\,a_2{r_1}^4{r_2}^2{r_3}^2-156\,a_2{r_1}^3{r_2}^4r_3+\\
&54\,a_2{r_1}^2{r_2}^6+3\,a_1{r_1}^4r_2{r_4}^2-6\,a_1{r_1}^4{r_3}^2r_4-10\,a_1{r_1}^3{r_2}^2r_3r_4+\\
&28\,a_1{r_1}^3r_2{r_3}^3+9\,a_1{r_1}^2{r_2}^4r_4-40\,a_1{r_1}^2{r_2}^3{r_3}^2+22\,a_1r_1{r_2}^5r_3-\\
&6\,a_1{r_2}^7-4\,a_2{r_1}^5{r_4}^2+33\,a_2{r_1}^4r_2r_3r_4-6\,a_2{r_1}^4{r_3}^3-24\,a_2{r_1}^3{r_2}^3r_4-\\
&42\,a_2{r_1}^3{r_2}^2{r_3}^2+65\,a_2{r_1}^2{r_2}^4r_3-22\,a_2r_1{r_2}^6-a_1{r_1}^3r_2{r_4}^2+\\
&2\,a_1{r_1}^3{r_3}^2r_4+3\,a_1{r_1}^2{r_2}^2r_3r_4-8\,a_1{r_1}^2r_2{r_3}^3-3\,a_1r_1{r_2}^4r_4+\\
&10\,a_1r_1{r_2}^3{r_3}^2-3\,a_1{r_2}^5r_3+a_2{r_1}^4{r_4}^2-7\,a_2{r_1}^3r_2r_3r_4+\\
&2\,a_2{r_1}^3{r_3}^3+5\,a_2{r_1}^2{r_2}^3r_4+6\,a_2{r_1}^2{r_2}^2{r_3}^2-11\,a_2r_1{r_2}^4r_3+4\,a_2{r_2}^6)=0
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Теперь, исключая a_2 из этого соотношения и (9), получим

$$
r_1\,(r_1-1)\,a_1\left(r_3{r_1}^2-2\,{r_2}^2r_1-r_3r_1+{r_2}^2\right)^5=0 \qquad (11)
$$

Таким образом, соотношения (8) и (9) для функции, чья сложность выше единицы, совместны лишь при $a_1=0$, т.е. если $a(x)$ постоянная, обозначим ее m. Тогда из (7) сразу следует, что $b(y)=-m$, а из (5), что $c(z)=m$. И мы получаем поле, пропорциональное исходному полю $(1,\,-1,\,1)$. В результате нами доказана следующая теорема

Теорема: Пусть $stab(z)$ - стабилизатор функции $z(x,y)$ алгебре Ли, соответствующей калибровочной псевдогруппе $\mathcal{G}$, d - размерность $stab(z)$ и $N(z)$ - аналитическая сложность z. Имеется следующий список возможностей.
(1) Если $N(z)=0$, т.е. z зависит от одного переменного или постоянна, то $d=\infty$.
(2) Если $N(z)=1$, то $d=3$. Любая такая функция эквивалентна $(x+y)$, причем $Stab(x+y)$ имеет вид

$$
a(x)=\frac{x+\alpha}{\lambda},\quad b(y)=\frac{y+\beta}{\lambda},\quad c(z)=\lambda\,z-(\alpha+\beta),\quad \lambda\neq 0
$$

(3) Если $N(z)=2$, то $d\leq 1$. Если $d=1$, то z эквивалентна функции вида $z(x,y)=r(x+y)-x$, при этом функция r удовлетворяет трем дифференциальным неравенствам

$$
r'\neq 0,\quad r'\neq 1,\quad r'''\,(r')^2-2\,(r'')^2\,r'-r'''\,r'+(r'')^2\neq 0,
$$

а стабилизатор порожден полем

$$
V=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}
$$

(4) Во всех остальных случаях $d = 0$.

Этот результат объясняет повышенный интерес алгебраистов к функциям двух переменных типа $x + y$ и $x \cdot y$ в ущерб прочим функциям.

Также этот результат можно интерпретировать как результат о симметриях 3-ткани на плоскости [3]. Функции двух переменных $z(x, y)$ можно сопоставить 3-ткань вида

$$x = const, \quad y = const, \quad z(x, y) = const$$

Тогда случай $d = \infty$ не соответствует никакой 3-ткани (нарушено условие трансверсальности семейств). Случай $d = 3$ это то, что называется шестиугольной тканью, ее группа симметрий состоит из всех параллельных переносов и растяжений с единым коэффициентом (гомотетий). Случай $d = 1$ - это ткань вида

$$x = const, \quad y = const, \quad r(x + y) - x = const,$$

которая выдерживает параллельный перенос на любой вектор вида $(t, -t)$. Все остальные ткани имеют 0-мерную группу симметрий.

В заключение некая удивительная, на мой взгляд, аналогия. Пусть M_ξ - росток вещественно аналитического подмногообразия комплексного пространства в точке ξ, $\operatorname{Aut} M_\xi$ - псевдогруппа его голоморфных автоморфизмов и $d = d(M_\xi)$ - ее размерность. В каждом классе таких подмногообразий существуют самые сммметричные - модельные многообразия. Простейшая ситуация, когда M_ξ - это 3-мерная вещественная гиперповерхность пространства $\mathbf{C}^2$ это было изучено А.Пуанкаре ([4]). Тогда модельная гиперповерхность - это 3-мерная сфера $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$. При этом имеет место следующая альтернатива. Либо $d = \infty$ и росток гиперповерхности голоморфно эквивалентен гиперплоскости $\{\operatorname{Im} w = 0\}$, либо $d = 8$ и росток эквивалентен сфере, либо $d =, 5, 4, 3, 2, 1, 0$ (все возможности реализуются). Эта альтернатива удивительным образом напоминает полученную здесь теорему. С точки зрения этой аналогии, сложение $(x+y)$ - это самая симметричная (модельная) бинарная операция, аналог модельной сферы.

Список литературы

[1] V. K. Beloshapka, Analytic Complexity of Functions of Two Variables, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 14, No. 3, 2007, pp. 243 -– 249.

[2] V. K. Beloshapka, Algebraic functions of complexity one, a Weierstrass theorem, and three arithmetic operations, Russian Journal of Mathematical Physics July 2016, Volume 23, Issue 3, pp 343–347.

[3] W. Blashke, Einfuhrung in die Geometrie der Waben, Birkhauser, Basel und Stuttgart, 1955.

[4] Poincare H. Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme. Rend. Circ. Mat. Palermo (1907), 185-220.