Аналитическая сложность: калибровочная группа, ее орбиты и дифференциальные инварианты.

Белошапка В.К.

07.12.2016

УДК 517.55, 517.923, 514.74

Аннотация

Все характеристики аналитической сложности функций инвариантны относительно некоторого естественного действия (калибровочная псевдогруппа $\mathcal{G}$). В работе строятся дифференциальные инварианты $\mathcal{G}$. Решена проблема эквивалентности. Рассмотрены как функции двух, так и большего числа переменных. Ставятся вопросы для дальнейшего изучения.

[1]

Функции двух переменных

Можно ли выразить функцию нескольких, скажем двух, переменных через функции одного переменного с помощью арифметических действий? Т.е. можно ли ее представить с помощью конечного числа операций, каждая из которых есть либо арифметическое действие, либо функция одного переменного. Этот вопрос погружает нас в контекст проблематики 13-й проблемы Гильберта [1]. Как известно, в соответствии с результатами Колмогорова и Арнольда, если под функциями понимать

[1]Механико-математический факультет, МГУ,
Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия, vkb@strogino.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ
и

непрерывные функции, то ответ положительный. Любая непрерывная функция двух переменных есть сумма пяти слагаемых вида $c(a(x)+b(y))$. Если же мы переходим к гладким или аналитическим функциям, общий ответ меняется на отрицательный. После чего остается масса вопросов.

В [4] была введена в рассмотрение строго возрастающая иерархия классов сложности аналитических функций двух переменных $z(x,y)$, определяемых индуктивно на базе функции $(x+y)$

$$Cl_0 \subset Cl_1 \subset Cl_2 \subset Cl_n \subset \dots$$

Cl_0 – это функции одного переменного (x или y), им приписывается сложность $N(z)=0$, Cl_1 – это функции вида $c(a(x)+b(y))$, они имеют сложность $N(z)\le 1$, далее Cl_{n+1} состоит из функций вида $C(A_n(x,y)+B_n(x,y))$, где C – функция одного переменного, а A_n и B_n – функции из Cl_n. Функции попавшие в Cl_n и не попавшие в Cl_{n-1} имеют сложность $N(z)=n$. Если же некая функция z не попала ни в один из классов $Cl_n=\{z:\ N(z)\le n\}$, то мы полагаем $N(z)=\infty$. Условие $N(z)\le 1$ равносильно тому, что росток, локально представляющий z, удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$d(z)=z'_x z'_y(z'''_{xxy}z''_y - z'''_{xyy}z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0 \qquad (1)$$

Эта однородная форма степени 4 является числителем дифференциально-рационального выражения $\delta(z)=(ln(z'_y/z'_x))''_{xy}$.

В пространстве функций двух переменных действует следующая псевдогруппа $\mathcal{G}=\{z(x,y)\to c^{-1}(z(a(x),b(y)))\}$, где $(a,\ b,\ c)$ – ростки непостоянных аналитических функций. Ясно, что это действие не меняет сложности и что функции сложности один – это, в точности, орбита функции $(x+y)$.

Если заменить базовую функцию $x+y$ на другую аналитическую функцию $\varphi(x,y)$, $N(\varphi)>0$, то совершенно так же, стартуя с функций одного переменного, индуктивно, определяем иерархию, порожденную функцией $\varphi(x,y)$

$$Cl_0^\varphi \subset Cl_1^\varphi \subset Cl_2^\varphi \dots \subset Cl_n^\varphi \subset \dots$$

и соответствующую функцию сложности $N^\varphi(z)$. Ясно, что если φ и ψ принадлежат одной орбите $\mathcal{G}$, то $Cl_n^\varphi = Cl_n^\psi$ для всех n и $N^\varphi(z)=N^\psi(z)$. Это означает, что $\mathcal{G}$ играет в задачах аналитической сложности роль калибровочной псевдогруппы и с этим связан интерес к ее изучению. $\mathcal{G}$ это действие прямого произведения трех экземпляров псевдогруппы $G = \{u \to f(u)\}$, а именно $G_a \times G_b \times G_c$, где

$$G_a = \{z(x,y) \to z(a(x),y)\}$$

$$G_b = \{z(x,y) \to z(x,b(y))\}$$

$$G_c = \{z(x,y) \to c^{-1}(z(x,y))\}.$$

Пусть Orb^φ – это орбита функции φ. Если $\psi \in Orb^\varphi$, то мы пишем $\psi \sim \varphi$, это отношение эквивалентности. Нетрудно видеть, что $(x+y) \sim (x-y) \sim xy \sim x/y$. Сформулируем очевидные свойства введенных классов сложности.

Утверждение 1:
(a) Все нулевые классы Cl_0^φ совпадают, они состоят из функций одного переменного.
(b) Все первые классы – это объединение нулевого класса и орбиты базовой функции, т.е. $Cl_1^\varphi = Orb^\varphi \cup Cl_0$.
(c) $N^\varphi(\psi) = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi \sim \varphi$.

Все классы являются дифференциально-алгебраическими множествами. Функции эквивалентные $(x+y)$ обладают некоторой особенностью. А именно, эти функции обладают в $\mathcal{G}$ стабилизатором положительной размерности. Это придает своеобразие дифференциальным условиям, определяющим классы, построенным на базе функций, эквивалентных $(x+y)$, по сравнению с классами, построенными на базе прочих функций без стабилизатора (т.е. со стабилизатором нулевой размерности). Поскольку все классы инвариантны относительно сдвигов по x, по y и по z, то уравнения классов не содержат в явном виде ни x, ни y, ни z. Поэтому, при подсчете размерностей, можно рассмотрение пространства струй свести к рассмотрению усеченной струи, т.е. струи, содержащей, в качестве координат, только производные и не содержащие ни x, ни y, ни z. Тогда такое пространство 3-струй функций двух переменных имеет размерность $2+3+4=9$. Псевдогруппа $\mathcal{G}$ действует в этой 3-струе как $3 \times 3 = 9$-мерная группа. Образ орбиты $(x+y)$ в 3-струе имеет размерность 8, является алебраической гиперповерхностью и задается одним дифференциально-полиномиальным соотношением (1) третьего порядка. В то время как орбита любой функции, не попавшей в $Cl_1^{(x+y)}$,это дополнение к этой гиперповерхности (см.[4]). Поэтому в случае, если базовая функция не эквивалентна $(x+y)$, то первый класс не может быть задан уравнениями в 3-струе. Учитывая, что для такой функции стабилизатор действия $\mathcal{G}$ имеет размерность ноль, вычисляем коразмерность образа Cl_1^{φ} в 4-струе. Имеем $(2+3+4+5)-3\times 4=2$, т.е. образ первого класса в 4-струе это алебраическое подмножество коразмерности два. Это вычисление показывает, что младшая струя, в которой имеются инварианты продолженного действия это 4-струя. Причем в 4-струе $\mathcal{G}$ имеет два инварианта. Наша ближайшая цель выписать эти инварианты.

Если $Z=c^{-1}(z(a(x),b(y)))$, то

$$W=\frac{Z'_x}{Z'_y}=\frac{a'(x)z'_x(a(x),b(y))}{b'(y)z'_y(a(x),b(y))}.$$

Мы видим, что $w=z_{10}/z_{01}$ это пример выражения, которое от действия компоненты G_c не зависит, а действие $G_a\times G_b$ выражается в появлении в множителей a' и b' в некоторых степенях m и n соответственно. Такое выражение мы будем называть *полуинвариантом бистепени (m,n)*. Можно констатировать, что $w=z_x/z_y$ – это полуинвариант бистепени $(1,-1)$. Все дальнейшие выражения мы строим на основе w. Можно написать, что $\delta(z)$ это $\delta(w)$. Далее, для производных будем использовать индексные обозначения. А так же, если $g=(a,b)$, то через $g\circ f(x,y)$ будем обозначать $f(a(x),b(y))$ – результат действия $G_a\times G_b$. Нетрудно проверить, что $\delta(w)=(ln(w))''_{xy}=d(z)/(z_{10}\ z_{01})^2$ – это полуинвариант бистепени $(1,1)$, т.е. $\delta(g\circ z)=a_1\ b_1\ g\circ(\delta(z))$. Пусть, далее,

$$\delta_+(w)=\delta(w)w,\quad \delta_-(w)=\delta(w)w^{-1}$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\delta_+(w)$ - это полуинвариант бистепени $(2,0)$, а $\delta_-(w)$ - бистепени $(0,2)$. Положим, далее, $\mu_+(w)=(ln(\delta_+))'_x,\quad \mu_-(w)=(ln(\delta_-))'_y$, тогда

$$\mu_+(w)=\frac{j_+(z)}{z_{10}\ z_{01}\ d(z)},\quad \mu_-(z)=\frac{j_-(z)}{z_{10}\ z_{01}\ d(z)}$$

где

$$j_+(z)={z_{0,1}}^3{z_{1,0}}^2z_{3,1}-{z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{1,1}z_{3,0}-3\,{z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{2,0}z_{2,1}+3\,{z_{0,1}}^3z_{1,1}{z_{2,0}}^2-$$
$${z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^3z_{2,2}+{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1}z_{2,1}+{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,2}z_{2,0}-{z_{0,1}}^2z_{1,0}{z_{1,1}}^2z_{2,0}+$$

$$z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^3z_{2,1}-z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^2z_{1,1}z_{2,0}+z_{0,1}{z_{1,0}}^3z_{1,1}z_{1,2}-z_{0,2}{z_{1,0}}^3{z_{1,1}}^2$$

$$\begin{gathered}j_-(z)={z_{0,1}}^3{z_{1,0}}^2z_{2,2}-{z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{1,1}z_{2,1}-{z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{1,2}z_{2,0}+{z_{0,1}}^3{z_{1,1}}^2z_{2,0}-\\ {z_{0,1}}^2z_{0,2}{z_{1,0}}^2z_{2,1}+{z_{0,1}}^2z_{0,2}z_{1,0}z_{1,1}z_{2,0}-{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^3z_{1,3}-{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1}z_{1,2}+\\ 3\,z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^3z_{1,2}+z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^2{z_{1,1}}^2+z_{0,1}z_{0,3}{z_{1,0}}^3z_{1,1}-3\,{z_{0,2}}^2{z_{1,0}}^3z_{1,1}\end{gathered}\quad(2)$$

j_+ и j_- – это две однородные формы степени 6. Непосредственная проверка показывает, что $\mu_+(z)$ – это полуинвариант бистепени $(1,0)$, а $\mu_-(z)$ – бистепени $(0,1)$. Теперь мы можем заключить, что

$$J_+(z)=\frac{(\mu_+(w))^2}{\delta_+(w)}=\frac{(j_+(z))^2}{w\,(d(z))^3},\quad J_-(z)=\frac{(\mu_-(w))^2}{\delta_-(w)}=\frac{w\,(j_-(z))^2}{(d(z))^3}$$

– это полуинварианты бистепени $(0,0)$, т.е. инварианты действия $\mathcal{G}$, продолженного в 4-струю. Вот явные выражения в виде дифференциально-рациональных функций от z

$$\begin{gathered}J_+(z)=z_{0,1}({z_{0,1}}^3{z_{1,0}}^2z_{3,1}-{z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{1,1}z_{3,0}-3\,{z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{2,0}z_{2,1}+3\,{z_{0,1}}^3z_{1,1}{z_{2,0}}^2-\\ {z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^3z_{2,2}+{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1}z_{2,1}+{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,2}z_{2,0}-{z_{0,1}}^2z_{1,0}{z_{1,1}}^2z_{2,0}+\\ z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^3z_{2,1}-z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^2z_{1,1}z_{2,0}+z_{0,1}{z_{1,0}}^3z_{1,1}z_{1,2}-z_{0,2}{z_{1,0}}^3{z_{1,1}}^2)^2/\\ z_{1,0}\left({z_{0,1}}^2z_{1,0}z_{2,1}-{z_{0,1}}^2z_{1,1}z_{2,0}-z_{0,1}{z_{1,0}}^2z_{1,2}+z_{0,2}{z_{1,0}}^2z_{1,1}\right)^3\end{gathered}\quad(3)$$

$$\begin{gathered}J_-(z)=z_{1,0}({z_{0,1}}^3{z_{1,0}}^2z_{2,2}-{z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{1,1}z_{2,1}-{z_{0,1}}^3z_{1,0}z_{1,2}z_{2,0}+{z_{0,1}}^3{z_{1,1}}^2z_{2,0}-\\ {z_{0,1}}^2z_{0,2}{z_{1,0}}^2z_{2,1}+{z_{0,1}}^2z_{0,2}z_{1,0}z_{1,1}z_{2,0}-{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^3z_{1,3}-{z_{0,1}}^2{z_{1,0}}^2z_{1,1}z_{1,2}+\\ 3\,z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^3z_{1,2}+z_{0,1}z_{0,2}{z_{1,0}}^2{z_{1,1}}^2+z_{0,1}z_{0,3}{z_{1,0}}^3z_{1,1}-3\,{z_{0,2}}^2{z_{1,0}}^3z_{1,1})^2/\\ z_{0,1}\left({z_{0,1}}^2z_{1,0}z_{2,1}-{z_{0,1}}^2z_{1,1}z_{2,0}-z_{0,1}{z_{1,0}}^2z_{1,2}+z_{0,2}{z_{1,0}}^2z_{1,1}\right)^3\end{gathered}\quad(4)$$

Эти инварианты J_+ и J_- определены в дополнении к первому классу по сложению - $Cl_1^{(x+y)}$.

Если J инвариант, то J'_x и J'_y – это полуинварианты бистепеней $(1,0)$ и $(0,1)$. Это означает, что, если положить

$$D_x=\frac{1}{\mu_+}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{z_{10}\;z_{01}\;d(z)}{j_+(z)}\;\frac{\partial}{\partial x},\quad D_y=\frac{1}{\mu_-}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{z_{10}\;z_{01}\;d(z)}{j_-(z)}\frac{\partial}{\partial y}$$

то каждый из этих дифференциальных операторов является оператором инвариантного дифференцирования, т.е. переводит инвариант k-струи в инвариант $(k+1)$-струи. Таким образом из J_+ и J_- с помощью этих операторов мы получаем бесконечный набор инвариантов $\mathbf{J}$. Размерность орбиты функции общего положения в 4-струе равна двум. J_1 и J_2 функционально независимы, поэтому – это полная система инвариантов 4-струи. Продолжая наш подсчет нетрудно убедиться, что при переходе к 5-струе коразмерность становиться равной 5-ти, т.е. для полноты требуется еще три инварианта порядка 5.

Для того, чтобы убедиться в том, что построенная система дифференциальных инвариантов полна достаточно убедиться в их функциональной независимости. Вычислим J_+ и J_- для $z = a(x) + xb(y)$. Получаем

$$J_+(z) = -\frac{\left(a_3xa_1 - {a_2}^2x + a_3xb_0 - a_2a_1 - a_2b_0\right)^2}{x{a_2}^3\left(a_1 + b_0\right)}$$

$$J_-(z) = -\frac{\left(-2\,b_2a_1 - 2\,b_2b_0 + 3\,{b_1}^2\right)^2\left(a_1 + b_0\right)}{{b_1}^4a_2x},$$

теперь, вычисляя якобиан (J_+, J_-) по (a_3, b_2), видим, что он отличен от тождественного нуля. Т.е. J_+ и J_- функционально независимы. Далее, вычисляя якобиан отображения $(J_+, J_-, D_x(J_+), D_y(J_+), D_y(J_-))$ по переменным $(a_2, a_3, a_4, b_2, b_3)$, убеждаемся, что он отличен от тождественного нуля и, тем самым, этот набор так же функционально независим и, следовательно полон.

При переходе от (k-1)–струи к струе порядка k требуется $(k-2)$ новых функционально независимых инвариантов. По-видимому, $\mathbf{J}$ – это полная система инвариантов продолженного действия $\mathcal{G}$ в струи всех порядков. Их количество превосходит необходимое число независимых инвариантов. Но для доказательства полноты нужно проверить функциональную независимость инвариантов.

Итак, нами получена следующая теорема.

Теорема 2:

$$(a)\quad J_+(z) = \frac{(\mu_+(w))^2}{\delta_+(w)} = \frac{z_{01}\,(j_+(z))^2}{z_{10}\,(d(z))^3},\quad J_-(z) = \frac{(\mu_-(w))^2}{\delta_-(w)} = \frac{z_{10}\,(j_-(z))^2}{z_{01}\,(d(z))^3}$$

– это полная система дифференциальных инвариантов действия $\mathcal{G}$ в 4-струе. Как рациональные функции J_+ и J_- – это отношения однородных форм степени 13.

$$(b)\quad D_x = \frac{1}{\mu_+}\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{z_{10}\ z_{01}\ d(z)}{j_+(z)}\ \frac{\partial}{\partial x},\quad D_y = \frac{1}{\mu_-}\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{z_{10}\ z_{01}\ d(z)}{j_-(z)}\ \frac{\partial}{\partial y}$$

– это операторы инвариантного дифференцирования.
(c) Набор пяти инвариантов $(J_+, J_-, D_x(J_+), D_y(J_+), D_y(J_-))$ - это полный набор инвариантов 5-струи.

Пусть $\sigma = (x \to y,\ y \to x)$ – перестановка координат и $\sigma \circ z(x,y) = z(y,x)$. Вот свойства построенной системы полуинвариантов, по отношению к симметрии σ.

$\sigma \circ w(z) = w^{-1}(\sigma \circ z), \quad \sigma \circ \delta(w) = -\delta(\sigma \circ w), \quad \sigma \circ d(z) = -d(\sigma \circ z),$
$\sigma \circ \delta_+(w) = -\delta_-(\sigma \circ z), \quad \sigma \circ \mu_+(z) = -\mu_-(\sigma \circ z),$
$\sigma \circ j_+(z) = j_-(\sigma \circ z), \quad \sigma \circ J_+(z) = -J_-(\sigma \circ z)$
$\sigma \circ (D_x(z)) = -D_y(\sigma \circ z))$

Сложение коммутативно, $\sigma \circ (x+y) = (x+y)$, поэтому все классы $Cl_n^{(x+y)}$, построенные на базе сложения инвариантны относительно действия σ и $N^{(x+y)}(z(x,y)) = N^{(x+y)}(z(y,x))$. Это утверждение легко обобщить.

Утверждение 3: Классы, построенные на базе φ инвариантны относительно симметрии σ тогда и только тогда, когда $\varphi(y,x) \sim \varphi(x,y)$ (подразумевается, что росток определен в окрестности точки диагонали $x = y$). При этом $N^{\varphi}(z(y,x)) = N^{\varphi}(z(x,y))$ для всех z.

Покажем, что без этого условия утверждение перестает быть верным. Положим $\varphi = x^2 + xy$. Эта функция, как не трудно убедиться, имеет сложность 2 по отношению к $(x+y)$. Если $Cl_1^{(x^2+xy)}$ симметричен, то $(y^2 + xy)$ эквивалентна $(x^2 + xy)$, т.е. найдется $(a,b,c) \in \mathcal{G}$, т.е. три непостоянные функции одного переменного т.ч. на некотором открытом множестве имеет место тождество

$$(a(x))^2 + a(x)\ b(y) = c(y^2 + xy)$$

Локальное условие существования c (постоянство на линиях уровня $(y^2 + xy)$) это

$$a'(x)\ (2a(x) + b(y))\ (x + 2y) = a(x)\ b'(y)\ y \tag{5}$$

Прологарифмируем обе части (5) и возьмем смешанную производную по xy, получим

$$\frac{a'(x)\, b'(y)}{(2\, a(x) + b(y))^2} + \frac{1}{(x+2y)^2} = 0$$

Зафиксируем $y = y_0$, т.ч. $b'(y_0) \neq 0$. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка на $a(x)$ с разделяющимися переменными, решая которое убеждаемся, что $a(x)$ – это дробно-линейное выражение, аналогично с $b(y)$. Итак,

$$a(x) = \frac{px+q}{rx+s}, \quad b(y) = \frac{Py+Q}{Ry+S},$$

причем $ps - rq$ и $PS - RQ$ – отличны от нуля. Подставим эти выражения в (5) и приравняем числитель к нулю. Это многочлен от x и y. Записываем условия равенства нулю коэффициентов. Коэффициент при x^3y – это $-(PS-QR)pr^2$. Первый случай – $(r = 0,\ p \neq 0,\ s \neq 0)$. Тогда коэффициент при x^2y^2 равен $2R^2p^2$, т.е. $R = 0$, но коэффициент при x^2 это $4Sp^2$, а это означает, что b постоянна. Противоречие. Второй случай $(p = 0,\ r \neq 0,\ q \neq 0)$. Коэффициент при y это $4S^2qr$, откуда следует $S = 0$. Свободный член – Qs^2, т.е. $Q = 0$, откуда следует, что b постоянна. Противоречие. Итак, таких (a, b, c) не существует и $Cl_1^{(x^2+xy)}$ не инвариантен относительно симметрии σ.

Фиксируем функцию двух переменных φ. Теперь для некоторой функции $z(x, y)$ задаем вопрос, принадлежит ли она первому классу в иерархии, построенной на базе φ? Положительный ответ, в соответствии с определением, означает, что найдутся три аналитических функций одного переменного (a, b, c), такие что имеется представление вида $z(x, y) = c(\varphi(a(x), b(y)))$. Если считать, что функции a и b известны, то проверить, существует ли для данной функции z подходящая функция c равносилен тому, что z постоянна на линиях уровня $\varphi(a(x), b(y))$, а это, в свою очередь, можно записать в виде дифференциального соотношения

$$\frac{z_{10}}{a_1\varphi_{10}} - \frac{z_{01}}{b_1\varphi_{01}} = 0$$

Выражая из него b_1 и записывая условие независимости b_1 от x, получаем условие которое не содержит b и имеет вид линейного соотношения между a_2, a_1, a_1^2, коэффициенты которого зависят от z и от φ. Выражая из этого соотношения a_2/a_1 и дифференцируя полученное соотношение по y, подставляя в ответ имеющееся выражение для b_1 через a_1, мы получаем выражение для a_1^2 через z и φ. Дифференцируя это соотношение по y получаем соотношение 4-го порядка, не содержащее функций (a, b, c). Поскольку выражения для a_1 и a_2 должны быть согласованы, то необходимое и достаточное условие существования (a, b, c) – это два соотношения порядка четыре. Но здесь мы можем не выписывать эти соотношения, а сослаться на то, что два соотношения, связывающие z и φ у нас уже есть. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 4 (общие уравнения 1-го класса): Пусть φ не принадлежит $Cl_1^{(x+y)}$, (т.е. φ – функция общего положения), тогда $z(x, y) \in Cl_1^{\varphi}$ тогда и только тогда, когда

$$J_+(z) = J_+(\varphi) \quad \text{и} \quad J_-(z) = J_-(\varphi).$$

Это утверждение для логической завершенности можно дополнить давно известным результатом: $z(x, y)$ принадлежит $Cl_1^{(x+y)}$, тогда и только тогда, когда $d(z) = 0$ (см.[4]).

На приведенное построение можно посмотреть с еще одной точки зрения. А именно, существование этих трех функций $g = (a, b, c^{-1})$ означает, что z и φ эквивалентны по модулю $\mathcal{G}$, т.е. существует $g \in \mathcal{G}$, такая что $z = g \circ \phi$. Итак, полученный результат дает полное решение проблемы эквивалентности.

Теорема 5:
(a) Если $f = const$,то $g \sim f$ тогда и только тогда, когда $g = const$. Канонический представитель этого класса $f = 0$, дифференциальное условие – $\{f'_x = f'_y = 0\}$.
(b) Если f – непостоянная функция одного переменного, то $g \sim f$ тогда и только тогда, когда g – непостоянная функция того же переменного. Канонические представители – x и y, дифференциальные условия – одна из первых производных равна нулю, другая – не равна.
(c) Если g – не эквивалентна 0, x или y, то $g \sim (x + y)$ тогда и только тогда, когда $d(g) = 0$. Это функции сложности один в иерархии, построенной на базе $(x + y)$.
(d) Если f и g попали ни в один из предыдущих пунктов (функции об-

щего положения), то $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $J_+(f) = J_+(g)$ и $J_-(f) = J_-(g)$.

С каждой функцией $z(x, y)$ можно связать 3-ткань на плоскости (см.[2]), а именно $(x = const, \quad y = const, \quad z(x, y) = const)$. Ткани принято изучать с точностью до локально обратимых преобразований плоскости, тогда плоская 3-ткань – это три трансверсальных семейства $(x(u, v) = const, \quad y(u, v) = const, \quad z(u, v) = const)$ Преобразования $\mathcal{G}$, в такой интерпретации, это простто изоморфизм ткани.

Тогда теорема 5, точнее ее пункты (c) и (d) дают решение проблемы эквивалентности 3-тканей. Пункт (c) – это критерий того, что ткань эквивалентна шестиугольной, а (d) – это критерий эквивалентности двух не шестиугольных тканей.

Функции многих переменных

Построения предыдущего пункта (иерархия, сложность, калибровочная псевдогруппа) можно распространить на функции нескольких, т.е. $m > 2$, как это было сделано в [5]. Этот подход имеет жаргонное название "суперпозиции типа $(m \to 1)$".

Зафиксируем, в качестве базовой функции, некоторую аналитическую функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$, которая зависит от всех своих переменных, т.е. ни одна из частных производных φ'_{x_j} не есть тождественный ноль. Иерархия классов $\mathbf{Cl}^{\varphi}$ определяется вполне аналогично: Cl_0 – это функции одного переменного, Cl_{n+1} состоит из функций вида

$$c^{-1}(\varphi(A_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, A_m(x_1, \ldots, x_m))),$$

где $A_j \in Cl_n$. Аналогично определяем функцию сложности, пишем $N^{\varphi}(z) = n$ если $z \in Cl_n^{\varphi} \setminus Cl_{n-1}^{\varphi}$. Таким образом определенная иерархия представляет собой строго возрастающую последовательность дифференциально-алгебраических множеств, т.е. каждый класс есть совокупность аналитических решений по z системы дифференциальных полиномов от z и φ с целыми коэффициентами. Далее также как и раньше определяем действие калибровочной псевдогруппы $\mathcal{G} = G \times \ldots \times G$ ($(n+1)$ сомножитель), где $G = \{t \to f(t)\}$, а f – аналитическая функция одного переменного t. А именно, если $g = (a_1, \ldots, a_n, c)$, то $g \circ z(x_1, \ldots, x_n) = c^{-1}(z(a_1(x_1), \ldots, a_n(x_n))$.Это действие, очевидно, сохраняет и классы, и сложность.

Утверждение 1 преносится на многомерный случай дословно.

Утверждение 1':
(a) Все нулевые классы Cl_0^{φ} совпадают, они состоят из функций одного переменного.
(b) Все первые классы – это объединение нулевого класса и орбиты базовой функции, т.е. $Cl_1^{\varphi} = Orb^{\varphi} \cup Cl_0$.
(c) $N^{\varphi}(\psi) = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi \sim \varphi$.

Посчитаем размерности. Размерность усеченной 1-струи равна m, это число первых производных. Число вторых производных – $m(m+1)/2$. Итого размерность 2-струи равна $m(m+3)/2$. С другой стороны размерность продолжения $\mathcal{G}$ в 2-струю равна $2(m+1)$. Нетрудно убедиться, что если, $m > 2$ то $m(m+1)/2 > 2(m+1)$. Орбита функции общего положения (т.е. с нуль-мерным стабилизатором) имеет ту же размерность $2(m+1)$ и коразмерность $m^2 - m - 4$. Это означает, что начиная с 3 -струи продолжение $\mathcal{G}$ имеет дифференциальные инварианты.

В частности, если $m = 3$, то 2-струя имеет размерность 9, орбита функции общего положения имеет размерность 8 и коразмерность 1. Таким образом, $\mathcal{G}$ при $m = 3$ имеет один инвариант. При этом орбита суммы $(x_1 + x_2 + x_3)$ – это особая орбита, она имеет размерность 7 и коразмерность 2.

Найдем этот единственный инвариант в 2-струе функций от трех переменных. Пусть $w(x, y, z)$ – функция трех переменных, $g = (a, b, c, d)$ элемент калибровочной группы. Тогда $W = g \circ w = d^{-1}(w(a(x), b(y), c(z)))$ - действие g на w. Имеем

$$\frac{W'_x}{W'_z} = \frac{w'_x\ a'}{w'_z\ c'}, \quad \frac{W'_y}{W'_z} = \frac{w'_y\ b'}{w'_z\ c'},$$

далее

$$\left(\frac{W'_x}{W'_z}\right)'_y = \left(\frac{w'_x}{w'_z}\right)'_y \frac{a'\ b'}{c'}, \qquad \left(\frac{W'_y}{W'_z}\right)'_x = \left(\frac{w'_y}{w'_z}\right)'_x \frac{a'\ b'}{c'},$$

поэтому выражение

$$I = \left((\frac{w'_x}{w'_z})'_y \right) / \left((\frac{w'_y}{w'_z})'_x \right) \tag{6}$$

является инвариантом действия $\mathcal{G}$. Для функций из орбиты $(x + y + z)$ этот инвариант не определен. Уравнения, определяющие орбиту суммы, нетрудно указать. Это равенство нулю числителя и знаменателя дроби (6). Итак,

Теорема 6: (a) Пусть $\varphi(x, y, z)$ функция, эффективно зависящая от всех трех переменных и не эквивалентная $(x + y + z)$. Тогда ее орбита в 2-струе задается уравнением $I(w(x, y, z)) = I(\varphi(x, y, z))$.
(b) Орбита $(x + y + z)$ в 2-струе задается двумя уравнениями

$$\left(\frac{w'_x}{w'_z}\right)'_y = 0 \quad \left(\frac{w'_y}{w'_z}\right)'_x = 0$$

Отметим, что уравнения из пункта (b) являются лишь необходимыми условиями принадлежности функции $Cl_1^{(x+y+z)}$. Достаточные условия, как было показано в [5], содержат также соотношения третьего порядка.

Открытые вопросы

Как было отмечено выше, сложность функции φ относительно функции ψ - $N^{\psi}(\varphi)$ не меняется под действием $\mathcal{G}$. А именно, если g_1 и g_2 – элементы $\mathcal{G}$, то

$$N^{\psi}(g_1 \circ \varphi) = N^{g_2 \circ \psi}(\varphi) = N^{g_2 \circ \psi}(g_1 \circ \varphi) = N^{\psi}(\varphi)$$

Таким образом, относительная сложность – это функция, корректно определенная на орбитах действия $\mathcal{G}$. Если рассматривать отношение эквивалентности, порожденное действием $\mathcal{G}$, как аналог равенства, то можно предложить отношение, которое будет являться аналогом неравенства. Рассмотрим на аналитических функциях нескольких переменных следующее отношение $\psi \preceq \varphi$

Определение: Пишем $\psi \preceq \varphi$ в случае, если $\varphi \in \mathbf{Cl}^{\psi}$, т.е. если функция φ содержится в иерархии, построенной на базе функции ψ. При этом говорим, что ψ не сложнее φ.

Для того, чтобы убедиться в том, что введенное таким образом отношение является отношением частичного порядка, необходимо проверить выполнение трех условий.

Рефлексивность: $\forall\, \varphi \quad \varphi \preceq \varphi$.
Антисимметричность: $\forall\, \varphi, \psi$ если $\varphi \preceq \psi$ и $\psi \preceq \varphi$, то $\varphi \sim \psi$.
Транзитивность: $\forall\, \varphi, \chi, \psi$ если $\varphi \preceq \chi$ и $\chi \preceq \psi$, $\varphi \preceq \psi$.

С рефлексивностью и транзитивностью, очевидно, все в порядке.

Вопрос 1: Удовлетворяет ли отношение $\psi \preceq \varphi$ второму условию, условию антисимметричности?

Если бы это утверждение имело место, то оно было бы вполне аналогично теореме Кантора-Бернштейна в теории множеств.

Нетрудно видеть, что если $N^{\varphi}(\psi) = 1$, то $N^{\psi}(\varphi) = 1$, т.е. в этом случае $N^{\varphi}(\psi) = N^{\psi}(\varphi)$. Пусть теперь $\varphi = (x + y)$, а $\psi = x^2 + xy$. Мы знаем, что $N^{(x+y)}(x^2 + xy) = 2$.

Вопрос 2: Верно ли, что $N^{(x^2+xy)}(x + y) < \infty$?

Если ответ на первый вопрос положителен, то на второй – отрицателен. Действительно, $(x + y) \preceq (x^2 + xy)$. Если $N^{(x^2+xy)}(x + y) < \infty$, то $(x^2 + xy) \preceq (x + y)$, и мы бы получили, что $(x + y) \sim (x^2 + xy)$, а это не верно. Можно предложть экстремальную модификацию вопроса № 2. Как показал А.Островский [3], обобщенная ζ-функция Римана

$$\zeta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$$

не является дифферениально-алгебраической функцией и, соответственно, $N^{(x+y)}(\zeta(x, y)) = \infty$.

Вопрос: Верно ли, что $N^{\zeta(x,y)}(x + y) = \infty$?

К счастью, на этот вопрос можно ответить сразу. Это верно. Т.е. бесконечная сложность, в этой ситуации, является взаимной.
Доказательство: Пусть $(x+y) \in Cl^{\zeta}$ и $N^{\zeta}(x+y) = n$. Поскольку условие $z(x, y) \in Cl^{\zeta}_n$ имеет вид системы дифференциальных полиномов от z и ζ, то подставляя $z = x + y$ получаем дифференциальную алгебраичность $\zeta(x, y)$. Противоречие.

Для функций двух переменных выше мы выписали два дифференциальных инварианта 4-струи (J_+, J_-) и два оператора инвариантного дифференцирования (D_x, D_y), которые порождают набор инвариантов в струях более высоких порядков.

Вопрос 3: Верно ли, что система инвариантов

$$J^k(z) = \{D_x^p D_y^q J_+(z), \quad p+q \le k-4, \quad D_x^p J_-(z), \quad p \le k-4\}$$

является функционально полной системой инвариантов k-струи?

Для $k \le 5$ это было показано выше.

Все классы сложности инвариантны относительно действия $\mathcal{G}$. Поэтому, при положительном ответе на вопрос 3, дифференциальные соотношения, определяющие классы сложности – это полиномиальные соотношения от переменных $J(z)$ и $J(\varphi)$ (φ – базовая функция). А если базовая функция это $(x+y)$, то только от $J(z)$. Известно, что в 11-струе имеется три соотношения, которым удовлетворяют функции из $Cl_2^{(x+y)}$.

Задача 4: Найти эти три полинома от 44 переменных

$$J^{11}(z) = \{D_x^p D_y^q J_+(z), \quad \text{где } p+q \le 7 \quad \text{и} \quad D_x^p J_-, \quad \text{где } p \le 7\},$$

определяющие второй класс Cl_2^{x+y}.

Отметим, в связи с этим вопросом, что в [6] был описан алгоритм построения дифференциального полинома, обращающегося в ноль на функциях второго класса.

Список литературы

[1] А. Г. Витушкин, 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы, УМН, 2004, т. 59, вып. 1(355), сс. 11–24.

[2] W. Blashke, Einfuhrung in die Geometrie der Waben, Birkhauser, Basel und Stuttgart, 1955.

[3] A.Ostrovski, Uber Dirichletsche Raihen und algebraishe Differentialgleichungen, Math.Z.,1920, 8, pp.241-298.

[4] V. K. Beloshapka, Analytic Complexity of Functions of Two Variables, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 14, No. 3, 2007, pp. 243 -– 249.

[5] V. K. Beloshapka,Analytic Complexity of Functions of Several Variables, Mathematical Notes, 2016, Vol. 100, No. 6, pp. 774–780.

[6] В. А. Красиков, Т. М. Садыков, Об аналитической сложности дискриминантов, Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа, Сборник статей, Тр. МИАН, 279, МАИК, М., 2012, 86–101.