Математические заметки

Том 100 выпуск 6 декабрь 2016

УДК 517.54

Аналитическая сложность функций многих переменных

В. К. Белошапка

Предложен подход к оценке сложности аналитических функции произвольного числа переменных. Дано описание гармонических функций трех переменных сложности один и алгебраических функций сложности один произвольного числа переменных.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: ...

DOI: ???

1. Суперпозиции типа $(n \to 1)$**, определение сложности.** Та теория сложности аналитических функций, фрагменты которой были представлены автором в [1], [2], касалась вопросов, связанных с возможностью представления функций двух переменных с помощью функций одного переменного (суперпозиции типа $(2 \to 1)$). Если ставить вопрос о представимости аналитических функций любого ($n \geqslant 2$) числа переменных $(x_1, \dots, x_m)$ аналитическими функциями одного переменного (суперпозиции типа $(n \to 1)$), то возможны различные индуктивные определения. Здесь мы, развивая подход [1], принимаем следующую точку зрения. Будем считать, что Cl_0 – это функции одного (любого) переменного, т.е. все эти функции имеют сложность нуль. Класс Cl_1 – это функции вида

$$z(x_1, \dots, x_m) = c(a_1(x_1) + \dots + a_m(x_m)),$$

где $(a_1, \dots, a_m, c)$ – аналитические функции одного переменного. Эти функции, за вычетом тех, что попали в Cl_0, имеют сложность один. Функции сложности два, как и раньше, – это функции, чья сложность не равна нулю или единице, и имеющие представление

$$z(x, y) = C(A_1(x, y) + B_1(x, y)),$$

где A_1 и B_1 имеют сложность не выше единицы. И так далее. В итоге мы получаем функцию сложности $N(z)$, которая определена для всех аналитических функций z и принимает значения $(0, 1, 2, \dots, \infty)$. Мы пишем $N(z) = n$, если $z \in \mathrm{Cl}_n \setminus \mathrm{Cl}_{n-1}$. Если z не попала ни в один из классов Cl_n, то $N(z) = \infty$. Хотя условие принадлежности классу формулируется локально, можно показать, что сложность ростка

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований 11-01-00495-а и 11-01-12033-офи-м-2011.

не меняется при аналитическом продолжении. Это следует из того, что все классы Cl_n являются дифференциально-алгебраическими множествами, т.е. представляют собой совокупность аналитических решений конечного набора дифференциально-полиномиальных соотношений с комплексными коэффициентами.

Так определенная сложность похожа на степень многочлена. Если $P(x_1,\dots,x_m)$ – многочлен от m переменных степени не выше d, то фиксируя одно из переменных $x_m = a$, мы получаем многочлен от $m-1$ переменного степени не выше d. Аналогичное утверждение имеет место и для аналитической сложности.

Утверждение 1. *Если $N(z(x_1,\dots,x_m)) \leqslant n$, то*

$$N(z(x_1,\dots,x_{m-1},a)) \leqslant n.$$

Итак, если мы возьмем функцию многих переменных из Cl_1 и зафиксируем все переменные кроме двух, то получится функция первого класса в смысле старого определения [1] (как для функции двух переменных). Уравнение, определяющее первый класс для функций переменных (x_1,x_2), имеет вид

$$\delta_{12}(z) = \left(\log\left(\frac{z'_{x_1}}{z'_{x_2}}\right)\right)''_{x_1x_2} = 0.$$

Поэтому для для любой $z \in \mathrm{Cl}_1$ и для любой пары переменных (x_i,x_j), $i \neq j$, выполняется уравнение первого класса $\delta_{ij}(z) = 0$ по этой паре переменных.

Пример 2. (a) Функция

$$z = x_1x_2\cdots x_m = e^{(\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_m))},$$

поэтому $N(z) = 1$.

(b) Легко проверить, что функция трех переменных $z = x_1x_2+x_3$ имеет сложность один по каждой паре переменных, но она не представима в виде $c(a_1(x_1)+a_2(x_2)+a_3(x_3))$, поэтому $N(z) = 2$.

Справедлива следующая

Лемма 3. *Общее решение системы уравнений $z''_{x_1x_2} = z'_{x_3} = \cdots = z'_{x_m} = 0$ имеет вид $z = A(x_1)+B(x_2)$.*

В качестве следствия получаем

Лемма 4. *Общее решение системы уравнений $\Delta_{12}(z) = 0$ вида*

$$\delta_{12}(z) = \left(\log\left(\frac{z'_{x_1}}{z'_{x_2}}\right)\right)''_{x_1x_2} = \left(\frac{z'_{x_1}}{z'_{x_2}}\right)'_{x_j} = 0, \qquad j = 3,\dots,m,$$

– это семейство функций

$$z(x_1,\dots,x_m) = c(a_1(x_1)+a_2(x_2)+A(x_3,\dots,x_m)).$$

Утверждение 5. *Для того, чтобы аналитическая функция $z(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{Cl}_1$, необходимо и достаточно выполнения соотношений $\Delta_{j_1j_2}(z) = 0$ для всех $1 \leqslant j_1 \neq j_2 \leqslant m$.*

Доказательство. *Необходимость* проверяется непосредственно. Условие, что $z = c(t)$, где $t = a_1(x_1) + \cdots + a_m(x_m)$ можно записать как условие того, что z постоянна на линиях уровня t. А это условие, в свою очередь, равносильно условию $X_2 z = \cdots = X_m z = 0$, где $X_2, \ldots, X_m$ – это векторные поля, порождающие слоение на гиперповерхности уровня функции t

$$X_j = a_j(x_j)\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1(x_1)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 2, \ldots, m.$$

Соотношение $X_j z = 0$ можно записать как $z'_{x_j}/z'_{x_1} = a'_j/a'_1$. Исключая из этого соотношения a_j и a_1, получаем равносильное соотношение $\Delta_{j1}(z) = 0$ для всех $j = 2, \ldots, m$.

Достаточность получаем последовательным применением леммы 3. Утверждение доказано.

Вопроос о единственности представления функции сложности единица решается так же, как и для функций двух переменных. Имеет место

Лемма 6. *Пусть* $(a_j(t), c(t))$, $j = 1, \ldots, m$, – *непостоянные голоморфные функции, причем на открытом множестве пространства переменных* $(x_1, \ldots, x_m)$ *имеет место соотношение*

$$c(a_1(x_1) + \cdots + a_m(x_m)) = x_1 + \cdots + x_m.$$

Тогда

$$a_j(x_j) = \frac{x_j + p_j}{k}, \quad c(t) = kt - \sum p_j, \qquad \text{где} \quad k \neq 0.$$

Доказательство просто и не отличается от двумерного случая.

Из доказанной леммы получаем утверждение о единственности представления для функций первого класса.

Утверждение 7. *Если функция z сложности единица имеет два представления*

$$z = c(a_1(x_1) + \cdots + a_m(x_m)) = C(A_1(x_1) + \cdots + A_m(x_m)),$$

то

$$A_j(x_j) = \frac{a_j(x_j) + p_j}{k} \qquad \text{и} \qquad C(t) = c\Bigl(kt - \sum p_j\Bigr).$$

Доказательство. В области определения голоморфного элемента этой функции выберем значения $x_j = x_j^0$ так, что a_j обратима в окрестности x_j^0 и c обратима в окрестности $t^0 = \sum a_j(x_j^0)$. В качестве области из леммы **??** возьмем окрестность $(x_0, \ldots, x_m)$, в качестве функций – элементы, представляющие $(a_j, c))$. Заменяя x_j на $a_j^{-1}(x_j)$, получаем

$$c^{-1} \circ C(A_1 \circ a_1^{-1}(x_1) + \cdots + A_m \circ a_m^{-1}(x_m)) = x_1 + \cdots + x_m.$$

Теперь из леммы 6 получаем, что

$$A_j \circ a_j^{-1}(x_j) = \frac{x_j + p_j}{k}, \qquad c^{-1} \circ C(t) = kt - \sum p_j.$$

Откуда следует утверждение 7.

В пространстве функций m переменных действует следующая псевдогруппа (калибровочная псевдогруппа)

$$\mathscr{G} = \{z(x_1, \dots, x_m) \to \psi^{-1}(z(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_1(x_m))\},$$

где (φ_j, ψ) – ростки непостоянных аналитических функций. Ясно, что это действие не меняет сложности и что функции сложности один – это, в точности орбита функции $(x_1 + \dots + x_m)$.

Если S – некоторая совокупность аналитических функций, то под $N(S)$ мы понимаем максимум, возможно, бесконечный, сложностей функций, входящих в эту совокупность.

Утверждение 8. *Пусть $m > 2$, и пусть имеется одно аналитическое дифференциальное соотношение в частных производных произвольного порядка с одной неизвестной функцией $u(x_1, \dots, x_m)$, $F(D, u, x) = 0$, которое удовлетворяет условиям теоремы Коши–Ковалевской (разрешенное относительно какой-то старшей производной). Тогда совокупность аналитических решений этого уравнения имеет сложность, равную бесконечности.*

Доказательство. В соответствии с теоремой Коши–Ковалевской аналитические решения задачи Коши с данными на гиперплоскости однозначно задаются набором произвольных аналитических функций $(m-1)$-го переменного. Если же все решения этого уравнения имеют конечную сложность, то все они выражаются через конечный набор функций одного переменного; то же касается и начальных данных в задаче Коши. Но если $m - 1 > 1$, то подсчет числа параметров в струях достаточно высокого порядка показывает, что это невозможно. Противоречие.

2. Гармонические функции трех переменных. В работе [2] был рассмотрен вопрос о строении гармонических функций двух переменных сложности один. Рассмотрим этот вопрос для функций трех переменных. Поскольку вопрос о гармонических функциях двух переменных решен ранее, здесь мы можем рассматривать только функции, которые не постоянны ни по одному из переменных. Отметим, что если $u(x,y,z) = f(a(x) + b(y) + c(z))$ – гармоническая функция первого класса, заданная набором функций (a, b, c, f), то функция $\widetilde{u}(x,y,z)$, заданная набором

$$\widetilde{a}(x) = a(x - \alpha), \qquad \widetilde{b}(y) = b(y - \beta), \qquad \widetilde{c}(z) = c(z - \gamma), \qquad \widetilde{f}(t) = kf(lt - \delta),$$

(k и l – ненулевые константы) тоже гармоническая первого класса. То же самое можно сказать о любой перестановке переменных. Эти преобразования образуют группу G. Для полного описания гармонических функций первого класса достаточно поолучить такое описание с точностью до преобразований из G.

Пусть функция

$$u(x,y,x) = f(a(x) + b(y) + c(z)),$$

где (a, b, c, f) – непостоянные аналитические функции, гармонична на некоторой области трехмерного пространства. Если $(a')^2 + (b')^2 + (c')^2$ есть тождественный нуль, то все производные – константы, т.е. (a, b, c) линейны, а из уравнения Лапласа получаем, что $f'' = 0$. То есть u линейна (случай 0). Если $(a')^2 + (b')^2 + (c')^2$ не есть тождественный нуль, то, записывая уравнение Лапласа, получаем

$$\tau(x,y,x) = \frac{f''(a(x) + b(y) + c(z))}{f'(a(x) + b(y) + c(z))} = -\frac{a''(x) + b''(y) + c''(z)}{(a'(x))^2 + (b'(y))^2 + (c'(z))^2}.$$

Левая часть есть функция от $a+b+c$. Это условие равносильно постоянству τ на линиях уровня этой суммы, что, в свою очередь, можно записать как условие обращения в нуль производных вдоль двух векторных полей

$$\frac{1}{b'}\tau_y - \frac{1}{a'}\tau_x = 0, \qquad \frac{1}{c'}\tau_z - \frac{1}{a'}\tau_x = 0.$$

Запишем результат, используя индексные обозначения для производных

$$\begin{aligned} &-{a_1}^3 b_3 + a_3 {a_1}^2 b_1 - 2a_1 b_1 {a_2}^2 - 2a_1 b_1 a_2 c_2 - a_1 {b_1}^2 b_3 \\ &\qquad + 2a_1 b_1 {b_2}^2 + 2a_1 b_1 b_2 c_2 - a_1 {c_1}^2 b_3 + a_3 {b_1}^3 + a_3 b_1 {c_1}^2 = 0, \\ &-c_3 {a_1}^3 + a_3 {a_1}^2 c_1 - 2a_1 c_1 {a_2}^2 - 2a_1 c_1 a_2 b_2 - c_3 a_1 {b_1}^2 \\ &\qquad + 2a_1 c_1 b_2 c_2 - c_3 a_1 {c_1}^2 + 2a_1 c_1 {c_2}^2 + a_3 {b_1}^2 c_1 + a_3 {c_1}^3 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

{eq1}

Понижаем в этом уравнении порядок, полагая $a_1 = a'(x) = A$ новым независимым переменным, $a_2 = a''(x) = P(A)$ – новой неизвестной функцией, соответственно $a_3 = P'P$, аналогично $b_1 = b'(y) = B$, $b_2 = b''(y) = Q(B)$, $b_3 = Q'Q$ и $c_1 = c'(z) = C$, $c_2 = c''(z) = R(C)$, $c_3 = R'R$. Получаем соотношения

$$\begin{aligned} &-A^3\left(\frac{d}{dB}Q(B)\right)Q(B) + \left(\frac{d}{dA}P(A)\right)P(A)A^2B - 2AB(P(A))^2 - 2ABP(A)R(C) \\ &\qquad - AB^2\left(\frac{d}{dB}Q(B)\right)Q(B) + 2AB(Q(B))^2 + 2ABQ(B)R(C) \\ &\qquad - AC^2\left(\frac{d}{dB}Q(B)\right)Q(B) + \left(\frac{d}{dA}P(A)\right)P(A)B^3 + \left(\frac{d}{dA}P(A)\right)P(A)BC^2 = 0, \\ &-\left(\frac{d}{dC}R(C)\right)R(C)A^3 + \left(\frac{d}{dA}P(A)\right)P(A)A^2C - 2AC(P(A))^2 - 2ACP(A)Q(B) \\ &\qquad - \left(\frac{d}{dC}R(C)\right)R(C)AB^2 + 2ACQ(B)R(C) - \left(\frac{d}{dC}R(C)\right)R(C)AC^2 \\ &\qquad + 2AC(R(C))^2 + \left(\frac{d}{dA}P(A)\right)P(A)B^2C + \left(\frac{d}{dA}P(A)\right)P(A)C^3 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

{eq2}

Выразим $R(C)$ из первого соотношения. Это дробь, чей знаменатель обращается в тождественный нуль лишь в случае, когда $P(A)$ и $Q(B)$ – это одна и та же константа. Подставляя выражение для $R(C)$ во второе соотношение, получаем

$$A^3\frac{dQ}{dB} - A^2B\frac{dP}{dA} + AB^2\frac{dQ}{dB} + AC^2\frac{dQ}{dB} - B^3\frac{dP}{dA} - BC^2\frac{dP}{dA}Q(B)CP(A) = 0,$$

которое распадается на два (коэффициент при C^2 и выражение без C)

$$\begin{aligned} &\left(A^3\frac{d}{dB}Q(B) - A^2B\frac{d}{dA}P(A) + AB^2\frac{d}{dB}Q(B) - B^3\frac{d}{dA}P(A)\right)Q(B)P(A) = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad -\left(A\frac{d}{dB}Q(B) - B\frac{d}{dA}P(A)\right)Q(B)P(A) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

{eq3}

Разделяя переменные во втором соотношении, получаем, что $P(A)$ и $Q(b)$, а в силу симметрии переменных и $R(C)$, линейны и

$$P(A) = \lambda A + p, \qquad Q(B) = \lambda B + q, \qquad R(C) = \lambda C + r.$$

Подставляя это в (1) и отделяя в первом равенстве коэффициент при A^3B, получаем что $\lambda = 0$. После чего оба соотношения (1) принимают вид

$$AB(p-q)(p+r+q) = AC(p-r)(p+r+q) = 0.$$

Возможны два случая:

случай 1: $p = q = r = 2m$;

случай 2: $p + q + r = 0$.

Рассмотрим первый случай. Получаем

$$a(x) = mx^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \qquad b(y) = my^2 + \beta_1 y + \beta_0, \qquad c(z) = mz^2 + \gamma_1 z + \gamma_0.$$

Если $m = 0$, то $f'' = 0$, и тогда $u(x, y, x)$ – это линейная функция и с точностью до действия группы G функция имеет вид

$$u(x, y, x) = x + y + z \qquad (\textit{случай } 1.1).$$

Если $m \neq 0$ (*случай* 1.2), то заменами из G сумму $a + b + c$ можно привести к виду $x^2 + y^2 + z^2$, и выражение для f''/f' принимает вид

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = -\frac{3}{2t}\,.$$

Откуда, интегрируя, получаем $f(t) = d_1(1/\sqrt{t}) + d_2$. Убирая константы действием G, в случае (1.2) получаем хорошо известное фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$u(x, y, x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (\textit{случай } 1.2).$$

В случае 2 из условия $p + q + r = 0$ следует, что $a'' + b'' + c'' = 0$. Откуда получаем, что $f'' = 0$, т.е. $f(t)$ линейна и после применения преобразования из G можем считать, что $f(t) = t$. Итого

$$u(x, y, z) = px^2 + qy^2 + rz^2 + \text{линейные члены}, \qquad \text{где} \quad p + q + r = 0 \qquad (\textit{случай } 2).$$

Нетрудно показать, что с точностью до преобразований G такую функцию (если она не функция двух переменных) можно представить в виде $u = x^2 - y^2 + z$ (*случай* 2.1) или $u = x^2 + qy^2 - (q+1)z^2$ (*случай* 2.2). Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 9. *Любая гармоническая функция трех переменных сложности один*

- *либо зависит не более чем от двух переменных*;
- *либо является линейной*;
- *либо преобразованиями из G может быть приведена к одной из следующих форм*:

$$u_1 = x^2 - y^2 + z, \qquad u_2 = x^2 + qy^2 - (q+1)z^2, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Доказанная теорема имеет любопытное следствие, которое отличает случай двух переменных от случая трех.

Следствие 10. *Любая гармоническая функция трех переменных сложности один алгебраична.*

Вопрос о строении гармонических функций сложности один, зависящих от $m > 3$ переменных, остается открыт. Однако ясно, что все выделенные в теореме типы, допускают обобщение на произвольное число переменных. В частности, при любом m сложность один имеет фундаментальное решение уравнения Лапласа. Отметим также, что из теоремы можно получить описание решений волнового уравнения сложности один.

3. Алгебраические функции. Вопрос об алгебраических функциях двух переменных сложности один был рассмотрен в [2] (см. также [3]). Там было предложено описание основанное на теореме Вейерштрасса о функциях с алгебраической теоремой сложения. Здесь, применяя похожие аргументы, мы получим описание алгебраических функциях произвольного числа переменных сложности один.

Пусть алгебраическая функция $P(x_1, \ldots, x_m)$ имеет аналитическую сложность один как функция m переменных, т.е.

$$P(x_1, \ldots, x_m) = c(a_1(x_1) + \cdots + a_m(x_m)),$$

где $(a_1, \ldots, a_m, c)$ – непостоянные аналитические функции одного переменного. После переноса начала координат мы можем полагать, что начало координат содержится в области определения аналитического элемента, задающего правую часть соотношения и $a_j(0) = 0$ для всех j. Поскольку P непостоянна по всем переменным, можем при этом полагать, что перенос начала координат осуществлен так, что алгебраические функции $\phi_j(x_j) = P(0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0)$ не постоянны. Из соотношения для P теперь получаем, что

$$a_j(x_j) = c^{-1}(\phi_j(x_j)) \qquad \text{для всех} \quad j.$$

В результате после замены $u_j = \phi_j(x_j)$ получаем

$$c(c^{-1}(u_1) + \cdots + c^{-1}(u_m)) = P(\phi_1^{-1}(u_1), \ldots, \phi_m^{-1}(u_m)) = Q(u_1, \ldots, u_m)$$

или, после замены $u_j = c(U_j)$,

$$c(U_1 + \cdots + U_m) = Q(\phi_1(U_1), \ldots, \phi_n(U_m)). \tag{4}$$ {eq4}

С различными формулировками теоремы Вейерштрасса о функциях, обладающих алгебраической теоремой сложения, можно познакомиться по прекрасному обзору [4] (см. также [5]). Здесь нам достаточно следующей теоремы.

Теорема 11 (К. Вейерштрасс). *Пусть $c(t)$ – непостоянная аналитическая функция одного переменного и R – ненулевой многочлен от трех переменных с комплексными коэффициентами, причем в некоторой области имеет место соотношение*

$$R(c(U), c(V), c(U+V)) \equiv 0 \qquad (\textit{алгебраическая теорема сложения}),$$

то это возможно в одном и только одном из следующих трех случаев:

(1) *алгебраический*: $c(t) = \eta(t)$;
(2) *периодический*: $c(t) = \eta(e^{\lambda t})$;
(3) *двоякопериодический*: $c(t) = \eta(\wp(t))$, *где* $\eta(s)$ – *алгебраическая функция, а* $\wp(t)$ – $\wp(t)$-*функция Вейерштрасса, построенная по решетке* $L(\omega_1, \omega_2)$.

Для самой функции Вейерштрасса $w = \wp(U + V)$ выражается через $u = \wp(U)$ и $v = \wp(V)$ с помощью функции [5]

$$w = u \diamond v = \wp(\wp^{-1}(u) + \wp^{-1}(v)) = -(u + v) + \left(\frac{\sqrt{H(u)} - \sqrt{H(v)}}{2(u - v)}\right)^2,$$

где $H(t) = 4t^3 - g_2 t - g_3$ – кубический многочлен без кратных корней в форме Вейерштрасса ($u \diamond v$ – “эллиптическое сложение”). Непостоянная алгебраическая функция, как нетрудно видеть, может попасть лишь в один из трех классов. В [6] на основе этой теоремы было дано следующее описание алгебраических функций от двух переменных сложности один.

Теорема A. *Если* $P(x, y)$ – *алгебраическая функция двух переменных аналитической сложности единица, то имеет одно и только одно представление следующего вида*:
(1) $P(x, y) = \gamma(\alpha(x) + \beta(y))$ (*аддитивное представление*);
(2) $P(x, y) = \gamma(\alpha(x) \cdot \beta(y))$ (*мультипликативное представление*);
(3) $P(x, y) = \gamma(\alpha(x) \diamond \beta(y))$ (*эллиптическое представление*),
где α, β, γ *алгебраичны*.

На основе этой теоремы можно дать аналогичное описание алгебраических функций сложности один произвольного числа переменных

Теорема 11. *Если* $P(x_1, \dots, x_m)$ – *алгебраическая функция* m *переменных аналитической сложности единица, то она имеет одно и только одно представление следующего вида*:
(1) $P(x_1, \dots, x_m) = \gamma(\alpha_1(x_1) + \dots + \alpha_m(x_m))$ (*аддитивное представление*);
(2) $P(x_1, \dots, x_m) = \gamma(\alpha_1(x_1) \cdots \alpha_m(x_m))$ (*мультипликативное представление*);
(3) $P(x_1, \dots, x_m) = \gamma(\alpha_1(x_1) \diamond \dots \diamond \alpha_m(x_m))$ (*эллиптическое представление*),
где α_j, γ *алгебраические функции одного переменного*.

Доказательство. Зафиксируем все переменные кроме x_1, x_2. Соотношение (4) означает, что функция $c(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса и попадает, тем самым, в один из трех перечисленных случаев.

Пусть имеет место первый случай, т.е. $c(t)$ алгебраична. Отсюда следует алгебраичность $a_1(x_1)$ и $a_1(x_2)$. Применяя теперь нашу теорему к паре переменных (x_1, x_j), получаем алгебраичность $a_j(x_j)$.

Аналогично рассматриваются второй и третий случаи. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] V. K. Beloshapka, “Analytic complexity of functions of two variables”, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:3 (2007), 243–249.
[2] В. К. Белошапка, “Семимерное семейство простых гармонических функций”, *Матем. заметки*, **98**:6 (2015), 803–808.

[3] M. Stepanova, “On rational functions of first-class complexity”, *Russ. J. Math. Phys.*, **23**:2 (2016), 251–256.

[4] M. B. Villarino, *Algebraic Addition Theorems*, 1212.6471, 2013.

[5] В. В. Прасолов, Ю. П. Соловьев, *Эллиптические функции и алгебраические равнения*, Факториал, М., 1997.

[6] V. K. Beloshapka, “Алгебраические функции сложности один, теорема Вейерштрасса и три арифметических операции”, *Russ. J. Math. Phys.*, 2016 (в печати).

В. К. Белошапка
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: vkb@strogino.ru

Поступило
25.06.2016