В. К. Белошапка, А. Г. Витушкин, Оценки радиуса сходимости степенных рядов, задающих отображения аналитических гиперповерхностей, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1981, том 45, выпуск 5, 962–984

**СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 45, № 5, 1981**

УДК 517.5

**БЕЛОШАПКА В. К., ВИТУШКИН А. Г.**

# ОЦЕНКИ РАДИУСА СХОДИМОСТИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ, ЗАДАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

## § 1. Формулировка результата

В пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$ $(n\geqslant 1)$ обособим одну из координат и будем задавать точки в виде пар $z=(z_1, \ldots, z_n)$ и $w=u+iv$. Здесь $\{z_i\}$ — комплексные, а $u$ и $v$ — вещественные числа.

Рассмотрим класс поверхностей вида

$$v=F(z, \bar{z}, u). \tag{1.1}$$

Здесь $F$ — функция, аналитическая в какой-либо окрестности точки $0=(0, 0, 0)$, $F|_0=0$, $dF|_0=0$ и форма Леви $\langle z, z\rangle = \sum \left.\frac{\partial^2 F}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_k}\right|_0 z_i \bar{z}_k$ невырожденна, т. е. определитель матрицы этой формы не равен нулю.

Поверхность $M$ вида (1.1) будем называть сферической (плоской по Черну), если существует голоморфная замена координат $z$, $w$, сохраняющая на месте начало координат и приводящая $M$ к виду $v=\langle z, z\rangle$.

Фиксируем две поверхности $M$ и $M^*$ вида (1.1) и рассмотрим отображение $(z^*, w^*)=h(z, w)$, обладающее следующими свойствами: $h$ биголоморфно отображает какую-нибудь окрестность $G$ точки $(0, 0)$ на некоторую окрестность $G^*$ той же точки $h(0, 0)=(0, 0)$ и $h(M\cap G)=M^*\cap G^*$. Всякое такое отображение будем называть локальным отображением $M$ в $M^*$.

Напомним, что мы рассматриваем поверхности, лежащие в пространстве размерности не меньше, чем два. В отличие от одномерного случая условие, что отображение переводит одну гиперповерхность в другую наперед заданную гиперповерхность, является очень жестким и порождает ряд интересных свойств таких отображений. Целью этой статьи является получение оценок радиуса сходимости степенных рядов, задающих локальное отображение поверхностей.

Распишем отображение $h$ покоординатно: $z_k^*=f_k(z, w)$ $(k=1, \ldots, n)$ и $w^*=g(z, w)$. Будем обозначать через $R(h)$ максимальное число такое, что для всякой из функций $f_1, \ldots, f_n$, $g$ степенной ряд по степеням $z$, $w$, представляющий эту функцию, сходится в полидиске $|z_k|<R(h)$

$(k=1, \ldots, n)$, $|w|<R(h)$. Число $R(h)$ будем называть радиусом сходимости ряда, задающего отображение $h$.

ТЕОРЕМА. *Фиксируем две поверхности $M$ и $M^*$ вида* (1.1). *Тогда для всякого локального отображения $h$ поверхности $M$ в $M^*$ выполняется следующее*:

(1) $R(h) \geqslant C_1$, *где $C_1>0$ — константа, зависящая лишь от максимума модуля первых и вторых частных производных функций $f_1, \ldots, f_n, g$ в точке* $(0, 0)$;

(2) *если $M$ не сферична, то $R(h) \geqslant C_2$, где $C_2>0$ зависит лишь от максимума модуля частных производных первого порядка функций $f_1, \ldots, f_n$ в точке* $(0, 0)$ *по переменным $z_1, \ldots, z_n$*;

(3) *если $M$ не сферична и ее форма Леви положительно определена, то $R(h) \geqslant C_3$, где $C_3>0$ не зависит от $h$.*

В конце статьи мы конкретизируем характер зависимости оценивающих констант от выбора поверхностей $M$ и $M^*$ (см. § 6).

Известен ряд работ Александера [1] и С. И. Пинчука [2] по продолжению локальных отображений вдоль строго псевдовыпуклых гиперповерхностей. В [2] доказывается, что всякое локальное отображение одной строго псевдовыпуклой несферической гиперповерхности в другую такую же поверхность (вторая поверхность предполагается компактной) голоморфно продолжается по путям, лежащим на первой поверхности. Однако размер окрестности, в которую продолжается отображение, вообще говоря, зависит от отображения. Поэтому утверждение (3) не следует из теоремы Пинчука. С другой стороны, и теорема Пинчука не следует из утверждения (3).

Схема доказательства теоремы, если говорить в общих чертах, основана на том, что для всякой пары поверхностей соответствующее пространство локальных отображений конечномерно. Всякое отображение однозначно определяется набором параметров, вычисляемых через первые и вторые частные производные координатных функций отображения. Зависимость свойств отображения от этих параметров оказалась просматриваемой настолько, что это позволило проследить за радиусом сходимости соответствующих рядов. Параметризация пространства отображений вводится с помощью нормальных форм Мозера [3]. Получение оценок потребовало большой предварительной работы, связанной, в основном, с исключением лишних (зависимых) параметров. Это было сделано В. К. Белошапкой и А. М. Лободой в [4] и [5].

## § 2. Необходимые предварительные сведения

В [3] Мозер показал, что всякую поверхность вида (1.1) голоморфной заменой переменных можно привести к виду

$$v=\langle z, z\rangle+\sum F_{kl}(z, \bar{z}, u), \quad \min(k, l) \geqslant 2. \tag{1.2}$$

Здесь $\langle z, z\rangle$ — форма Леви поверхности $M$, а $F_{kl}$ — многочлен степени $k$ по $z$ и степени $l$ по $\bar{z}$ с коэффициентами, аналитически зависящими от

$u$. При этом члены $F_{22}$, $F_{23}$ и $F_{33}$ связаны соотношениями:

$$\operatorname{tr} F_{22}=0, \quad \operatorname{tr}^2 F_{23}=0, \quad \operatorname{tr}^3 F_{33}=0.$$

В силу вещественности $F$ получаем также $\operatorname{tr}^2 F_{32}=0$. Оператор tr определяется формулой

$$\operatorname{tr}\left(\sum a_{\alpha_1\ldots\alpha_k\beta_1\ldots\beta_l} z_{\alpha_1}\ldots z_{\alpha_k}\bar{z}_{\beta_1}\ldots\bar{z}_{\beta_l}\right)=$$
$$=\sum b_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\beta_1\ldots\beta_{l-1}} z_{\alpha_1}\ldots z_{\alpha_{k-1}}\bar{z}_{\beta_1}\ldots\bar{z}_{\beta_{l-1}},$$

где

$$b_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\beta_1\ldots\beta_{l-1}}=\sum_{\alpha_k\beta_k} h^{\alpha_k\beta_k} a_{\alpha_1\ldots\alpha_k\beta_1\ldots\beta_l}$$

и $(h^{\alpha\beta})$ — матрица, обратная к матрице формы Леви поверхности $M$.

Такая форма записи поверхности (см. (1.2)) называется нормальной, а замена переменных, приводящая к этому виду, называется приведением к нормальной форме. Всякому приведению $h$ поверхности $M$ вида (1.1) к нормальной форме сопоставляется набор параметров, однозначно определяющий это приведение. Делается это так. Поверхность $M$ с помощью некоторой стандартной замены переменных, однозначно определяемой видом поверхности, приводится к следующему виду:

$$v=\langle z, z\rangle+\sum_{k=3}^{\infty} F_k(z, \bar{z}, u), \tag{2.2}$$

где $F_k$ — многочлен от $z$, $\bar{z}$, $u$ такой, что при всяком $t$

$$F_k(tz, t\bar{z}, t^2u)=t^kF_k(z, \bar{z}, u).$$

Далее доказывается, что всякое приведение $z^*=f(z, w)$, $w^*=g(z, w)$ оказывается единственным, если зафиксировать следующий набор параметров:

$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0=C$ — невырожденная матрица размером $(n\times n)$;

$\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0=a$ — $n$-мерный комплексный вектор;

$\left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_0=\rho$ — вещественное число, не равное 0;

$\operatorname{Re}\left.\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\right|_0=r$ — вещественное число.

Эти параметры называются параметрами приведения. Так как приведение не изменяет формы Леви, то

$$\langle Cz, Cz\rangle=\rho\langle z, z\rangle. \tag{3.2}$$

Параметры приведения не связаны более никакими соотношениями. Точнее, доказывается [3], что для всякого набора параметров, удовлетворяющего перечисленным выше требованиям, существует, и притом единственная, замена переменных с заданными параметрами, приводящая $M$ к нормальной форме.

Изменим теперь постановку задачи, фиксируем какую-либо нормальную форму $M^*$ поверхности $M$ и рассмотрим совокупность всех приведений $M$ к $M^*$. Оказалось [4], [5], что для таких приведений параметры остаются независимыми в вышеуказанном смысле лишь в случае, когда $M$ сферична. Если, например, $M=M^*$ является гиперквадрикой, т. е. имеет вид $v=\langle z, z\rangle$, то класс всех приведений $M$ к $M^*$ совпадает с классом дробно-линейных преобразований вида

$$z^*=C(z+aw)/(1-\delta), \quad w^*=\rho w/(1-\delta), \tag{4.2}$$

где $\delta=2i\langle z, a\rangle+(r+i\langle a, a\rangle)w$. Коэффициенты преобразований связаны лишь соотношением (3.2).

Для дальнейшего удобно переобозначить параметры. Положим $\lambda=\sqrt{|\rho|}$, $U=\lambda^{-1}C$ и $\sigma=\lambda^{-2}\rho=\pm 1$.

А. Лобода [5] показал, что если $M$ несферична, то при всяком приведении поверхности $M$ к одной и той же нормальной форме $M^*$ параметры приведения $\sigma$, $\lambda$, $a$, $r$ однозначно определяются матрицей $U$. Отметим, что для новой системы параметров соотношение (3.2) приобретает вид

$$\langle Uz, Uz\rangle=\sigma\langle z, z\rangle.$$

В частности, если форма Леви поверхности положительно определена, то $\langle Uz, Uz\rangle=\langle z, z\rangle$. Но группа матриц, сохраняющая положительно определенную форму, компактна и потому в случае положительности формы Леви пространство всех приведений $M$ к $M^*$ оказывается компактным.

## § 3. Оценка радиуса сходимости для приведений к нормальной форме

Введем некоторые обозначения. Пусть $f$ — отображение, задаваемое набором аналитических функций от комплексных или вещественных переменных. Через $R(f)$ будем обозначать радиус сходимости отображения $f$, понимая под этим радиус максимального полицилиндра, внутри которого ряды, задающие отображение $f$, сходятся. Обозначим через $m(f)$ максимум модуля $f$ при условии, что каждая из переменных изменяется в круге радиуса $\frac{1}{2}R(f)$ с центром в нуле, если $R(f)\leqslant 2$, изменяется в круге радиуса 1, если $R(f)>2$. Отметим, что при таком определении $m(f)$ не может быть бесконечным. В определении $m(f)$ предполагается, что всякую из вещественных переменных нужно окомплексить и рассматривать как независимую комплексную переменную. Иногда в выражениях $R(f)$ и $m(f)$ на месте аргумента будем ставить символ, обозначающий какую-нибудь кривую или поверхность. Такой символ будем понимать как набор функций, с помощью которых эта кривая или поверхность нами задана. Через $d(M)$ будем обозначать определитель матрицы формы Леви поверхности $M$. Таким образом, всякой поверхности $M$ вида (1.1) сопоставляются три числа: $R(M)$, $m(M)$ и $d(M)$.

ЛЕММА 1. *Для всякой поверхности $M$ вида* (1.1) *и приведения $h$ с параметрами $p=(C, \rho, a, r)$ этой поверхности к нормальной форме выполняются неравенства*:

$$\min(R(h), R(h^{-1}))\geqslant\Theta[R(M), d(M)/m(M); p],$$

$$m(h)\leqslant\Theta[m(M)/d(M), R(h); p].$$

Поясним обозначения. Выражение вида

$$R\gtreqless\Theta[a_1, \ldots, a_k/b_1, \ldots, b_l; c_1, \ldots, c_m]$$

будем понимать так: $R$ можно оценить снизу (сверху) положительной функцией, неубывающей по аргументам $a_1, \ldots, a_k$, невозрастающей по аргументам $b_1, \ldots, b_l$ и непрерывной по совокупности всех аргументов, включая $c_1, \ldots, c_m$. Если третья группа аргументов отсутствует, мы будем писать $\Theta[a_1, \ldots, a_k/b_1, \ldots, b_l]$, если отсутствует первая или вторая группа, то вместо отсутствующей группы будем писать единицу, если отсутствуют вторая и третья группы, то будем писать $\Theta[a_1, \ldots, a_k]$, абсолютные константы будем обозначать через $\Theta$ [1]. Область определения функции $\Theta$ в неравенствах указанного типа будет определяться контекстом. Например, в формулировке леммы 1 правые части неравенств определены при положительных значениях аргументов 1-й и 2-й групп и произвольных наборах $p$ допустимых определением понятия параметров приведения.

Докажем подробно первое неравенство. Второе неравенство получается аналогично.

Мы воспроизведем основные этапы конструкции Мозера приведения поверхностей к нормальной форме, акцентируя внимание лишь на тех деталях, которые необходимы для получения оценок.

Нам придется неоднократно использовать следующие четыре утверждения:

(a) Пусть $x\in\mathbf{C}^{n_1}$, $y\in\mathbf{C}^{n_2}$, функция $f(x, y)$ голоморфна в окрестности начала координат пространства $\mathbf{C}^{n_1}\times\mathbf{C}^{n_2}$ и $f(0, 0)=0$, $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0\right)\neq0$. Тогда для решения $y=\xi(x)$ $(\xi(0)=0)$ уравнения $f(x, y)=0$ имеем:

$$R(\xi)\geqslant\Theta\left[R(f), \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0\right)\Big/m(f)\right],$$

$$m(\xi)\leqslant\Theta\left[m(f)/\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0\right)\right].$$

(b) Пусть $h_1$ и $h_2$ — отображения из $\mathbf{C}^n$ в себя, голоморфные в окрестности начала координат, $h_1(0)=h_2(0)=0$, $\det(h_1'(0))\neq0$ и

$\det(h_2'(0))\neq 0$. Тогда для композиции $h$ отображений $h_1$ и $h_2$ имеем:

$$R(h)\geqslant\Theta[R(h_1),\ R(h_2)/m(h_1)],$$

$$R(h^{-1})\geqslant\Theta[R(h_1),\ R(h_2),\ \det(h_1'(0)),\ \det(h_2'(0))/m(h_1),\ m(h_2)].$$

(c) Пусть задана система дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt}=A(x,t)$, $t$ — вещественный параметр, $x$ — $n$-мерный вектор, $A$ — функция, аналитическая в окрестности точки $(0,0)$. Тогда для решения $x(t)$ задачи Коши этой системы с начальными данными $x(0)=x_0$ в предположении, что $|x_0|$ достаточно мал, имеем:

$$R(x)\geqslant\Theta[R(A)/m(A)],$$

$$m(x)\leqslant\Theta[m(A)].$$

(d) Пусть $B(w)$ — квадратная матрица, голоморфно зависящая от параметра $w$, и $\det B(0)\neq 0$. Тогда для обратной матрицы $B^{-1}(w)$ имеем:

$$R(B^{-1})\geqslant\Theta[R(B),\ \det B(0)/m(B)],$$

$$m(B^{-1})\leqslant\Theta[m(B)/\det B(0)].$$

Доказательство леммы 1. Приведение $h$ с параметрами $p$ будет построено как композиция нескольких отображений $h_0$, $h_1$, ... . В силу утверждения (b) для того чтобы оценить снизу $\min(R(h), R(h^{-1}))$, достаточно дать нижнюю оценку для $R(h_k)$ и $\det(h_k'(0))$ и верхнюю оценку для $m(h_k)$.

Поверхность $M$ после выполнения $k$-ой замены переменных будем записывать в виде

$$v=F^{(k)}(z,\bar z,u)=\sum_{s=2}^{\infty}F_s^{(k)}(z,\bar z,u),$$

где $F_s^{(k)}$ — многочлен от $z$, $\bar z$, $u$ такой, что при всяком $t$

$$F_s^{(k)}(tz,t\bar z,t^2u)=t^sF_s^{(k)}(z,\bar z,u).$$

Суммирование начинается с 2, поскольку гиперплоскость $v=0$ является касательной к $M$, и это свойство будет сохраняться после всех замен переменных.

Приведем, прежде всего, поверхность $M$, задаваемую равенством $v=\sum_{s=2}^{\infty}F_s(z,\bar z,u)$, к виду (3.2). Слагаемое $F_2(z,\bar z,u)$ не зависит от $u$ и потому $F_2=\langle z,z\rangle+\operatorname{Re}\alpha(z)$, где $\langle z,z\rangle$ — форма Леви поверхности $M$, а $\alpha(z)$ — какая-то квадратичная форма от $z$. Пусть $h_0$ — замена $z^*=z$, $w^*=w-i\alpha(z)$. Условимся здесь и всюду далее после выполнения замены переменных звездочки над новыми переменными не писать. Замена $h_0$ приводит $M$ к виду

$$v=\langle z,z\rangle+\sum_{s=3}^{\infty}F_s^{(0)}(z,\bar z,u). \tag{1.3}$$

Легко проверяется, что

$$R(h_0)=\infty, \quad \det(h_0'(0))=1, \quad m(h_0)\leqslant\Theta[m(M)/R(M)].$$

Замена $h_0$, как мы видели, не зависит от выбора параметров приведения. Следующие преобразования строятся в зависимости от этих параметров. Однако мы не будем следить за этой взаимосвязью, а поступим следующим образом.

На поверхности $M$ вида (1.3) фиксируем кривую $\gamma$, задаваемую равенствами $z=p(t)$, $w=q(t)$, и сопоставим каждой точке на кривой систему векторов $e(t)=\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$. Векторы $\{e_k(t)\}$ лежат в комплексной части пространства, касательного к $M$ в точке $(p(t), q(t))$, и линейно независимы, т. е. они образуют базис комплексной части указанного касательного пространства. Будем далее считать, что $p(t)$, $q(t)$ и $e(t)$ аналитичны, $p(0)=0$, $q(0)=0$ и $q'(0)\neq 0$, т. е. $\gamma$ проходит через точку (0, 0) и трансверсальна в этой точке к плоскости $w=0$.

Преобразования $h_1$, $h_2$, ... будут определены через тройку функций $p(t)$, $q(t)$ и $e(t)$. В процессе приведения на эти функции будут наложены дополнительные ограничения. В конце построения станет ясно, какова свобода выбора кривой $\gamma$ и как связаны выбор кривой и набор параметров приведения.

1. Шаг первый. Преобразование $h_1$ определим через его обратное $z=z^*+p(w^*)$, $w=q(w^*)$. После выполнения замены $h_1$ кривая $\gamma$ перейдет в прямую $z=0$, $v=0$. (Напомним, что мы договорились опускать звездочки сразу после выполнения замены.) При этом

$$|\det(h_1'(0))|=|q'(0)|^{-1}, \qquad R(h)\geqslant\Theta[R(\gamma), \qquad |q'(0)|/m(\gamma)],$$
$$m(h_1)\leqslant\Theta[m(\gamma)/|q'(0)|]. \tag{2.3}$$

Здесь мы предполагаем, что параметр $t$ на кривой $\gamma$ соизмерим с натуральным параметром $s$, т. е. производная $\frac{dt}{ds}$ отделена от нуля и бесконечности абсолютными константами.

Из того, что $\gamma\in M$, получим:

$$F^{(1)}(0,\ 0,\ u)=0. \tag{3.3}$$

2. Осуществим замену

$$z^*=z, \qquad w^*=w+g(z,\ w). \tag{4.3}$$

Чтобы $\gamma$ осталась на месте, потребуем, чтобы $g(0,\ w)=0$. Выберем $g$ так, чтобы $F^{(2)}_{k0}$ и $F^{(2)}_{0k}$ обратились в нуль. В силу вещественности $F$ достаточно потребовать выполнения условия

$$F^{(2)}_{k0}=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots\ . \tag{5.3}$$

Это условие запишем в виде $F^{(2)}(z,\ 0,\ u)=0$. Здесь мы рассматриваем $z$ и $\bar z$ как независимые переменные. Возможность такого рассмотрения вытекает из того, что для аналитической функции $\varphi$ равенства $\varphi(z,\ \bar z)=$

$=0$ и $\varphi(z_1, z_2)=0$ эквивалентны. Подставляя (4.3) в равенство $v^*=$ $=F^{(2)}(z^*, \bar{z}^*, u^*)$, получаем:

$$F^{(2)}(z, \bar{z}, u+\operatorname{Re} g)=\operatorname{Im} g+F^{(1)}(z, \bar{z}, u), \tag{6.3}$$

где $w=u+iF^{(1)}(z, \bar{z}, u)$. Положив в этом равенстве $\bar{z}=0$, получим:

$$0=\frac{1}{2i} g(z, u+iF^{(1)}(z, 0, u))+F^{(1)}(z, 0, u).$$

Это и есть условие на выбор функции $g$. Чтобы решить это уравнение, положим $s=u+iF^{(1)}(z, 0, u)$. По условию (3.3), $F^{(1)}(z, 0, u)$ обращается в 0 при $z=0$, поэтому, разрешая это равенство относительно $u$, получим $u=s+G(z, s)$, где $G(0, s)=0$. Уравнение (6.3) принимает вид $0=$ $=\frac{1}{2i}g(z, s)+\frac{1}{i}(s-u)$ или $u=s+\frac{1}{2}g(z, s)$. Таким образом, $g(z, s)=$ $=2G(z, s)$. В силу (а) имеем:

$$R(h_2)=R(g)=R(G)\geqslant\Theta[R(F^{(1)})/m(F^{(1)})], \tag{7.3}$$

$$m(h_2)\leqslant\Theta[m(F^{(1)})], \quad \det(h_2'(0))=1. \tag{8.3}$$

Чтобы оценить $R(F^{(1)})$ и $m(F^{(1)})$, заметим, что равенство $v=$ $=F^{(1)}(z, \bar{z}, u)$ получается из равенства $v=F^{(0)}(z, \bar{z}, u)$ подстановкой в него $h_1$ и последующим разрешением относительно переменной $v$. Поэтому, в силу (b), имеем:

$$R(F^{(0)}(f_1, \bar{f}_1; \operatorname{Re} g_1)-\operatorname{Im} g_1)\geqslant$$

$$\geqslant\Theta[R(F),\ R(h_1),\ |\det h_1'(0)|/m(h_1),\ m(F)],$$

откуда, в силу (а) и (2.3), получаем:

$$R(F^{(1)})\geqslant\Theta[R(F),\ R(\gamma)/m(F),\ m(\gamma),\ |\gamma'(0)|]. \tag{9.3}$$

Далее,

$$m(F^{(2)})\leqslant\Theta[m(F)], \tag{10.3}$$

поэтому (7.3) и (8.3) принимают вид:

$$\begin{gathered} R(h_2)\geqslant\Theta[R(F),\ R(\gamma)/m(F),\ m(\gamma),\ |\gamma'(0)|], \\ m(h_2)\leqslant\Theta[m(F)], \quad |\det h_2'(0)|=1. \end{gathered} \tag{11.3}$$

3. Осуществим замену $z^*=z+f(z, w)$, $w^*=w$. Для того чтобы не нарушить выполнения равенств (3.3) и (4.3), потребуем, чтобы

$$f(0, w)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, w)=0. \tag{12.3}$$

Выберем $f$ так, чтобы добиться выполнения равенств

$$F^{(3)}_{k1}=0, \quad k=2, 3, \ldots.$$

Через $O_{\varkappa\lambda}$ будем обозначать ряды, не содержащие членов типа $(k, l)$ с $k<\varkappa$ и $l<\lambda$. $F^{(2)}$ запишем так:

$$F^{(2)}(z, \bar z, u) = F_{11}^{(2)}(z, \bar z, u) + \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha A_\alpha(\bar z, u) + \sum_{\alpha=1}^{n} \bar z_\alpha \overline{A_\alpha(\bar z, u)} + O_{22}, \quad (13.3)$$

где

$$A_\alpha(\bar z, u) = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}(F^{(2)} - F_{11}^{(2)})|_{z=0} = O_{02}. \quad (14.3)$$

Выберем интервал изменения переменной $u$ столь малым, чтобы $\det(h_{\alpha\beta}(u))$ не обращался на нем в нуль. Здесь через $h_{\alpha\beta}$ мы обозначили коэффициенты в разложении $F_{11}^{(2)}$, т. е. $F_{11}^{(2)}(z, \bar z, u) = \sum h_{\alpha\beta}(u) z_\alpha \bar z_\beta$. Пусть, далее, $(h^{\alpha\beta})$ — матрица, обратная к $(h_{\alpha\beta})$; тогда положим

$$\overline{f^\beta(z, u)} = \sum_{\alpha=1}^{n} h^{\alpha\beta}(u) A_\alpha(\bar z, u).$$

Покажем, что в новых координатах уравнение $M$ примет вид $v = F_{11}(z, \bar z, u) + O_{22}$. В самом деле, это равенство можно записать так:

$$v = F_{11}^{(2)}(z + f, \bar z + \bar f, u) + O_{22},$$

где $w = u + iF^{(2)}(z, \bar z, u)$, или

$$v = F_{11}^{(2)}(z, \bar z, u) + \sum z_\alpha A_\alpha + \sum \bar z_\alpha \bar A_\alpha + O_{22}.$$

Последнее равенство следует из (13.3). Условие (12.3) получаем в силу (14.3).

Проведем соответствующие оценки. Положив $L^{(3)}(u) = (h_{\alpha\beta}(u))$, получаем в силу (d):

$$R(h_3) = R(f) \geqslant \Theta[R(F^{(2)}), \ R((L^{(3)})^{-1})] \geqslant$$
$$\geqslant \Theta[R(F^{(2)}), \ |\det L^{(3)}(0)|/m(F^{(2)})].$$

Но $m(L^{(3)}) \leqslant \Theta[m(F^{(2)})]$, поэтому

$$R(h_3) \geqslant \Theta[R(F^{(2)}), \ |\det L^{(3)}(0)|/m(F^{(2)})].$$

Далее, в силу (b),

$$R(F^{(1)}(h_2)) \geqslant \Theta[R(F^{(1)}), \ R(h_2)/m(h_2)],$$

откуда, в силу (a),

$$R(F^{(2)}) \geqslant \Theta[R(F^{(1)}), \ R(h_2)/m(h_2), \ m(F^{(1)})].$$

Из (9.3), (10.3) и (11.3) получаем:

$$R(F^{(2)}) \geqslant \Theta[R(F), \quad R(\gamma)/m(\gamma), \ m(F), \quad |\gamma'(0)|]. \quad (15.3)$$

Поэтому

$$R(h_3) \geqslant \Theta[R(F), \ R(\gamma), \ |\det L^3(0)|/m(\gamma), \ m(F), \ |\gamma'(0)|]. \quad (16.3)$$

Далее,

$$m(h_3)\leqslant\Theta[m(f)]\leqslant\Theta[m(F^{(2)}),\ m((L^{(3)})^{-1})],$$

поэтому в силу (d) и оценки $m(F^{(2)})\leqslant\Theta[m(F)]$ получаем:

$$m(h_3)\leqslant\Theta[m(F)/|\det L^{(3)}(0)|]. \tag{17.3}$$

Отметим также, что

$$\det(h_3'(0))=1. \tag{18.3}$$

4. Замена: $z^*=B(w)z$, $w^*=w$, где матрица $B(w)$ невырождена и голоморфно зависит от $w$. Определим ее так, что $B(u)$ переводит $e_k(u)$ в вектор $\frac{\partial}{\partial z_k}$. Имеем:

$$\begin{gathered} R(h_4)=R(e),\quad \det(h_4'(0))=(\det e(0))^{-1},\\ m(h_4)\leqslant\Theta[m(e)/\det(e(0))]. \end{gathered} \tag{19.3}$$

5. Уравнение $M$ имеет вид

$$v=F_{11}^{(4)}(z,\bar z,u)+\sum_{\min(k,l)\geqslant 2}F_{kl}^{(4)}.$$

Совершим преобразование $z^*=B(w)z$, $w^*=w$, где $B$ выбрана так, что

$$F_{11}^{(4)}(B(u)z,\overline{B(u)z},0)=F_{11}^{(4)}(z,\bar z,u). \tag{20.3}$$

Матрицу $B$ будем выбирать эрмитовой относительно формы $F_{11}{}^{(4)}(z,\bar z,0)$, т. е.

$$F_{11}^{(4)}(Bz,\bar z,0)=F_{11}^{(4)}(z,\overline{Bz},0). \tag{21.3}$$

Обозначим матрицу коэффициентов $F_{11}{}^{(4)}$ через $L^{(5)}(u)$, тогда (20.3) и (21.3) запишем так:

$$\begin{gathered} B^*(u)\cdot L^{(5)}(0)\cdot B(u)=L^{(5)}(u),\\ L^{(5)}(0)\cdot B(u)=B^*(u)L^{(5)}(0). \end{gathered} \tag{22.3}$$

Здесь $*$ означает транспонирование и комплексное сопряжение. Исключая $B^*(u)$, получим

$$B^2(u)=(L^{(5)}(0))^{-1}\cdot L^{(5)}(u).$$

Правая часть этого равенства при $u=0$ есть единичная матрица, поэтому решение запишем в виде ряда по степеням:

$$A(u)=(L^{(5)}(0))^{-1}L^{(5)}(u)-E,$$

$$B(u)=E+\frac{1}{2}A(u)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}A^2(u)+\ldots.$$

Это решение аналитически зависит от $u$ и удовлетворяет условиям (22.3). Теперь уравнение $M$ имеет вид

$$v = \langle z, z\rangle + \sum_{\min(k,l)\geq 2} F_{kl}^{(5)}(z, \bar z, u),$$

а выбор системы векторов $e(u)$ будем подчинять условию ортонормированности относительно формы $\langle z, z\rangle$. Имеем: $R(h_5)=R(B)$. В силу $R(B)\geqslant\Theta[R(A)/m(A)]$, но $R(A)=R(L^{(5)})\geqslant\Theta[R(F^{(4)})]$, получаем:

$$m(A)\leqslant\Theta[m(F^{(4)}),\ |\det L^{(5)}(0)|].$$

Дадим оценки для $F^{(4)}$. В силу (b)

$$R(F^{(3)}(h_4))\geqslant\Theta[R(F^{(3)}),\quad R(h_4),\quad |\det h_4'(0)|/m(h_4),\quad m(F^{(3)})].$$

Из (19.3) получаем:

$$R(F^{(3)}(h_4))\geqslant\Theta[R(F^{(3)}),\quad R(e),\quad |\det e(0)|/m(e),\quad m(F^{(3)})],$$

в силу (a)

$$R(F^{(4)})\geqslant\Theta[R(F^{(3)}),\quad R(e),\quad |\det e(0)|/m(e),\quad m(F^{(3)})],$$

$$R(F^{(2)}(h_3))\geqslant\Theta[R(F),\ R(\gamma),\ |\det L^{(3)}(0)|,\ \det(h_3'(0))/m(h_3)].$$

Из (16.3), (17.3) и (18.3) следует:

$$R(F^{(2)}(h_3))\geqslant\Theta[R(F),\ R(\gamma),\ |\det L^{(3)}(0)|/m(\gamma),\ m(F),\ |\gamma'(0)|].$$

В силу (a)

$$R(F^{(3)})\geqslant\Theta[R(F^{(2)}(h_3)/m(F^{(2)})]\geqslant$$

$$\geqslant\Theta[R(F),\ R(\gamma),\ |\det L^{(5)}(0)|/m(\gamma),\ m(F),\ |\gamma'(0)|],$$

поэтому

$$R(F^{(4)})\geqslant\Theta[R(F),\ R(\gamma),\ |\det L^{(3)}(0)|,\ R(e),$$

$$|\det e(0)|,\ m(F),\ m(\gamma),\ m(e),\ |\gamma'(0)|].$$

В силу того, что система $e(0)$ выбрана ортонормированной,

$$\det L^{(3)}(0)=\det L^{(5)}(0).$$

Резюмируя, получаем:

$$R(h_5)\geqslant\Theta[R(F),\ R(\gamma),\ R(e),\ |\det(e(0))|,$$

$$d(M)/m(F),\quad m(\gamma),\quad m(e),\quad |\gamma'(0)|], \tag{23.3}$$

а также

$$m(h_5)\leqslant\Theta[m(F)/d(M)],\qquad \det h_5'(0)=1. \tag{24.3}$$

Теперь мы можем, сведя воедино (2.3), (11.3), (16.3), (17.3), (18.3), (19.3), (23.3), получить в силу (b):

$$R(\check{h})\geqslant\Theta[R(F),\ R(\gamma),\ R(e),\ |\det e(0)|,\ d(M)/m(F),\ m(\gamma),\ m(e)], \tag{25.3}$$

где $\check{h}$ — это композиция отображений $h_0$, $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ и $h_5$.

Возвращаясь к построению отображения $h$, отметим, что для того чтобы уравнение $M$ приняло нормальную форму, недостает лишь выполнения условий

$$\operatorname{tr} F_{22}=0,\qquad \operatorname{tr}^2 F_{32}=0,\qquad \operatorname{tr}^3 F_{33}=0.$$

Условие $\operatorname{tr}^2 F_{32}=0$ будет записано как дифференциальное уравнение 2-го порядка на кривую $\gamma$ без учета параметризации. Зафиксируем для этого параметризацию $\gamma$, например, условием $\operatorname{Re} q(t)=t$, а также систему $e(t)$ с оценками

$$R(e)\geqslant\Theta[R(M)],\qquad m(e)\leqslant\Theta[1].$$

Уравнение имеет вид

$$v=\langle z, z\rangle+\sum_{\min(k,l)\geqslant 2} F_{kl}. \tag{26.3}$$

Преобразование, которое к нему приводит, выглядит так:

$$z^*=p(w)+C(w)z+\ldots,\qquad w^*=q(w)+\ldots.$$

Вычисления (см. [3]) показывают, что $F_{32}$ зависит от $p$ следующим образом:

$$F_{32}=\langle z, Bp''\rangle\langle z, z\rangle^2+K_{32},$$

где $K_{32}$ зависит от $p$, $\bar{p}$, $p'$, $\bar{p}'$ аналитически, причем

$$R(K_{32})=\Theta[R(M)],\qquad m(K_{32})=\Theta[m(M)],$$

$B(w)$ — квадратичная матрица, причем

$$R(B)=R(M),\qquad m(B)=\Theta[1],\qquad B(0)=-2E,$$

поэтому условие $\operatorname{tr}^2 F_{32}=0$ можно записать как

$$p''=Q(p,\ \bar{p},\ p',\ \bar{p}'), \tag{27.3}$$

причем $R(Q)\geqslant\Theta[R(M)]$, $m(Q)\leqslant\Theta[m(M)]$. В силу (с) имеем:

$$\begin{gathered} R(p)\geqslant\Theta[R(M)/m(M);\ p'(0)],\\ m(p)\leqslant\Theta[m(M)]. \end{gathered} \tag{28.3}$$

Уравнение (27.3) не зависит от выбора параметризации $\gamma$ и системы $e$.

Условие $\operatorname{tr} F_{22}=0$ запишем как дифференциальное уравнение на выбор $e$. Для этого подвергнем (26.3) преобразованию вида

$$z^*=U(w)z,\qquad w^*=w,$$

где $\langle Uz, Uz\rangle = \langle z, z\rangle$, тогда $F^*_{22} = F_{22} + 2i\langle Az, z\rangle$, $F^*_{32} = F_{32}$, где $\frac{d}{du}U = U\cdot A$. Таким образом, условие $\operatorname{tr} F^*_{22} = 0$ принимает вид

$$\frac{de_\alpha}{du} = \sum a^\beta_\alpha(u)\, e_\beta,$$

причем

$$R(a) \geqslant \Theta[R(M)], \quad m(a) \leqslant \Theta[m(M)],$$

поэтому в силу (с) имеем:

$$R(e) \geqslant \Theta[R(M)/m(M);\ e(0)],$$
$$m(e) \leqslant \Theta[m(M)]. \tag{29.3}$$

Чтобы получить условие на выбор параметризации, осуществим отображение $z^* = \sqrt{q'(w)}\,z$, $w^* = q(w)$, где $q(0) = 0$, $\overline{q(w)} = q(\bar{w})$, $q'(0) > 0$, тогда

$$F^*_{33} = q'F_{33} + \left(\frac{1}{3}q''' - \frac{1}{2}\frac{q''^2}{q'}\right)\langle z, z\rangle^3.$$

Поэтому условие $\operatorname{tr}^3 F^*_{33} = 0$ принимает вид

$$q''' = \frac{3}{2}\frac{q''^2}{q'} + (\operatorname{tr}^3 F_{33})\, q'.$$

В силу (с) получаем:

$$R(q) \geqslant \Theta[R(M)/m(M);\ q'(0),\ q''(0)],$$
$$m(q) \leqslant \Theta[m(M)], \tag{30.3}$$

где $q'(0) \neq 0$.

Отметим, что система начальных данных $\gamma'(0)$, $q''(0)$, $e(0)$ может быть выражена через систему $(C, \rho, a, r)$ (здесь существенно, что в начале приведения поверхность была записана в виде (1.3)), поэтому, объединяя (25.3), (28.3), (29.3), (30.3), получаем:

$$R(h) \geqslant \Theta[R(M),\ d(M)/m(M);\ (C, \rho, a, r)].$$

Чтобы получить оценку для $R(h^{-1})$, заметим, что в силу (а)

$$R(h^{-1}) \geqslant \Theta[R(h),\ |\det h'(0)|/m(h)].$$

Но

$$\det h'(0) = \rho \det C,$$

$$m(h) \leqslant \Theta[m(M)/d(M),\ R(h);\ (C, \rho, a, r)],$$

поэтому окончательно получим:

$$\min(R(h),\ R(h^{-1})) \geqslant \Theta[R(M),\ d(M)/m(M);\ (C, \rho, a, r)].$$

Лемма доказана.

## § 4. Оценка зависимых параметров

Пусть $M$ и $M^*$ — гиперповерхности, заданные уравнениями в нормальной форме

$$v=\langle z, z\rangle+F(z, \bar{z}, u), \quad v=\langle z, z\rangle+F^*(z, \bar{z}, u)$$

соответственно, и пусть $h=(f, g)$ — локальное отображение $M$ в $M^*$. В таком случае справедливо тождество

$$(-\operatorname{Im} g+\langle f, f\rangle+F^*(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g))\big|_{w=u+i\langle zz\rangle+iF(z,\bar{z},u)}\equiv 0. \qquad (1.4)$$

Оно является аналитической записью того обстоятельства, что если переменные связаны уравнением $M$, то значения $h$ связаны уравнением $M^*$.

В данном параграфе будут получены некоторые следствия тождества (1.4), позволяющие в случае, если $M$ несферична, выразить группу параметров $(\sigma, \lambda, a, r)$ через матрицу $U$ (считаем $M$ и $M^*$ фиксированными), а также дать оценки на них. Приведем эти следствия, опуская пока детали (точные формулы см. ниже).

(1) Имеет место тождество (см. (11.4))

$$\langle Uz, Uz\rangle=\sigma\langle z, z\rangle,$$

позволяющее выразить $\sigma$ через $U$.

(2) Если $F_k$ — первая отличная от нуля компонента $F$, то

$$\lambda^{k-2}F_k^*(Uz, \overline{Uz}, \sigma u)=\sigma F_k(z, \bar{z}, u)$$

(см. (8.4)). Это тождество позволяет выразить $\lambda$ через $U$ и $\sigma$.

Для того чтобы записать следующее соотношение, введем обозначение. Если $P$ — многочлен или матрица, то через $[P]$ будем обозначать упорядоченный набор коэффициентов $P$.

(3) Имеет место соотношение (см. (13.4))

$$\alpha([F_k])\begin{pmatrix} a \\ \xi_1 \end{pmatrix}=A(\lambda, \sigma, [U], [F_{k+1}], [F^*_{k+1}]),$$

где $\alpha([F_k])$ — квадратная матрица, линейно зависящая от $[F_k]$, причем $\det\alpha=0$ тогда и только тогда, когда $F_k=0$, $\xi_1$ — группа неизвестных, зависящих от коэффициентов $h$; $A$ — многочлен степени $k$—1 от 2 с коэффициентами, линейно зависящими от $[U]$, $[F_{k+1}]$, $[F^*_{k+1}]$.

(4) Имеет место соотношение

$$\beta([F_k])\begin{pmatrix} r \\ \xi_2 \end{pmatrix}=B(\lambda, a, \sigma, [U], [F_{k+1}], [F_{k+2}], [F^*_{k+1}], [F^*_{k+2}]),$$

где $\beta([F_k])$ — квадратная матрица, линейно зависящая от $[F_k]$, чей определитель обращается в нуль лишь при $F_k=0$, $\xi_2$ — группа неизвестных, зависящая от коэффициентов $h$; $B$ — многочлен от $\lambda$ и $a$, степени $k$ по $\lambda$, степени 2 по $a$, чьи коэффициенты линейно зависят от $[U]$, $[F_{k+1}]$, $[F_{k+2}]$, $F^*_{k+1}]$, $[F^*_{k+2}]$.

Вернемся к рассмотрению тождества (1.4). Наряду с отображением $h$ мы будем рассматривать отображение $\tilde{h}$, являющееся автоморфизмом гиперквадрики $v=\langle z, z\rangle$ и заданное формулами (4.2), где в качестве параметров взята система параметров $h$. Получаем тождество, аналогичное (1.4):

$$(-\operatorname{Im}\tilde{g}+\langle\tilde{f}, \tilde{f}\rangle)\,|_{w=u+i\langle z,z\rangle}\equiv 0. \tag{2.4}$$

Вычитая (2.4) из (1.4), обозначая через $\Phi(z, \bar{z}, u)$ левую часть полученного тождества и записывая его покомпактно, получим:

$$\Phi_s(z, \bar{z}, u)\equiv 0, \quad s=0, 1, \dots . \tag{3.4}$$

Введем соответствующее разложение для степенных рядов от $z$, $w$:

$$h(z, w)=\sum_{s=0}^{\infty} h_s(z, w), \text{ где } h_s(tz, t^2w)=t^s h_s(z, w),\ h_s=(f_s, g_s).$$

Пусть, далее, $F\neq 0$, т. е. $F=\sum\limits_{s=p}^{\infty} F_s$, где $F_p\neq 0$, $F^*=\sum\limits_{s=p^*}^{\infty} F^*_s$, где $F^*_{p^*}\neq 0$;

здесь мы формально допускаем $p^*=\infty$, но вскоре (см. (8.4)) будет показано, что $p^*=p$. Положим $k=\min(p, p^*)$, $s$-я компонента (1.4) позволяет определить $f_{s-1}$ и $g_s$ (см. [3]), но для $s=0, 1, \dots, k-1$ $s$-я компонента (1.4) совпадает с $s$-ой компонентой (2.4), поэтому заключаем, что

$$\begin{gathered} f_s=\tilde{f}_s \text{ для } s=0, 1, \dots, k-2, \\ g_s=\tilde{g}_s \text{ для } s=0, 1, \dots, k-1. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Наша ближайшая цель — это вычисление $\Phi_k$, $\Phi_{k+1}$, $\Phi_{k+2}$. Для вычислений удобно ввести следующее обозначение. При вычислении членов веса $s$ мы будем писать $\alpha\xrightarrow{s}\beta$, имея в виду, что все слагаемые веса $s$, входящие в выражение $\alpha$, входят в выражение $\beta$, причем если ясно, о каком весе идет речь, мы будем писать просто $\alpha\to\beta$. Обозначим, далее, $\Delta h= =h-\tilde{h}=(\Delta f, \Delta g)$, $\tilde{w}=u+i\langle z, z\rangle$, $\varphi=C^{-1}f$, $\psi=\rho^{-1}g$. Для вычислений представим $\Phi(z, \bar{z}, u)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(z, \bar{z}, u) &= \operatorname{Re} i\,(g\,|_{w=\tilde{w}+iF} - g\,|_{w=\tilde{w}}) + \operatorname{Re} i\Delta g\,|_{w=\tilde{w}} + \\ &+ (\langle f, f\rangle|_{w=\tilde{w}+iF} - \langle f, f\rangle|_{w=\tilde{w}}) + (2\operatorname{Re}\langle\Delta f, \tilde{f}\rangle + \langle\Delta f, \Delta f\rangle)\,|_{w=\tilde{w}} + \\ &+ F^*(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g) + F^*_{k+1}(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g) + F^*_{k+2}(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g) + \dots . \end{aligned}$$

В соответствии с этой записью мы будем обозначать приведенные здесь семь слагаемых $\Phi$ следующим образом: (I), (II), (III) и т. д.

Нам понадобятся явные формулы для младших компонент отображения $h$ и его производной $\dfrac{\partial\tilde{h}}{\partial w}$. Они получены непосредственно из формул (4.2), приведем их:

$$
\begin{gathered}
\tilde{\varphi}_0 = 0, \quad \tilde{\varphi}_1 = z, \quad \varphi_2 = 2i\langle z, a\rangle z + wa, \\
\tilde{\varphi}_3 = -4\langle z, a\rangle^2 z + (r + i\langle a, a\rangle) wz + 2i\langle z, a\rangle wa, \\
\tilde{\psi}_0 = 0, \quad \tilde{\psi}_1 = 0, \quad \tilde{\psi}_2 = w, \quad \tilde{\psi}_3 = 2i\langle z, a\rangle w, \\
\tilde{\psi}_4 = -4\langle z, a\rangle^2 w + (r + i\langle a, a\rangle) w^2, \\
\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial w}\right)_0 = a, \quad \left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial w}\right)_1 = 2i\langle z, a\rangle a + (r + i\langle a, a\rangle) z, \\
\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial w}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial w}\right)_1 = 2i\langle z, a\rangle, \quad \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial w}\right)_2 = 2(r + i\langle a, a\rangle) w - 4\langle z, a\rangle^2.
\end{gathered}
\tag{5.4}
$$

Вычисление $\Phi_k$.

$(\mathrm{I}) = \operatorname{Re} i\left(\frac{\partial g}{\partial w}\Big|_{w=\tilde{w}} \cdot i(F_k + \cdots) + \cdots\right) \to -\rho F_k.$

Здесь мы воспользовались тем, что $\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)_0 = \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial w}\right)_0 = \rho$ (см. (5.4)).

$(\mathrm{II}) \to \operatorname{Re} i\Delta g_k|_{w=\tilde{w}} = \rho \operatorname{Re} i\Delta\psi_k|_{w=\tilde{w}}.$

$(\mathrm{III}) = 2\operatorname{Re}\left(\left\langle f, \frac{\partial f}{\partial w}\right\rangle i(F_k + \cdots) + \cdots\right)\Big|_{w=\tilde{w}} \to F_k 2\operatorname{Re} i\left\langle f, \frac{\partial f}{\partial w}\right\rangle\Big|_{w=\tilde{w}}.$

Но $\left\langle f, \frac{\partial f}{\partial w}\right\rangle$ не содержит слагаемых веса 0, поэтому

$(\mathrm{III}) \to 0,$

$(\mathrm{IV}) \to 2\operatorname{Re}\langle \Delta f_{k-1}, \bar{f}_1\rangle|_{w=\tilde{w}} = 2\rho \operatorname{Re}\langle\Delta\varphi_{k-1}, z\rangle|_{w=\tilde{w}},$

$(\mathrm{V}) \to F_k^*(f_1, \bar{f}_1, \operatorname{Re} g_2) = F_k^*(Cz, \overline{Cz}, \rho u).$

Суммируя, получаем:

$\Phi_k = \rho \operatorname{Re}(i\Delta\psi_k + 2\langle\Delta\varphi_{k-1}, z\rangle)|_{w=\tilde{w}} + F_k^*(Cz, \overline{Cz}, \rho u) - \rho F_k(z, \bar{z}, u).$

Если обозначить $\operatorname{Re}(i\Delta\psi_s + 2\langle\Delta\varphi_{s-1}, z\rangle)|_{w=\tilde{w}}$ через $L_s(h)$, то

$$L_k(h) = F_k(z, \bar{z}, u) - \rho^{-1}F_k^*(Cz, \overline{Cz}, \rho u). \tag{6.4}$$

В работе [3] доказано, что уравнение $L_s(h) \equiv G \bmod \mathfrak{N}$ имеет единственное решение относительно $\Delta\varphi_{s-1}$, $\Delta\psi_s$ в классе отображений $(\Delta\varphi, \Delta\psi)$, для которых набором начальных данных служит набор $(E, 1, 0, 0)$. Правая часть (6.4) принадлежит $\mathfrak{N}$, таким образом, $L_k(h) \equiv 0 \bmod \mathfrak{N}$ и на основании приведенного утверждения заключаем, что

$$\Delta\varphi_{k-1} = 0, \quad \Delta\psi_k = 0, \tag{7.4}$$

а также

$$F_k^*(Cz, \overline{Cz}, \rho u) = \rho F_k(z, \bar{z}, u). \tag{8.4}$$

Вычисление $\Phi_{k+1}$.

$$(\mathrm{I}) = \mathrm{Re}\, i\left(\frac{\partial g}{\partial w}\, i\,(F_k + F_{k+1} + \cdots) + \cdots\right)\Big|_{w=\tilde w} \to$$

$$\to -\rho F_{k+1}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\tilde\psi}{\partial w}\right)_0 - \rho F_k\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\tilde\psi}{\partial w}\right)_1 =$$

$$= -\rho F_{k+1} - \rho F_k 2\,\mathrm{Re}\, i\langle z, a\rangle.$$

$$(\mathrm{II}) \to \rho\,\mathrm{Re}\; i\Delta\psi_{k+1}\big|_{w=\tilde w}.$$

$$(\mathrm{III}) = -2\,\mathrm{Re}\, i\left\langle f_0\frac{\partial f}{\partial w}\right\rangle\Big|_{w=\tilde w}(F_k + F_{k+1} + \cdots) + \cdots \to$$

$$\to -\rho F_k 2\,\mathrm{Re}\, i\left(\left\langle\tilde\varphi, \frac{\partial\tilde\varphi}{\partial w}\right\rangle\right)_1 - \rho F_{k+1}2\,\mathrm{Re}\, i\left(\left\langle\tilde\varphi, \frac{\partial\tilde\varphi}{\partial w}\right\rangle\right)_0,$$

$$\left(\left\langle\tilde\varphi_0, \frac{\partial\tilde\varphi}{\partial w}\right\rangle\right)_1 = \left\langle\tilde\varphi_1, \left(\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial w}\right)_0\right\rangle = \langle z, a\rangle, \quad \left(\left\langle\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial w}\right\rangle\right)_0 = 0.$$

Таким образом, $(\mathrm{III}) \to -\rho F_k 2\mathrm{Re}\, i\langle z, a\rangle$.

$$(\mathrm{IV}) \to \rho 2\,\mathrm{Re}\,\langle\Delta\varphi_k, z\rangle\big|_{w=\tilde w}.$$

$$(\mathrm{V}) = F_k^*(f, \bar f, \mathrm{Re}\, g) = \rho F_k(\varphi, \bar\varphi, \mathrm{Re}\,\psi) =$$

$$= \rho F_k(z + \varphi_2 + \cdots, \bar z + \bar\varphi_2 + \cdots, u + \mathrm{Re}\,\psi_3 + \cdots) =$$

$$= \rho\,(F_k + dF_k(\varphi_2 + \cdots, \bar\varphi_2 + \cdots, \mathrm{Re}\,\psi_3 + \cdots) + \cdots))\big|_{(z,\bar z,u)} \to$$

$$\to \rho dF_k(\varphi_2, \bar\varphi_2\,\mathrm{Re}\,\psi_3) = \rho 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_k}{\partial z}(2i\langle z, a\rangle z + \tilde w a) + i\langle z, a\rangle\tilde w\frac{\partial F_k}{\partial u}\right).$$

$$(\mathrm{VI}) = F_{k+1}^*(f, \bar f, \mathrm{Re}\, g) \to F_{k+1}^*(Cz, \overline{Cz}, \rho u).$$

Суммируя, получаем:

$$\Phi_{k+1} = \rho L_{k+1}(h) + F_{k+1}^*(Cz, Cz, \rho u) - \rho F_{k+1}(z, z, u) +$$

$$+ 2\rho\,\mathrm{Re}\left(-2i\langle z, a\rangle F_k + 2i\langle z, a\rangle\frac{\partial F_k}{\partial z}(z) + \tilde w\frac{\partial F_k}{\partial z}(a) + i\langle z, a\rangle\tilde w\frac{\partial F_k}{\partial u}\right).$$

Таким образом,

$$L_{k+1}(h) + T(F_k, a) = F_{k+1}(z, \bar z, u) - \rho^{-1}F_{k+1}^*(Cz, \overline{Cz}, \rho u), \tag{9.4}$$

где

$$T(F, a) = \mathrm{Re}\left(-2i\langle z, a\rangle F + 2i\langle z, a\rangle\frac{\partial F}{\partial z}(z) + \tilde w\frac{\partial F}{\partial z}(a) + i\langle z, a\rangle\tilde w\frac{\partial F}{\partial u}\right).$$

Отметим, что функционал $T$ вещественно линеен по каждому своему аргументу.

Вычисление $\Phi_{k+2}$.

$$(\mathrm{I}) = \operatorname{Re} i \left( \frac{\partial g}{\partial w} \Big|_{w=\widetilde{w}} i (F_k + F_{k+1} + F_{k+2} + \cdots) + \cdots \right) \to$$

$$\to - \rho F_{k+2} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial w} \right)_0 - \rho F_{k+1} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial w} \right)_1 - \rho F_k \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial w} \right)_2 =$$

$$= - \rho F_{k+2} - \rho F_{k+1} 2 \operatorname{Re} i \langle z, a \rangle - \rho F_k 2 \operatorname{Re} ((r + i \langle a, a \rangle) \widetilde{w} - 2 \langle z, a \rangle^2).$$

$$(\mathrm{II}) \to \rho \operatorname{Re} i \Delta \psi_{k+2} \big|_{w=\widetilde{w}}.$$

$$(\mathrm{III}) \to 2\rho \operatorname{Re} i \left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle (F_k + F_{k+1} + F_{k+2} + \cdots) + \cdots \to$$

$$\to - \rho F_k 2 \operatorname{Re} i \left( \left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle \right)_2 - \rho F_{k+1} 2 \operatorname{Re} i \left( \left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle \right)_1 -$$

$$- \rho F_{k+2} 2 \operatorname{Re} i \left( \left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle \right)_0,$$

$$\left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle_2 = \left\langle \varphi_2, \left( \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)_0 \right\rangle + \left\langle \varphi_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)_1 \right\rangle =$$

$$= 2i \langle z, a \rangle^2 + w \langle a, a \rangle - 2i \langle z, a \rangle \langle a, z \rangle + (r - i \langle a, a \rangle) \langle z, z \rangle,$$

$$\left( \left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle \right)_1 = \left\langle \varphi_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)_0 \right\rangle = \langle z, a \rangle, \quad \left( \left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle \right)_0 = 0,$$

поэтому

$$(\mathrm{III}) \to \rho F_k 2 \operatorname{Re} (-2 \langle z, a \rangle^2 + 2 \langle z, a \rangle \langle a, z \rangle) - \rho F_{k+1} 2 \operatorname{Re} i \langle z, a \rangle.$$

$$(\mathrm{IV}) \to 2\rho \operatorname{Re} \langle \Delta \varphi_{k+1}, z \rangle \big|_{w=\widetilde{w}} + 2\rho \operatorname{Re} \langle \Delta \varphi_k, \widetilde{\varphi}_2 \rangle \big|_{w=\widetilde{w}}.$$

$$(\mathrm{V}) = F_k^* (f, \bar{f}, \operatorname{Re} g) = \rho F_k (\varphi, \bar{\varphi}, \operatorname{Re} \psi) =$$

$$= \rho F_k (z + \varphi_2 + \cdots, \bar{z} + \bar{\varphi}_2 + \cdots, u + \operatorname{Re} \psi_3 + \cdots) =$$

$$= \rho (F_k + dF_k (\varphi_2 + \cdots, \bar{\varphi}_2 + \cdots, \operatorname{Re} \psi_3 + \cdots) +$$

$$+ \frac{1}{2} d^2 F_k (\varphi_2 + \cdots, \bar{\varphi}_2 + \cdots, \operatorname{Re} \psi_3 + \cdots) + \cdots) \to$$

$$\to \rho \left( dF_k (\varphi_3, \bar{\varphi}_3, \operatorname{Re} \psi_4) + \frac{1}{2} d^2 F_k (\varphi_2, \varphi_2, \operatorname{Re} \psi_3) \right).$$

Чтобы выделить множитель при $r$, выпишем первое слагаемое подробно:

$$\rho \operatorname{Re} \left( 2 \frac{\partial F_k}{\partial z} (\varphi_3) + \frac{\partial F_k}{\partial u} \psi_4 \right) = \rho \operatorname{Re} \left( 2 \frac{\partial F_k}{\partial z} (- 4 \langle z, a \rangle^2 z + \right.$$

$$\left. + (r + i \langle a, a \rangle) \widetilde{w} z + 2i \langle z, a \rangle \widetilde{w} a) + \frac{\partial F_k}{\partial u} (- 4 \langle z, a \rangle^2 \widetilde{w} + (r + i \langle a, a \rangle) w^2) \right).$$

Таким образом, множителем при $r$ будет выражение

$$\rho \operatorname{Re} \left( 2 \widetilde{w} \frac{\partial F_k}{\partial z} (z) + \widetilde{w}^2 \frac{\partial F_k}{\partial u} \right).$$

$$(\mathrm{VI}) = F^*_{k+1}(f, \bar f, \operatorname{Re} g) = F^*_{k+1}(Cz + f_2 + \cdots, \overline{Cz} + \bar f_2 + \cdots, \rho u + \operatorname{Re} g_3 + \cdots) =$$
$$= (F^*_{k+1} + dF^*_{k+1}(f_2 + \cdots, \bar f_2 + \cdots, \operatorname{Re} g_3 + \cdots) + \cdots)|_{(Cz, Cz, \rho u)} \to$$
$$\to dF^*_{k+1}(f_2, \bar f_2, \operatorname{Re} g_3)|_{(Cz, \overline{Cz}, \rho u)}.$$

$(\mathrm{VII}) \to F^*_{k+2}(Cz, \overline{Cz}, \rho u)$.

Суммируя, получаем:

$$\rho^{-1}\Phi_{k+2} = L_{k+1}(h) + \rho^{-1}F^*_{k+2}(Cz, \overline{Cz}, \rho u) - F_{k+2}(z, \bar z, u) +$$
$$+ P_1(\rho^{-1}F^*_{k+1}(Cz, Cz, \rho u), a) + F_{k+1}P_2(a) + rP_3(F_k) +$$
$$+ P_4(F_k, a) + P_5(F_k, a, a) + P_6(\Delta\varphi_k, a), \tag{10.4}$$

где каждое из выражений $P_1, \ldots, P_6$ вещественно линейно по каждому своему аргументу, например, $P_5$ квадратично зависит от $a$.

Отметим, что

$$P_3(F) = \operatorname{Re}\left(-2wF + 2w\frac{\partial F}{\partial z}(z) + \tilde w^2 \frac{\partial F}{\partial u}\right).$$

ЛЕММА 2. *Пусть $F \neq 0$, тогда система $(\sigma, \lambda, a, r)$ является непрерывной функцией матрицы $U$. Пусть, далее, $k$ — наибольший номер такой, что $F_\varkappa = F_\varkappa^* = 0$ для всех $\varkappa < k$, тогда имеют место следующие оценки*:

$$\Theta[m(F_k)/m(F^*_k), \|U\|, k] \leqslant |\lambda| \leqslant \Theta[m(F_k)/m(F^*_k), \|U\|, k],$$
$$|a| \leqslant \Theta[|\lambda|, \|U\|, m(F_{k+1}), m(F^*_{k+1}), k/1;\ m(F_k)],$$
$$|r| \leqslant \Theta[|\lambda|, \|U\|, m(F_{k+1}), m(F_{k+2}), m(F^*_{k+1}), m(F^*_{k+2}), k/1;\ m(F_k)].$$

Доказательство. Из равенства $\langle Cz, Cz\rangle = \rho\langle z, z\rangle$ получаем:

$$\langle Uz, Uz\rangle = \sigma\langle z, z\rangle. \tag{11.4}$$

Это тождество означает, что $\sigma$ зависит от $U$. В силу (8.4)

$$\lambda^{k-2}F^*_k(Uz, \overline{Uz}, \sigma u) = \sigma F_k(z, \bar z, u),$$

откуда

$$\lambda^{k-2} = \frac{\sigma F_k(U^{-1}z, \overline{U^{-1}z}, \sigma u)}{F^*_k(z, \bar z, u)}.$$

Здесь мы заменили $z$ на $U^{-1}z$, $u$ на $\sigma u$. Полученное равенство означает, что при фиксированных $F$ и $F^*$ $\lambda$ зависит от $U$ непрерывно.

Пусть $m(F_k^*) = |F_k^*(z', \bar z', u')|$, где $|z'| \leqslant 1$, $|u| \leqslant 1$, тогда

$$|\lambda| = \left(\frac{|F_k(U^{-1}z', U^{-1}z', \sigma u')|}{m(F^*_k)}\right)^{\frac{1}{k-2}} \leqslant \Theta[m(F_k)/m(F^*_k), \|U\|, k].$$

Пусть, далее, $m(F_k)=|F_k(z'', \bar{z}'', u'')$, где $|z''|\leqslant 1$, $|u''|\leqslant 1$, тогда

$$|\lambda|=\left(\frac{m(F_k)}{|F_k^*(Uz'', Uz'', \sigma u'')|}\right)^{\frac{1}{k-2}}\geqslant\Theta\,[m(F_k)/m(F_k^*), \|U\|, k].$$

Рассмотрим тождество (9.4). Оно имеет вид

$$L_{k+1}(h)+T(F_k, a)=B,$$

где $B$ от $a$ не зависит. В работе [5] показано, что это тождество при $F_k\neq 0$ допускает лишь единственное решение относительно $(a, [\Delta\varphi_k], [\Delta\varphi_{k+1}])$. Далее, (9.4) является системой линейных уравнений относительно $a$ и $[\Delta\varphi_k], [\Delta\psi_{k+1}]$, поэтому из приведенного утверждения следует, что эта система уравнений содержит подсистему с определителем, обращающимся в нуль лишь при $F_k=0$. А так как решение линейной системы непрерывно зависит от коэффициентов, то заключаем, что $a$ непрерывно зависит от $\lambda$ и $U$.

Обозначив матрицу указанной системы через $\alpha$, вектор, составленный из координат $a$ и $[\Delta\varphi_k]$, $[\Delta\psi_{k+1}]$, — через $\xi$, вектор, стоящий в правой части подсистемы, — через $A$, получаем:

$$|a|\leqslant|\xi|=|\alpha^{-1}A|\leqslant\|\alpha^{-1}\|\cdot|A|.$$

Но

$$|A|\leqslant\Theta\,[m(F_{k+1}), m(F_{k+1}^*), |\lambda|, \|U\|, k],$$

$$\|\alpha^{-1}\|\leqslant\Theta[\|\alpha\|, k/|\det\alpha|],$$

$$|\det\alpha([F_k])|\geqslant\min(|\det\alpha([\check{F}_k])|\ \text{ при }\ m(\check{F}_k)=m(F_k))\geqslant\Theta[m(F_k)].$$

Следовательно,

$$\|\alpha^{-1}\|\leqslant\Theta[k/1;\ m(F_k)].$$

Окончательно

$$|a|\leqslant\Theta\,[m(F_{k+1}), m(F_{k+1}^*), |\lambda|, \|U\|, k/1;\ m(F_k)].$$

Рассмотрим, наконец, тождество $\Phi_{k+2}=0$. В соответствии с (10.4) его можно записать так:

$$L_{k+2}+rP_3(F_k)=D.$$

В работе [4] показано, что это тождество позволяет однозначно определить $r$ и $[\Delta\varphi_{k+1}]$, $[\Delta\psi_{k+2}]$ в случае, если $F_k\neq 0$. Данное тождество линейно относительно указанной группы переменных, поэтому, выделяя из соответствующей системы линейных уравнений подсистему, получаем $\beta\xi=B$, где $\beta$ — матрица подсистемы, $\det\beta=0$ тогда и только тогда, когда $F_k=0$, $\xi$ — вектор, составленный из $r$ и коэффициентов $\Delta\varphi_{k+1}$, $\Delta\varphi_{k+2}$. Таким образом, $r$ непрерывно зависит от $U$, $\lambda$, $a$. Из неравенства $|r|\leqslant|\xi|\leqslant$

$\leqslant \|\beta^{-1}\| |B|$ и (10.4) получаем оценку

$$|r| \leqslant \Theta [\|U\|, |\lambda|, |a|, m(F_{k+1}), m(F_{k+2}), m(F^*_{k+1}), m(F^*_{k+2}), k/1; m(F_k)].$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\Delta\varphi_k$ определяется из тождества (9.4) и поэтому допускает ту же оценку, что и параметр $a$. Подставляя оценку для $a$, получаем окончательно:

$$|r| \leqslant \Theta [\|U\|, |\lambda|, m(F_{k+1}), m(F_{k+2}), m(F^*_{k+1}), m(F^*_{k+2}), k/1; m(F_k)].$$

Лемма доказана.

## § 5. Доказательство теоремы

Фиксируем две поверхности $M$ и $M^*$ вида (1.1) и какое-либо отображение $h$ поверхности $M$ в $M^*$. Пусть $\langle z, z\rangle$ — форма Леви поверхности $M$, а $\langle zz\rangle^*$ — форма Леви поверхности $M^*$. Так как $M$ и $M^*$ голоморфно эквивалентны, то существует линейная замена переменных $h_0$, переводящая форму $\langle z, z\rangle^*$ в $\langle z, z\rangle$ и не изменяющая координаты $w$. Подчеркнем, что $h_0$ выбирается вне зависимости от $h$. Преобразование $h_0$ переводит поверхность $M^*$ в поверхность $M^{**}$ вида (1.1), имеющую такую же форму Леви, как и поверхность $M$. Пусть $h_1$ и $h_2$ — приведения поверхностей $M$ и $M^{**}$ соответственно к нормальной форме; $M_1$ — нормальная форма $M$, $M_2$ — нормальная форма поверхности $M^{**}$. Рассмотрим преобразование

$$h_3 = h_2(h_0(h(h_1^{-1}))).$$

Это преобразование переводит $M_1$ в $M_2$ и потому может рассматриваться как приведение $M_1$ к нормальной форме. Обозначим через $p(h)$ набор параметров, соответствующий приведению $h_3$. Преобразование $h$ совпадает с композицией $h_0^{-1}(h_2^{-1}(h_3(h_2)))$. Преобразования $h_0$, $h_1$ и $h_2$ выбраны вне зависимости от $h$ и поэтому в силу утверждения (b) § 3 для получения нижней оценки $R(h)$ достаточно дать нижнюю оценку для $R(h_3)$ и верхнюю оценку для $m(h_3)$. Но в силу леммы 1 $m(h_3) \leqslant \Theta[m(M_1)d(M_1), R(h_3); p(h)]$, т. е. нижняя оценка для $R(h_3)$ при фиксированном $p(h)$ дает одновременно и верхнюю оценку для $m(h_3)$ для параметров, достаточно близких к $p(h)$. Таким образом, оценка $R(h)$ сводится к получению нижней оценки для $R(h_3)$.

Докажем утверждение (2) (см. формулировку теоремы). Утверждения (1) и (3) будут ниже сведены к этому утверждению.

Пусть $M$ несферична, тогда $M_1$ и $M_2$ имеют вид

$$v = \langle z, z\rangle + \sum_{s=k}^{\infty} F_s(z, \bar z, u), \quad v = \langle z, z\rangle + \sum_{s=k}^{\infty} F^*_s(z, \bar z, u);$$

при этом $F_k \neq 0$ и $F_k^* \neq 0$ (см. (8.4)). Параметр $\lambda$ из набора $p(h) = (U, \sigma, \lambda, a, r)$ в силу леммы 2 однозначно определяется через $F_k$, $F_k^*$ и матрицу $U$.

Так как $U$ сохраняет с точностью до знака форму $\langle z, z\rangle$, то

$$|\det U|=1. \tag{1.5}$$

Напомним, что $C=\lambda U$ и что по определению $C=\left.\frac{\partial h_3}{\partial z}\right|_0$. Так как линейные части отображений $h_2$, $h_0$, $h$ и $h_1^{-1}$ оставляют на месте плоскость $w=0$, то $C$ выражается через $\left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_0$. Следовательно,

$$\|C\|\leqslant\Theta\left[\left\|\left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_0\right\|\right]. \tag{2.5}$$

Обозначим через $\chi(\mu)$ семейство локальных отображений $h$ из $M$ в $M^*$ такое, что $\left\|\left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_0\right\|\leqslant\mu$. Для всякого $h\in\chi(\mu)$ в силу (2.5) получаем для матрицы $C$ из набора $p(h)=p(h_3)$:

$$\|C\|\leqslant\Theta[\mu]. \tag{3.5}$$

Множество невырожденных матриц, удовлетворяющих соотношениям (1.5) и (3.5), компактно; по теореме Лободы параметры $\sigma$, $\lambda$, $a$, $r$ вычисляются через матрицу $U$, по лемме 2 эта зависимость непрерывна. Следовательно, можно указать компакт $\mathscr{P}$ в пространстве наборов $p=(U, \sigma, \lambda, a, r)$ такой, что для всякого $h\in\chi(\mu)$ $p(h)\in\mathscr{P}$. Следовательно, по лемме 1, $R(h_3)\geqslant\Theta[\mu]$ и потому для $h\in\chi(\mu)$ $R(h)>C_2$, где $C_2>0$ и зависит лишь от $\mu$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) (см. формулировку теоремы) получается почти дословным повторением вышеприведенного рассуждения. Разница состоит лишь в том, что в случае положительно определенной формы Леви группа матриц, сохраняющих форму, оказывается компактной и потому нет необходимости ограничивать $\left\|\left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_0\right\|$.

Докажем утверждение (1) теоремы. Если $M$ несферична, то утверждение (1) следует из уже доказанного утверждения (2). Будем предполагать, что $M$ сферична. В этом случае $M_1$ и $M_2$ имеют один и тот же вид $v=\langle z, z\rangle$ и, следовательно, $h_3$ является дробно-линейным преобразованием вида (2.4). Пусть $\|dh|_0\|\leqslant\mu$, $\|d^2h|_0\|\leqslant\mu$. Параметры приведения $h_3$ совпадают с набором коэффициентов преобразования вида (2.4). Эти параметры, а следовательно, и коэффициенты вычисляются через $dh|_0$ и $d^2h|_0$ и поэтому коэффициенты дробно-линейного преобразования оцениваются сверху через $\mu$. Множество особенностей $h_3$ задается равенством $1-\delta=0$ (см. (2.4)). Следовательно, из того, что $|a|\leqslant\Theta[\mu]$ и $|r|\leqslant\Theta[\mu]$, получаем, что $R(h_3)\geqslant\Theta[\mu]$; а из того, что $\|C\|\leqslant\Theta[\mu]$, $|\rho|\leqslant\Theta[\mu]$, получаем дополнительно, что $m(h_3)\leqslant\Theta[\mu]$. Поэтому из утверждения (b) § 3 получаем, что $R(h)\geqslant C_1$, где $C_1>0$ и зависит лишь от $\mu$. Теорема доказана.

## § 6. Замечание к теореме

В формулировке теоремы не сказано ничего о характере зависимости оценивающих констант $C_1$, $C_2$, $C_3$ от выбора поверхностей $M$ и $M^*$. Чтобы охарактеризовать эту зависимость, будем считать, что $M$ и $M^*$ заданы в нормальной форме. Анализируя доказательство, можно проследить, что эти константы могут быть выбраны зависящими лишь от $R(M)$, $m(M)$, $d(M)$, $m(F_k)$, аналогичной четверки для $M^*$ и параметров, указанных в формулировке теоремы. Здесь $F_k$ — это первый (ненулевой) член нормальной формы записи $M$, стоящий после формы $\langle z, z\rangle$.

### Литература


1. *Alexander H.* Holomorphic mappings from the ball and polydisc.— Math. Ann., 1974, v. 209, № 3, p. 245—256.
2. *Пинчук С. И.* О голоморфных отображениях вещественно аналитических гиперповерхностей.— Матем. сборник, 1978, 105(147), № 4, с. 574—593.
3. *Chern S., Moser I.* Real hypersurfaces in complex manifolds.— Acta Math., 1974, v. 133, № 3—4, p. 219—271.
4. *Белошапка В. К.* О размерности групп автоморфизмов аналитической гиперповерхности.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1979, т. 43, № 2, с. 243—266.
5. *Лобода А. В.* О локальных автоморфизмах вещественно аналитических гиперповерхностей.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, т. 45, № 3, с. 620—645.


Поступила в редакцию
28.V.1981