Три семейства функций сложности один

Белошапка В.К.

17.06.2016

Аннотация

В работе описаны некоторые семейства функций двух переменных аналитической сложности единица, обладающие некоторыми редкими свойствами. Во-первых, классифицированы линейные уравнения с постоянными коэффициентами,т.ч. все их аналитические решения имеют сложность не выше единицы (теорема 2). Во-вторых, классифицированы пары аналитических функций, таких что любая их линейная комбинация имеет сложность не выше единицы (теорема 5). В-третьих, дано явное описание функций, т.ч. их орбиты под действием группы $O(2)$ состоят из функций, сложности не выше единицы (теорема 7).

[1]

1.Введение

Сложность аналитических функций нескольких переменных изучалась в работах [1], [2], [3], [4], [5]. В работе [3] был предложен способ измерения сложности аналитических, возможно многозначных, функций

---

[1]

Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия vkb@strogino.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ РФФИ 11-01-00495-а и 11-01-12033-офи-м-2011

двух переменных. Для любой аналитической функции $z(x, y)$ определена ее аналитическая сложность $N(z)$. Эта величина, может принимать значения $(0, 1, 2, \ldots, \infty)$. При этом сложность ноль имеют функции, зависящие лишь от одного переменного - $a(x)$ или $b(y)$. Сложность один имеют функции , зависящие от обеих переменных, если при этом имеется локальное представление вида $z(x, y) = c(a(x) + b(y))$, где (a, b, c) - аналитические функции одного переменного. Функции сложности два - это функции, чья сложность не равна нулю или единице и имеющие представление $z(x, y) = C(A_1(x, y) + B_1(x, y))$, где A_1 и B_1 имеют сложность не выше единицы. И так далее. Если же некая функция z не попала ни в один из классов Cl_n, то мы полагаем $N(z) = \infty$. Условие $N(z) \leq 1$ равносильно тому, что росток, локально представляющий z, удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$\delta(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z''_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0 \qquad (1)$$

Дифференциальный полином $\delta(z)$ - это числитель рационально-дифференциального выражения $(ln(z'_y/z'_x))''_{xy}$.

2. Пространства решений линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим пару функций $(z_1 = \mathrm{e}^{ax+by},\ z_2 = \mathrm{e}^{px+qy})$. Если $ab = pq = 0$, то $\max(N(z_1), N(z_2)) = 0$. Пусть это не так, тогда $\max(N(z_1), N(z_2)) = 1$. При каком условии на набор параметров (a, b, p, q) сложность любой линейной комбинации z_1 и z_2 не превосходит единицы? Вот ответ.

Лемма 1: Пусть $(ab, pq) \neq 0$. Сложность любой линейной комбинации z_1 и z_2 не превосходит единицы в трех случаях:
(1) $p = a$, (2) $q = b$, (3) $aq = bp$.
Доказательство: Запишем условие (1) для $z = t_1 z_1 + t_2 z_2$, получим

$$(b-q)\,(a-p)\,(qa-bp)\left(\left(\mathrm{e}^{ax+by}\right)^2 abt_2{}^2 - \left(\mathrm{e}^{px+qy}\right)^2 pqt_1{}^2\right)\mathrm{e}^{ax+by}\mathrm{e}^{px+qy}\,t_1\,t_2 = 0,$$

откуда и следует наше утверждение.

Из полученной леммы можно получить любопытное следствие. Пусть имеется одно однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $P(D)(z(x,y)) = 0$ и $\mathcal{L}$ - совокупность его аналитических решений. Будем понимать сложность пространства решений $N(\mathcal{L})$, как максимум (конечный или бесконечный) сложностей аналитических решений этого уравнения.

Теорема 2: Если $N(\mathcal{L}) \leq 1$, то уравнение $P(D)(z(x,y)) = 0$ - это уравнение одного из четырех типов:
(1) $z'_x - Az = 0$, решения $z = \mathrm{e}^{Ax}\, b(y)$,
(2) $z'_y - Bz = 0$, решения $z = \mathrm{e}^{By}\, a(x)$,
(3) $kz'_x + lz'_y = 0$, решения $z = c(lx - ky)$,
(4) $z''_{xy} = 0$, решения $z = a(x) + b(y)$.
Доказательство: Пусть $\chi = \{P(\lambda_1, \lambda_2) = 0\}$ - характеристическое многообразие уравнения и пусть $(z_1 = \mathrm{e}^{ax+by},\ z_2 = \mathrm{e}^{px+qy})$ два его решения, т.е. (a,b) и $(p,q) \in \chi$. Теперь из леммы 1 следует, что χ содержится либо в вертикальной прямой (случай (1)), либо в горизонтальной (случай (2)), либо в прямой, проходящей через начало координат. Есть еще один случай. Он не фигурирует в лемме 1, т.к. ему соответствуют две функции сложности ноль. Это - координатный крест - случай, когда одна из координат равна нулю (случай (4)). Случай (1) - это $P(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 - A)^{n_1}$, случай (2) - это $P(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_2 - B)^{n_2}$, случай (3) - это $P(\lambda_1, \lambda_2) = (k\lambda_1 + l\lambda_2)^{n_3}$, случай (4) - это $P(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1\lambda_2)^{n_4}$. Во всех четырех случаях уравнение не трудно проинтегрировать и убедиться, что для выполнения условия $N(\mathcal{L}) \leq 1$ необходимо и достаточно выполнение условий $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$.

Заметим, что в случае, если кратности (n_1, n_2, n_3, n_4) произвольны, то пространства решений полученных уравнений имеют конечную сложность, хотя и большую единицы.

3. L-пары

Если у нас имеется некоторая совокупность функций, то эта совокупность образует линейное пространство, если она замкнута относительно сложения и умножения на константы (комплексные числа). Умножение функции на ненулевую константу ее сложности не меняет $N(\lambda z(x,y)) = N(z(x,y))$. Т.е. каждая ненулевая функция сложности один порождает одномерное пространство, содержащееся в Cl_1. Что же касается сложения, то из приведенного выше определения сразу следует, что если $N(z_1(x,y))$ и $N(z_2(x,y))$ не выше n, то $N(z_1(x,y)+z_2(x,y)) \le (n+1)$. И можно показать, что для функции в "общем положении"это неравенство превращается в равенство. Вот пример: $N(xy) = 1,\ N(x^2) = 0,\ N(xy+x^2) = 2$. Однако встречаются исключения. $N(xy) = 1,\ N(x+y) = 1$, но $N((xy)+(x+y)) = 1$. Более того, любая линейная комбинация $t_1(xy)+t_2(x+y)$ тоже имеет сложность не выше единицы.

Определение: Будем говорить, что пара функций $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ является *L-парой сложности* n, если сложность любой их линейной комбинации не превосходит максимума из сложностей кажой из них, т.е.

$$N(t_1(z_1(x,y)+t_2z_2(x,y)) \le \max(N(z_1),N(z_2)) = n.$$

При этом предполагается, что это две аналитические функции с общей областью определения (т.е. есть точка, где определены ростки обеих функций). Лемма 1 это теперь классификация L-пар специального вида. Сформулируем несколько очевидных утверждений.

Утверждение 3: z_1 и z_2 являются L-парой сложности ноль, тогда и только тогда, когда они зависят от одного и того же переменного.

Утверждение 4: Свойство (z_1,z_2) быть L-парой не меняется
(1) под действием псевдогруппы замен координат (x,y) вида

$$\{(x \to p(x),\ y \to q(y)),\}$$

(2) под действием замены вида $(x \to y,\ y \to x)\}$,
(3) под действием группы аффинных преобразований плоскости (z_1,z_2).

Псевдогруппу, порожденную преобразованиями (1), (2) и (3) будем обозначать $\mathcal{G}$. Описание L-пар естественно давать с точностью до действия $\mathcal{G}$.

Вернемся к лемме 1. Условие, из которого она следует, можно ослабить. Достаточно предположить, что сложность не выше чем один имеет только сумма z_1+z_2, а не любая линейная комбинация. Действительно, записывая условие (1) для $z = z_1+z_2$, получим

$$(b-q)\,(a-p)\,(qa-bp)\left(\left(\mathrm{e}^{ax+by}\right)^2 ab - \left(\mathrm{e}^{px+qy}\right)^2 pq\right)\mathrm{e}^{ax+by}\mathrm{e}^{px+qy} = 0,$$

откуда получаем абсолютно то же самое утверждение. Имея ввиду это различие, можно модифицировать наше определение

Определение: Будем говорить, что пара функций $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ является *парой сложности* n, если $N(z_1(x,y)+z_2(x,y)) \leq \max(N(z_1),N(z_2)) = n$.

Теперь лемму 1 можно усилить следующим образом

Лемма 1': Пусть $(ab,pq) \neq 0$. Пара $(z_1 = \mathrm{e}^{ax+by},\ z_2 = \mathrm{e}^{px+qy})$ является парой сложности один тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из соотношений (1) $p=a$, (2) $q=b$, (3) $aq=bp$.

Перейдем к построению произвольной L-пары. Описание будет дано в виде списка случаев, которые мы будем выделять и обозначать по ходу изложения.

Пусть имеется две функции, чья сложность не превосходит единицы т.е. $z_1 = c_1(a_1(x)+b_1(y)),\ z_2 = c_2(a_2(x)+b_2(y))$. Причем $\max(N(z_1),N(z_2)) = 1$, т.е. хотя бы одна из функций имеет сложность один, пусть вторая, т.е. a_2, b_2 и r - не постоянны и локально обратимы в общей точке. Заменим x на $a_2^{-1}(x)$ и y на $b_2^{-1}(y)$. Наше условие примет вид

$$c(a(x)+b(y)) + t\cdot r(x+y) \in Cl_1 \quad \forall t, \quad r' \neq 0. \tag{2}$$

Пусть первое слагаемое имеет сложность ноль. Обозначение: **случай (01)**. В этом случае первое слагаемое - это функция одного переменного, пусть $a(x)$. Запишем условие (1) для $a(x) + t\cdot r(x+y)$. Получим два соотношения (коэффициенты при t и при t^2, индексные обозначения для производных).

$$a_1 r_1 r_3 = 2\,a_1 {r_2}^2 - a_2 r_1 r_2$$
$$r_1 r_3 = {r_2}^2$$

Если $r_2 = 0$, т.е. $r(x+y) = k\cdot(x+y)+l$, то в качестве $a(x)$ годится любая функция. **Это вариант (01.1)**. Эту пару можно записать так $(a(x),(x+y))$.

Если r_2 не ноль, то, решая второе дифференциальное уравнение, получаем $r(t) = \rho\cdot e^{mt}+\tilde{\rho}$. Из первого тогда получаем, что $a(x) = \alpha\cdot e^{mt}+\tilde{\alpha}$. После упрощения пара принимает вид (kx, xy). Это**вариант (01.2)**.

Рассмотрим теперь **случай (11)**, когда оба слагаемых имеют сложность один, т.е. (a', b', c', r') - функции не равные нулю тождественно. Записывая для $c(a(x)+b(y))+t\cdot r(x+y)$ условие (1), получим выражение, которое полиномиально зависит от t. Тождественное обращение его в ноль равносильно обращению в ноль коэффициентов при всех степенях t (при 1-й, 2-й и 3-й), а именно

$$\begin{gathered}
{a_1}^2 b_1 c_3 {r_1}^2 - a_1 {b_1}^2 c_3 {r_1}^2 - {a_1}^2 c_2 r_1 r_2 - a_1 b_2 c_2 {r_1}^2 + a_2 b_1 c_2 {r_1}^2 + \\
{b_1}^2 c_2 r_1 r_2 - a_1 c_1 r_1 r_3 + 2\, a_1 c_1 {r_2}^2 - a_2 c_1 r_1 r_2 + b_1 c_1 r_1 r_3 - \\
2\, b_1 c_1 {r_2}^2 + b_2 c_1 r_1 r_2 = 0 \\
{a_1}^3 b_1 c_1 c_3 {r_1}^2 - {a_1}^3 b_1 {c_2}^2 {r_1}^2 - a_1 {b_1}^3 c_1 c_3 {r_1}^2 + a_1 {b_1}^3 {c_2}^2 {r_1}^2 - \\
2\, {a_1}^2 b_2 c_1 c_2 {r_1}^2 + 2\, a_2 {b_1}^2 c_1 c_2 {r_1}^2 - {a_1}^2 {c_1}^2 r_1 r_3 + {a_1}^2 {c_1}^2 {r_2}^2 + \\
2\, a_1 b_2 {c_1}^2 r_1 r_2 - 2\, a_2 b_1 {c_1}^2 r_1 r_2 + {b_1}^2 {c_1}^2 r_1 r_3 - {b_1}^2 {c_1}^2 {r_2}^2 = 0 \\
{a_1}^3 {b_1}^2 c_1 c_3 r_1 - 2\, {a_1}^3 {b_1}^2 {c_2}^2 r_1 - {a_1}^2 {b_1}^3 c_1 c_3 r_1 + 2\, {a_1}^2 {b_1}^3 {c_2}^2 r_1 + \\
{a_1}^3 b_1 c_1 c_2 r_2 - {a_1}^3 b_2 c_1 c_2 r_1 - a_1 {b_1}^3 c_1 c_2 r_2 + a_2 {b_1}^3 c_1 c_2 r_1 - \\
{a_1}^2 b_1 {c_1}^2 r_3 + {a_1}^2 b_2 {c_1}^2 r_2 + a_1 {b_1}^2 {c_1}^2 r_3 - a_2 {b_1}^2 {c_1}^2 r_2 = 0
\end{gathered} \qquad (3)$$

Исключая c_3 из первого и второго, а также из первого и третьего соотношений, получаем условия обращения в нуль двух квадратичных форм от (c_1, c_2) с общим множителем $a_1 b_1 r_1 (a_1 - b_1)^2$, который в нашем случае может быть равен нулю тождественно только если $a_1 - b_1 = 0$ - (**случай (11.1)**). Пара имеет вид $(c(x+y), r(x+y))$. Далее полагаем, что $a_1 - b_1 \neq 0$.

После деления на ненулевой множитель условия совместности получают вид

$$\begin{gathered}
{a_1}^2 b_1 {c_2}^2 {r_1}^2 + a_1 {b_1}^2 {c_2}^2 {r_1}^2 - {a_1}^2 c_1 c_2 r_1 r_2 - 2\, a_1 b_1 c_1 c_2 r_1 r_2 + a_1 b_2 c_1 c_2 {r_1}^2 + \\
a_2 b_1 c_1 c_2 {r_1}^2 - {b_1}^2 c_1 c_2 r_1 r_2 + a_1 {c_1}^2 {r_2}^2 - a_2 {c_1}^2 r_1 r_2 + b_1 {c_1}^2 {r_2}^2 - b_2 {c_1}^2 r_1 r_2 = 0 \\
2{a_1}^2 {b_1}^2 {c_2}^2 {r_1}^2 - 2{a_1}^2 b_1 c_1 c_2 r_1 r_2 + {a_1}^2 b_2 c_1 c_2 {r_1}^2 - 2 a_1 {b_1}^2 c_1 c_2 r_1 r_2 + \\
a_2 2 {b_1}^2 c_1 c_2 {r_1}^2 + 4 a_1 b_1 {c_1}^2 {r_2}^2 - 2 a_1 b_2 {c_1}^2 r_1 r_2 - 2 a_2 b_1 {c_1}^2 r_1 r_2 = 0
\end{gathered} \qquad (4)$$

Исключая из этих соотношений c_2/c_1, получаем

$$(a_1 - b_1)^3 a_1 b_1 {r_1}^6 a_2 b_2 r_2 \left({a_1}^2 b_1 r_2 - {a_1}^2 b_2 r_1 - a_1 {b_1}^2 r_2 + a_2 {b_1}^2 r_1\right) = 0 \qquad (5)$$

Обращение в ноль первых производных и разности $a_1 - b_1$ невозможно в силу наших предположений.

Рассмотрим имеющиеся возможности по отдельности.

Случай (11.2), одна из внутренних функций a или b - линейна, пусть b, т.е. $b(y) = k \cdot y + l$, где $k \neq 0$. Заменим $k \cdot y + l$ на y и $k \cdot x - l$ на x, тогда $r(t)$ трансформируется в $r(t/k)$. Записывая для $c(a(x) + y) + t \cdot r(x + y)$ условие (1), получим

$$\begin{gathered}
{a_1}^3 c_1 c_2 r_2 + {a_1}^3 c_1 c_3 r_1 - 2\,{a_1}^3 {c_2}^2 r_1 - {a_1}^2 {c_1}^2 r_3 - {a_1}^2 c_1 c_3 r_1 + \\
2\,{a_1}^2 {c_2}^2 r_1 + a_1 {c_1}^2 r_3 - a_1 c_1 c_2 r_2 - a_2 {c_1}^2 r_2 + a_2 c_1 c_2 r_1 = 0 \\
{a_1}^3 c_1 c_3 {r_1}^2 - {a_1}^3 {c_2}^2 {r_1}^2 - {a_1}^2 {c_1}^2 r_1 r_3 + {a_1}^2 {c_1}^2 {r_2}^2 - a_1 c_1 c_3 {r_1}^2 + \\
a_1 {c_2}^2 {r_1}^2 - 2\,a_2 {c_1}^2 r_1 r_2 + 2\,a_2 c_1 c_2 {r_1}^2 + {c_1}^2 r_1 r_3 - {c_1}^2 {r_2}^2 = 0 \\
-{a_1}^2 c_2 r_1 r_2 + {a_1}^2 c_3 {r_1}^2 - a_1 c_1 r_1 r_3 + 2\,a_1 c_1 {r_2}^2 - a_1 c_3 {r_1}^2 - \\
a_2 c_1 r_1 r_2 + a_2 c_2 {r_1}^2 + c_1 r_1 r_3 - 2\,c_1 {r_2}^2 + c_2 r_1 r_2 = 0
\end{gathered}$$

Выражая c_3 из каждого из трех соотношений мы получаем три дроби со знаменателями

$$ {a_1}^2 c_1 r_1 \left(a_1 - 1\right), \quad a_1 c_1 {r_1}^2 \left({a_1}^2 - 1\right), \quad a_1 {r_1}^2 \left(a_1 - 1\right). $$

Есть две возможности обращения одного из знаменателей в ноль: $a_1 = 1$ и $a_1 = -1$.Но поскольку мы предполагаем, что $a_1 \neq b_1$, то первая возможность отпадает. Остается $a_1 = -1,\ a(x) = -x + \alpha$, соотношение (1) дает

$$\begin{gathered}
-{c_1}^2 r_3 - c_1 c_3 r_1 + 2\,{c_2}^2 r_1 = 0 \\
c_1 r_1 r_3 - 2\,c_1 {r_2}^2 + c_3 {r_1}^2 = 0
\end{gathered}$$

Функции c и r это функции двух независимых переменных ($x-y$ и $x+y$). Разделяя переменные, и решая дифференциальные уранения, получаем **Случай (11.2.1)** - $c(-x+y) = \gamma e^{m(-x+y)} + \tilde{\gamma}, \quad r(x+y) = \rho e^{\pm m(x+y)} + \tilde{\rho}$. Пара имеет вид $(y/x, xy)$.

Если $a_1 \neq \pm 1$, из трех соотношений (5), можно исключить c_3, получаем две распадающиеся квадратичные формы от (c_1, c_2)

$$\begin{gathered}
\left(c_2 r_1 - c_1 r_2\right)\left(c_2 {a_1}^3 r_1 + c_2 {a_1}^2 r_1 - c_1 {a_1}^2 r_2 - c_1 a_1 r_2 + a_2 r_1\right) = 0 \\
\left(c_2 r_1 - c_1 r_2\right)\left(2\,c_2 {a_1}^2 r_1 - 2\,c_1 a_1 r_2 + c_1 a_2 r_1\right) = 0
\end{gathered}$$

с общим множителем $(c_2r_1 - r_2c_1)$. Если этот множитель равен нулю (**случай (11.2.2)**), то разделяя переменные и учтывая, что якобиан замены $(t = a(x) + y,\ s = x + y)$ не равен нулю,получаем, что обе логарифмические производные равны одной константе m. Откуда получаем $z_1 = \gamma e^{m(a(x)+y)} + \tilde{\gamma}, \quad z_2 = \rho e^{m(x+y)} + \tilde{\rho}$. Пара имеет вид $(a(x)y, xy)$.
В противном случае (**случай (11.2.3)**), сокращая на на общий множитель и исключая из двух линейных форм c_2/c_1, получаем ${a_1}^2 a_2 {r_1}^2 (a_1 - 1) = 0$. Обращение в ноль возможно только при $a_2 = 0$, при этом a_1 это константа A. Тогда получаем $Ac_2/c_1 = r_2/r_1$, откуда $z_1 = c(Ax + y) = \gamma e^{\frac{m}{A}(Ax+y)}, \quad z_2 = r(x + y) = \rho e^{m(x+y)}$. Пару можно привести к виду $(x^k y, xy)$
Таким образом случаи (11.2.1) и (11.2.3) поглощаются случаем (11.2.2). Итак, в **случае (11.2)** пара имеет вид $(a(x)y, xy)$.

Случай (11.3) $r_2 = 0$, т.е. $r(x + y) = \rho(x + y) + \tilde{\rho}$, где $\rho \neq 0$. Заменой $(x \to \rho x + \tilde{\rho},\ y \to \rho y)$ делаем $r(x + y) = x + y$. Записывая (1) для $c(a(x) + b(y)) + (x + y)$, получаем

$$
\begin{aligned}
{a_1}^3{b_1}^2c_1c_3 - 2\,{a_1}^3{b_1}^2{c_2}^2 - {a_1}^2{b_1}^3c_1c_3 + 2\,{a_1}^2{b_1}^3{c_2}^2 - {a_1}^3b_2c_1c_2 + a_2{b_1}^3c_1c_2 = 0 \\
{a_1}^3b_1c_1c_3 - {a_1}^3b_1{c_2}^2 - a_1{b_1}^3c_1c_3 + a_1{b_1}^3{c_2}^2 - 2\,{a_1}^2b_2c_1c_2 + 2\,a_2{b_1}^2c_1c_2 = 0 \\
{a_1}^2b_1c_3 - a_1{b_1}^2c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 = 0
\end{aligned}
$$

Исключая c_3 и отношение c_2/c_1, получаем

$$(a_1 - b_1)\left({a_1}^2b_2 - a_2{b_1}^2\right) = 0$$

Обращение в ноль может дать только второй множитель. Разделяя в этом соотношении переменные получаем, что $a_2/a_1^2 = b_2/b_1^2$ - это постоянная $-m$. Откуда получаем, что

$$a(x) + b(y) = \frac{1}{m}(\ln(mx + \alpha) + \ln(my + \beta) + \ln(n))$$

Тогда для $c(t)$ получаем три уравнения

$$c_3 = mc_2^2, \quad c_3c_1 = c_2^2, \quad mc_1c_2 + c_1c_3 - 2c_2^2 = 0$$

Откуда получаем $c(t) = \gamma e^{mt} + \tilde{\gamma}$. В результате пара получает вид $(xy, x + y)$.

Случай (11.4)

$$ {a_1}^2b_1r_2 - {a_1}^2b_2r_1 - a_1{b_1}^2r_2 + a_2{b_1}^2r_1 = 0 \tag{6}$$

Выразим отсюда r_2/r_1
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{{a_1}^2 b_2 - a_2 {b_1}^2}{a_1 b_1 \left(a_1 - b_1\right)} \tag{7}$$
(знаменатель не есть тождественный ноль) и запишем для этой дроби условие, что это функция от $(x + y)$ (равенство производных по x и y, получаем
$$-{a_1}^4 b_1 b_3 + {a_1}^4 {b_2}^2 + {a_1}^3 {b_1}^2 b_3 - 2\, {a_1}^3 b_1 {b_2}^2 - \\ {a_1}^2 a_3 {b_1}^3 + 2\, a_1 {a_2}^2 {b_1}^3 + a_1 a_3 {b_1}^4 - {a_2}^2 {b_1}^4 = 0 \tag{8}$$
2
$$-A^4 B \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B} G\left(B\right)\right) G\left(B\right) + A^4 \left(G\left(B\right)\right)^2 + A^3 B^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B} G\left(B\right)\right) G\left(B\right) - \\ 2\, A^3 B \left(G\left(B\right)\right)^2 - A^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} F\left(A\right)\right) F\left(A\right) B^3 + 2\, A \left(F\left(A\right)\right)^2 B^3 + \\ A \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} F\left(A\right)\right) F\left(A\right) B^4 - \left(F\left(A\right)\right)^2 B^4 = 0,$$
которое после подстановки $f(A) = \sqrt{F(A)}, \quad g(B) = \sqrt{G(B)}$ становится линейным
$$-A^4 B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B} g\left(B\right) + 2\, A^4 g\left(B\right) + A^3 B^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B} g\left(B\right) - 4\, A^3 B g\left(B\right) - \\ A^2 B^3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} f\left(A\right) + 4\, A f\left(A\right) B^3 + A B^4 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} f\left(A\right) - 2\, f\left(A\right) B^4 = 0$$

Выражаем отсюда $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}B} g$ и пишем условие независимости от A, получаем
$$-A^4 B^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}A^2} f\left(A\right) + 2\, A^3 B^3 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}A^2} f\left(A\right) - \\ A^2 B^4 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}A^2} f\left(A\right) + 6\, A^3 B^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} f\left(A\right) - 10\, A^2 B^3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} f\left(A\right) + \\ 4\, A B^4 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} f\left(A\right) + 2\, A^4 g\left(B\right) - 12\, A^2 B^2 f\left(A\right) + 16\, A f\left(A\right) B^3 - 6\, f\left(A\right) B^4 = 0$$
Выражаем $g(B)$ и пишем условие независимости от A, получаем
$$A^3 \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}A^3} f\left(A\right) - 6\, A^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}A^2} f\left(A\right) + 18\, A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} f\left(A\right) - 24\, f\left(A\right) = 0$$

Ищем решения вида $f(A) = A^m$, получаем

$$m(m-1)(m-2) - 6m(m-1) + 18m - 24 = (m-2)(m-3)(m-4)$$

Таким образом общее решение (9) имеет вид $f(A) = l_1A^4 + m_1A^3 + n_1A^2$. Исключая из (9) $f(A)$, мы таким же образом получим, что $g(B) = l_2B^4 + m_2B^3 + n_2B^2$. Подставляя в (9) $f(A)$ и $g(B)$, получаем, что $l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$. Итак, $f(A) = lA^4 + mA^3 + nA^2, \quad g(B) = lB^4 + mB^3 + nB^2$. Получаем, что $\alpha(x) = a'(x)$ и $\beta(y) = b'(y)$ удовлетворяют одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \sqrt{l\alpha^4 + m\alpha^3 + n\alpha^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y} = \sqrt{l\beta^4 + m\beta^3 + n\beta^2} \tag{9}$$

Поскольку функции a и b - не линейны, то мы можем предполагать, что все три константы (l, m, n) не могут обращаться в ноль одновременно. Получаем, что если $l = n = 0$, а $m \neq 0$ (**случай (11.4.1)**), то

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{mt}} = \frac{-2}{\sqrt{t}}.$$

Тогда

$$a'(x) = \alpha(x) = \frac{4}{m(x+C)^2}, \quad a(x) = -\frac{4}{m(x+C)} + \tilde{C} \quad , a''(x) = \frac{-8}{m(x+C)^3}$$

Аналогично

$$b'(x) = \beta(x) = \frac{4}{m(y+D)^2}, \quad b(y) = -\frac{4}{m(y+D)} + \tilde{D} \quad , b''(y) = \frac{-8}{m(y+D)^3}$$

Теперь, воспользовавшись соотношением (7), получаем что

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a_1^2b_2 - a_2b_1^2}{a_1b_1(a_1 - b_1)}$$

откуда, в свою очередь, получаем, что $r(t) = -\frac{\rho}{t+C+D}$. Выражая из любого из соотношений (4) логарифмическую производную c_2/c_1 и подставляя в него полученное ранее выражение для (r_2/r_1), получаем

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1b_1(a_1 - b_1)}$$

Откуда получаем, что

$$c(a(x)+b(y)) = \frac{1}{\frac{1}{x+C}+\frac{1}{y+D}}$$

После небольшого упрощения получаем следующую L-пару

$$(z_1 = \frac{xy}{x+y}, \quad z_2 = \frac{1}{x+y}).$$

Если же l или n отличны от нуля (**случай (11.4.2)**), то

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{lt^2+mt+n}} = \frac{-2}{\sqrt{lt^2+n}}\mathrm{arctgh}\left(\frac{\sqrt{lt^2+mt+n}}{\sqrt{lt^2+n}}\right),$$

Таким образом мы получаем $a'(x) = \alpha(x)$ и $b'(y) = \beta(y)$ в результате обращения этих интегралов, а сами функции $a(x)$ и $b(y)$ в результате еще одного интегрирования. Далее, как и в предыдущем пункте, из соотношения (7) получаем $r(t)$, а затем из любого из соотношений (4) получаем $c(t)$.

В результате нами доказана следующая

Теорема 5: Пусть $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ - L-пара сложности один, тогда с точностью до действия псевдогруппы $\mathcal{G}$ эта пара функций имеет вид
В случае $N(z_1) = 0, \quad N(z_2) = 1$
(01.1) $z_1 = a(x), \quad z_2 = x+y, \quad a$ - произвольна,
(01.2) $z_1 = x, \quad z_2 = xy,$
В случае $N(z_1) = N(z_2) = 1$
(11.1) $z_1 = c(x+y), \quad z_2 = r(x+y)$, где c и r - произвольны,
(11.2) $z_1 = a(x)y, \quad z_2 = xy, \quad a$ - произвольна,
(11.3) $z_1 = xy, \quad z_2 = x+y,$
(11.4.1) $z_1 = \frac{xy}{x+y}, \quad z_2 = \frac{1}{x+y},$
(11.4.2) В этом случае получить явные выражения для
$z_1 = c(a(x)+b(y)),\ z_2 = r(x+y)$ не представляется возможным. Четыре функции (a,b,c,r), которые определяют пару строятся, как описано выше, и выражаются, тем самым, в квадратурах.

То, что пары представленные в списке, являются L-парами доказано выше. Это следствие того, что для любой линейной комбинации выполнено уравнение первого класса. Однако в случаях (01.1), (01.2), (11.1), (11.2) это видно непосредственно. Для (11.3) в этом можно убедится так. Заметим, что $z = xy+t(x+y) = (x+t)(y+t)-t^2$. Откуда следует, что это функция сложности единица. Для случая (11.4.1) требуется более сложное рассуждение. Мы хотим убедится в том, что при всех t функция

$$z = \frac{xy}{x+y} + t\frac{1}{x+y} = \frac{t+xy}{x+y}$$

имеет сложность один. Заменим t на t^2, получим

$$z = \frac{t^2+xy}{x+y}.$$

Заменим x на tx , y на ty ,z на t/z , получим

$$z = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Заменим x на $\mathrm{th}(x)$, y на $\mathrm{th}(y)$,z на $\mathrm{th}(z)$ и воспользуемся формулой сложения для гипеболического тангенса, а именно

$$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)},$$

в итоге получим $z = x+y$. Поскольку все преобразования не меняли сложности, это доказывает, что сложность исходной функции единица.

Для последнего случая (11.4.2) такой явной проверки автор предложить не может. Остается вопрос. Какие загадочные соотношения стоят за полученным утверждением в этом, самом сложном случае?

Пар сложности один, несомненно, больше, чем L-пар сложности один (см.определения выше). Поэтому остается открыт еще один вопрос - вопрос о строении пар сложности один.

4. O(2)-простота

На плоскости комплексных переменных (x,y) действует комплексная группа $O(2)$, а именно

$$g_\phi = (\ x \to \cos(\phi)x - \sin(\phi)y, \quad y \to \sin(\phi)x + \cos(\phi)y\ )$$

Это действие индуцирует действие на функции от (x, y)

$$z(x,y) \to g_\phi(z)(x,y) = z(\cos(\phi)x - \sin(\phi)y,\, \sin(\phi)x + \cos(\phi)y)$$

Выражая синус и косинус через тангенс половинного угла $t = \operatorname{tg}(\phi/2)$, получим другую форму записи этого действия

$$g_t = (x \ \to \frac{1-t^2}{1+t^2}\,x - 2\,\frac{t}{t^2+1}\,y,\ y \ \to \frac{1-t^2}{t^2+1}\,y + 2\,\frac{t}{1+t^2}\,x)$$

Если функция $z(x,y)$ имеет сложность не выше единицы, то $z(\lambda x, \lambda y)$ тоже. Поэтому преобразования $g_t(x,y)$ можно заменить на $h_t(x,y) = (1+t^2)\, g_t(x,y)$.

Если $N(z) \le n$, то $N(g_\phi(z)) \le n+1$ и для произвольных z и ϕ нет оснований рассчитывать на то, что $N(g_\phi(z)) \le n$. Пусть например, $z = xy$, тогда $N(z) = 1$. Вычисляя $\delta_1(h_t(z))$, получаем

$$4\,t\left(x^2+y^2\right)(t-1)\,(t+1)\left(t^2+2\,t-1\right)\left(t^2-2\,t-1\right)\left(t^2+1\right)^4$$

Таким образом $N(h_t(z)) = 1$ только для 9 значений t, а именно $t = 0,\ \pm 1,\ \pm i, \pm 1 \pm \sqrt{2}$. Для всех остальных значений t сложность образа xy равна двум. Функции, соответствующие этим исключительным значениям, это функции пропорциональные

$$xy, \quad x^2 - y^2, \quad (x \pm iy)^2$$

Определение: Говорим, что функция $z(x,y)$ $O(2)$-*проста*, если $N(g_t(z)) \le 1$ для всех t.

Свойством $O(2)$-простоты обладают, очевидно, все линейные функции.

Наша цель - описать все такие функции. Ясно, что при этом $N(z) \le 1$. Если $N(z) \le 1$, то, в соответствии с определением, $z = c(a(x) + b(y))$. Если хотя бы одна из функций (a,b,c) - постоянна, то $N(z) = 0$, при этом z зависит лишь от одного переменного, либо вовсе постоянна. Такая функция, очевидно, обладает свойством $O(2)$-простоты. В дальнейшем мы предполагаем, что $N(z) = 1$, т.е. в представлении $z = c(a(x)+b(y))$ все три функции непостоянны. Заметим, что если функция $z(x,y)$ является $O(2)$-простой, то $O(2)$-простой является и функция $f(z(x,y))$ для любой f. Имеет место

Утверждение 6:
(1) Функция z $O(2)$-проста тогда и только тогда, когда $\delta(g_t(z)) = 0$ тождественно по (x, y, t).
(2) Функция $c(a(x)+b(y))$ $O(2)$-проста тогда и только тогда, когда $O(2)$-проста $a(x) + b(y)$
(3) Функция $z(x, y)$ $O(2)$-проста тогда и только тогда, когда $O(2)$-проста $z(y, x)$.

Пусть функция $a(x) + b(y)$ $O(2)$-проста тогда, в частности,

$$\frac{d}{dt}\delta(g_t(a(x) + b(y)))|_{t=0} = 0, \tag{10}$$

т.е. в индексных обозначениях для производных

$$-{a_1}^2 a_2 b_2 - {a_1}^2 b_1 b_3 + {a_1}^2 {b_2}^2 - a_1 a_3 {b_1}^2 + {a_2}^2 {b_1}^2 - a_2 {b_1}^2 b_2 = 0$$

Понижаем в этом уравнении порядок, полагая $a_1 = a'(x) = A$ - новым независимым переменным, $a_2 = a''(x) = P(A)$ - новой неизвестной функцией, соответственно $a_3 = P'P$, аналогично $b_1 = b'(y) = B,\ b_2 = b''(y) = Q(B),\ b_3 = Q'Q$, получаем

$$-QA^2P - BQ_1QA^2 + Q^2A^2 - B^2AP_1P + B^2P^2 - B^2QP = 0 \tag{11}$$

Дифференцируя (11) по A, получаем

$$-2\,QAP - QA^2P_1 - 2\,ABQ_1Q + 2\,Q^2A + B^2P_1P - B^2AP_2P - B^2AP_1^2 - B^2QP = 0 \tag{12}$$

Соотношения (11) и (12) - это система линейных уравнений относительно $Q(B)$ и $Q'(B)$ с определителем равным

$$-B\,P\,A\left(A^3P_1 + B^2AP_1 - 2\,B^2P\right)$$

Этот определитель обращается в тождественный ноль только в случае $P(A) = 0$ (случай 1). Решение системы для $Q(B)$ имеет вид

$$Q = -\frac{B^2(A^2P_2P + A^2P_1^2 - 3\,APP_1 + 2\,P^2)}{A^3P_1 + B^2AP_1 - 2\,B^2P}$$

Записывая условие независимости Q от A получаем выражение

$$-A^3P_3\,PP_1+A^3{P_2}^2P-2\,A^3P_2\,{P_1}^2-AB^2P_3\,PP_1+$$
$$AB^2{P_2}^2P-2\,AB^2P_2\,{P_1}^2+A^2P_2\,PP_1+4\,A^2{P_1}^3+$$
$$2\,B^2P_3\,P^2+3\,B^2P_2\,PP_1+2\,AP_2\,P^2-10\,AP{P_1}^2+6\,P^2P_1=0 \qquad (13)$$

которое распадается на два соотношения: сободный от B член и коэффициент при B^2. Исключаем из этих соотношений $P'''(A)$, получаем выражение, которое распадается множители

$$P\ \left(AP_1-2\,P\right)\left(AP_2\,P-2\,A{P_1}^2+3\,P_1\,P\right)\left(A^2PP_2+A^2{P_1}^2-3\,APP_1+2\,P^2\right)=0$$

Поскольку случай $P=0$ уже зафиксирован (случай 1), нумеруем остальные возможности.

$$(AP_1-2\,P)=0 \text{ (случай 2)},$$
$$\left(AP_2\,P-2\,A{P_1}^2+3\,P_1\,P\right)=0 \text{ (случай 3)},$$
$$\left(A^2PP_2+A^2{P_1}^2-3\,APP_1+2\,P^2\right)=0 \text{ (случай 4)}$$

Решая полученные дифференциальные уравнения, получаем

$$P(A)=0 \quad \text{(случай 1)},$$

$$P(A)=CA^2 \text{ (случай 2)},$$

$$P\,(A)=\frac{A^2}{A^2C_1+C_2} \text{ (случай 3)},$$

$$P(A)=A\,\sqrt{C_1\,\ln(A)+C_2} \text{ (случай 4)}$$

Чтобы найти $Q(B)$, соответствующие $P(A)$, подставляем полученные значения в (12).
Для случая 1 получаем $P(A)=0, \quad Q(B)=CB$.
Для случая 2 получаем $P(A)=CA^2, \quad Q(B)=-CB^2$.
Для случая 3, подставляя $P(A)=A^2/(cA^2+d)$ получаем выражение,

$$-A^6BQQ_1\,c^3+A^6Q^2c^3-3\,A^4BQQ_1\,c^2d-A^6Qc^2-A^4B^2Qc^2+3\,A^4Q^2c^2d-$$
$$3\,A^2BQQ_1\,cd^2+B^2A^4c-2\,A^4Qcd-2\,A^2B^2Qcd+3\,A^2Q^2cd^2-$$
$$BQQ_1\,d^3-A^2B^2d-A^2Qd^2-B^2Qd^2+Q^2d^3=0(14)$$

которое является полиномом от A^2 и распадается на четыре дифференциальных уравнения первого порядка относительно $Q(B)$ (коэффициенты при 1, A^2, A^4, A^6). Из этих соотношений следует, что $d=0$ и решение имеет вид $P(A)=Q(B)=C$, т.е. обе функции равны одной константе. Для случая 3, подставляя $P(A)=A\sqrt{c\,\ln(A)+d}$, получаем соотношение

$$-2\,QA^2\sqrt{c\ln(A)+d}-B^2Ac-2\,ABQQ_1-2\,B^2Q\sqrt{c\ln(A)+d}+2\,AQ^2=0$$

Откуда, в силу линейной независимости функций

$$\sqrt{c\ln(A)+d},\quad A,\quad A^2\sqrt{c\ln(A)+d}$$

следует, что $Q(B)=0$ и $c=0$. Таким образом, ответ в четвертом случае совпадает с первым с заменой A на B. Возвращаясь к функциям $a(x)$ и $b(y)$, получаем дифференциальные уравнения, решая которые получаем:

Для первого случая $P(A)=0$ дает $a''(x)=0$ откуда $a(x)=\alpha_1x+\alpha_0$, $Q(B)=CB$ дает $b''(y)=Cb'(y)$ откуда $b(y)=\beta_1e^{Cy}+\beta_0$ Проверяя $a+b$ на $O(2)$-простоту - условие $\delta(g_t(z))=0$, убеждаемся, что оно выполнено лишь в тривиальном случае $\alpha_1\beta_1=0$. Аналогично в случае 4.

В случае 2 из $P(A)=CA^2$ получаем $a''(x)=C(a'(x))^2$ откуда $a(x)=-\ln(\alpha_1x+\alpha_0)/C$, соответственно из $P(A)=CA^2$ получаем $b(y)=\ln(\beta_1y+\beta_0)/C$. Поскольку

$$a(x)+b(y)=\frac{1}{C}\ln(\frac{\beta_1y+\beta_0}{\alpha_1x+\alpha_0}),$$

то условие $O(2)$-простоты достаточно проверить для

$$z=\frac{\beta_1y+\beta_0}{\alpha_1x+\alpha_0}.$$

Нетрудно убедиться, что условие $\delta(g_t(z))=0$ выполнено.

В случае 3 из $P(A)=C$ получаем $a''(x)=C$ откуда $a(x)=Cx^2+\alpha_1x+\alpha_0$, соответственно из $Q(B)=C$ получаем $b(y)=Cy^2+\beta_1y+\beta_0$. Далее проверяем, что условие $O(2)$-простоты - выполнено.

В результате нами доказана следующая теорема

Теорема 7: Функции $z(x,y)$, облададающие свойством $O(2)$-простоты, с точностью до преобразований вида ($z(x,y) \to f(z(x,y)$) и ($z(x,y) \to z(y,x)$) даются следующим списком:

$$z = \frac{\beta_1\, y + \beta_0}{\alpha_1\, x + \alpha_0},$$
$$z = (x^2 + y^2) + \alpha\, x + \beta\, y,$$
$$z = \alpha\, x + \beta\, y.$$

Следствие 8: Любая $O(2)$-простая функция с точностью до преобразования вида ($z(x,y) \to f(z(x,y))$) рациональна.

Список литературы

[1] A. Ostrowski, *Uber Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen*, Math. Z. 8, p.p. 241 — 298, (1920).

[2] A. G. Vitushkin, Hilbert's Thirteenth Problem and Related Questions, Uspekhi Mat. Nauk 59 (1), 11 -– 24 (2004)

[3] V. K. Beloshapka, Analytic Complexity of Functions of Two Variables, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 14, No. 3, 2007, pp. 243 -– 249.

[4] В. К. Белошапка, Семимерное семейство простых гармонических функций, Матем. заметки, 2015, т. 98, № 6, pp.803–808

[5] M. Stepanova, On Rational Functions of First-Class Complexity, Russian Journal of Mathematical Physics, 2016, Vol. 23, No. 2, pp. 251–256.