Алгебраические функции сложности один, теорема Вейерштрасса и три арифметических операции

Белошапка В.К.

31.05.2016

Аннотация

Теорема Вейерштрасса о функциях, обладающих алгебраической теоремой сложения, позволяет дать явное описание алгебраических функций двух переменных аналитической сложности один. Их описание распадается на три случая: общий - эллиптический и два особых, мультипликативный и аддитивный. Все случаи имеют единообразное описание, это орбиты действия калибровочной псевдогруппы. Первый - это 1-параметрическое семейство орбит "эллиптического сложения", второй - орбита умножения и третий - сложения. При этом умножение и сложение могут быть получены из "эллиптического сложения" предельными переходами. С другой стороны, эллиптические орбиты соответствуют комплексным структурам на торе, мультипликативная - на циллиндре, аддитивная - на комплексной плоскости.

[1]

В работе [1] был предложен способ измерения сложности аналитических, возможно многозначных, функций двух переменных. Для любой аналитической функции $z(x, y)$ определена ее аналитическая сложность

---

[1]

Механико-математический факультет, МГУ,
Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия, vkb@strogino.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ
13-01-12417-а и 14-01-00709-офи-м-2013

$N(z)$. Эта величина, может принимать значения $0, 1, 2, \dots, \infty$. При этом сложность ноль имеют функции, зависящие лишь от одного переменного - $a(x)$ или $b(y)$. Сложность один имеют функции , зависящие от обеих переменных, если при этом имеется локальное представление вида $z(x, y) = c(a(x) + b(y))$, где (a, b, c) - аналитические функции одного переменного. Функции сложности два - это функции, чья сложность не равна нулю или единице и имеющие представление $z(x, y) = C(A_1(x, y) + B_1(x, y))$, где A_1 и B_1 имеют сложность не выше единицы. И так далее. Если же некая функция z не попала ни в один из классов $Cl_n = \{z : \ N(z) \leq n\}$, то мы полагаем $N(z) = \infty$. Условие $N(z) \leq 1$ равносильно тому, что росток, локально представляющий z, удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$\delta_1(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z''_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0 \qquad (1)$$

Дифференциальный полином $\delta_1(z)$ - это числитель рационально-дифференциального выражения $(ln(z'_y/z'_x))''_{xy}$.

Функции аналитической сложности один представляют, с этой точки зрения, особый интерес. Это простейшие функции двух переменных. В работе [2] были явно описаны простые, т.е. сложности один, решения некоторых уравнений математической физики (Лапласа, волнового, теплопроводности,...). Здесь мы дадим описание алгебраических функций аналитической сложности один.

Пусть имеется функция $P(x, y)$ аналитической сложности один. Это значит, что P имеет локальное представление в виде

$$P(x, y) = c(a(x) + b(y)), \qquad (2)$$

где (a, b, c) - непостоянные аналитические функции одного переменного. Мы ставим перед собой следующий вопрос. Какие наборы аналитических функций (a, b, c) дают в ответе алгебраическую функцию? Можно сразу предложить очевидный вариант: (a, b, c) - алгебраические функции одного переменного. Далее, поскольку сложение с помощью логарифма и экспоненты перекачивается в умножение, а именно $xy = e^{\ln(x)+\ln(y)}$, то первый (аддитивный) вариант можно дополнить вторым (мультипликативным):

$$c(t) = \gamma(e^t), \quad a(x) = \ln(\alpha(x)), \quad b(y) = \ln(\beta(y)), \quad P(x, y) = \gamma(\alpha(x)\beta(y)),$$

где (α, β, γ) - алгебраические функции. Возможен ли третий вариант? Этот вопрос получает особую остроту в связи с недавним результатом М.Степановой [3]. Она доказала, что если ставить тот же вопрос по отношению к рациональным функциям или же многочленам, то аддитивный и мультипликативный варианты это полный список возможностей. Любой многочлен аналитической сложности один имеет либо аддитивное, либо мультипликативное представление, составленное из многочленов. То же самое верно и для рациональных функций.

Коль скоро алгебраическая функция не постоянна и по x и по y, то в области, где определен элемент композиции $c(a(x) + b(y))$ можно найти точку (x_0, y_0), т.ч. $\phi(x) = P(x, y_0)$ и $\psi(y) = P(x_0, y)$ - не константы. Перенесем начало координат на плоскости в точку (x_0, y_0), тогда в нашем представлении a и b имеют элементы, представляющие их в окрестности нуля, причем для этих элементов $a(0) = b(0) = 0$. Тогда подставляя в (1) нули вместо x и вместо y, учитывая, что c - непостоянна, получаем

$$c(a(x) = \phi(x), \quad a(x) = c^{-1}(\phi(x)),$$
$$c(b(y)) = \psi(y), \quad b(y) = c^{-1}(\psi(y))$$

Подставим это в (1) и сделаем замену $u = \phi(x),\ v = \psi(y)$. Получаем

$$c(c^{-1}(u) + c^{-1}(v)) = P(\phi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)) \tag{3}$$

Выражение, которое стоит справа - это алгебраическая функция, обозначим ее через $Q(u, v)$. Сделаем в (3) замену $u = c(U),\ v = c(V)$, получим

$$c(U + V) = Q(c(U), c(V)) \tag{4}$$

Соотношение (4) в точности означает, что аналитическая функция $c(t)$ *удовлетворяет алгебраической теореме сложения.* Другими словами, это значит что между $c(U),\ c(V)$ и $c(U + V)$ имеется алгебраическое соотношение вида $F(c(U), c(V), c(U+V))$, где F - полином от трех переменных с комплексными коэффициентами. В качестве примера такой функции можно предложить любую алгебраическую функцию. Однако не трудно найти и неалгебраические примеры. Например $e^t,\ sin(t),\ cos(t)$. Теорема Вейерштрасса [4], [5] дает полный список таких функций.

Теорема Вейерштрасса: Если голоморфный элемент аналитической функции $c(t)$ удовлетворяет в некоторой области пространства (U, V) соотношению (4), т.е. алгебраической теореме сложения, то это возможно в одном и только одном из трех случаев:
(1) алгебраический - $c(t) = \eta(t)$,
(2) периодический - $c(t) = \eta(e^{\lambda t})$,
(3) двоякопериодический - $c(t) = \eta(\wp(t))$, где $\eta(s)$ - произвольная алгебраическая функция, а $\wp(t)$ - пе-функция Вейерштрасса, построенная по рещетке $L(\omega_1, \omega_2)$, где (ω_1, ω_2) ее образующие.

Для самой функции Вейерштрасса $w = \wp(U + V)$ выражается через $u = \wp(U)$ и $v = \wp(V)$ с помощью функции [4]

$$w = u \diamond v = \wp(\wp^{-1}(u) + \wp^{-1}(v)) = -(u + v) + \left(\frac{\sqrt{H(u)} - \sqrt{H(v)}}{2\ (u - v)} \right)^2$$

где $H(t) = 4t^3 - g_2 t - g_3$ - кубический многочлен без кратных корней в форме Вейерштрасса ($u \diamond v$ - "эллиптическое сложение"). Непостоянная алгебраическая функция, как не трудно видеть, может попасть лишь в один из трех классов.

Теорема 1: Если $P(x, y)$ - алгебраическая функция двух переменных аналитической сложности единица, то она имеет одно и только одно представление вида
(1)$P(x, y) = \gamma(\alpha(x) + \beta(y))$ (аддитивное представление).
(2) $P(x, y) = \gamma(\alpha(x) \cdot \beta(y))$ (мультипликативное представление).
(3) $P(x, y) = \gamma(\alpha(x) \diamond \beta(y))$ (эллиптическое представление),
где (α, β, γ) - алгебраичны.
Доказательство: В силу (4) к $c(t)$ применима теорема Вейерштрасса. Для **первого** случая c - алгебраична, и, тем самым, a и b - тоже. Получаем $P(x, y) = \gamma(\alpha(x) + \beta(y))$, где (α, β, γ) - алгебраичны.
Для **второго**:

$$\tau = c(t) = \gamma(e^{\lambda t}), \quad t = c^{-1}(\tau) = 1/\lambda \ln(\gamma^{-1}(\tau)),$$
$$a(x) = 1/\lambda \ln(\gamma^{-1}(\phi(x))), \quad b(y) = 1/\lambda \ln(\gamma^{-1}(\psi(y))),$$

поэтому

$$\begin{gathered}P(x,y)=c(a(x)+b(y))=\\ \gamma(\exp\lambda(1/\lambda\ln(\gamma^{-1}(\phi(x)))+1/\lambda\ln(\gamma^{-1}(\psi(y)))))=\gamma(\alpha(x)\beta(y)),\\ \text{где } \alpha(x)=\gamma^{-1}(\phi(x)),\quad \beta(y)=\gamma^{-1}(\psi(y)).\end{gathered}$$

Для **третьего**:

$$\begin{gathered}\tau=c(t)=\gamma(\wp(t)),\quad t=c^{-1}(\tau)=\wp^{-1}(\gamma^{-1}(\tau)),\\ a(x)=\wp^{-1}(\gamma^{-1}(\phi(x))),\quad b(y)=\wp^{-1}(\gamma^{-1}(\psi(y)))\\ \text{поэтому } P(x,y)=c(a(x)+b(y))=\\ \gamma(\wp(\wp^{-1}(\gamma^{-1}(\phi(x)))+\wp^{-1}(\gamma^{-1}(\psi(y)))))=\\ \gamma(\wp(\wp^{-1}(\alpha(x))+\wp^{-1}(\beta(y))=\gamma(\wp(\wp^{-1}(\alpha(x))\diamond\wp^{-1}(\beta(y)),\\ \text{где } \alpha(x)=\gamma^{-1}(\phi(x)),\quad \beta(y)=\gamma^{-1}(\psi(y)).\end{gathered}$$

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что фигурирующие в теореме классы алгебраических функций сложности один, не пересекаются. Это следует из единственности представления аналитической функции в виде (1) с непостоянными (a,b,c) (см. ниже лемма 2 и утверждение 3).

Лемма 2: Пусть три непостоянные голоморфные функции $(a(t),\ b(t),\ c(t))$, причем на открытом множестве плоскости (x,y) имеет место соотношение $c(a(x)+b(y))=x+y$, тогда $a(x)=(x+p)/k,\ b(y)=(y+q)/k,\ c(t)=kt-(p+q))$, где $k\neq 0$.
Доказательство: Продифференцируем тождество по x и по y. В силу непостоянства a и b получаем, что $c''=0$ и $c(t)=kt+l$, откуда, в свою очередь, следует, что a и b также линейны и что (a,b,c) имеют указанный вид.

Из доказанной леммы получаем утверждение о единственности представления для функций первого класса.

Утверждение 3: Если $c(a(x)+b(y))=C(A(x)+B(y))$, то $A(x)=(a(x)+p)/k,\quad B(y)=(b(y)+q)/k,\quad C(t)=c(kt-(p+q))$.
Доказательство: В области определения голоморфного элемента этой функции выберем значения $x=x_0$ и $y=y_0$ так, что a - обратима в

окрестности x_0, b - обратима в окрестности y_0 и c - обратима в окрестности $t_0 = a(x_0)+b(y_0)$. В качестве области из леммы 2 возьмем окрестность (x_0, y_0), в качестве функций элементы, представляющие (a, b, c)). Заменяя x на $a^{-1}(x)$ и y на $b^{-1}(y)$, получаем

$$c^{-1} \circ C(A \circ a^{-1}(x) + B \circ b^{-1}(y)) = x + y$$

Из леммы 2 получаем, что $A \circ a^{-1}(x) = (x+p)/k, \quad B \circ b^{-1}(y) = (y+q)/k, \quad c^{-1} \circ C(t) = kt - (p+q)$. откуда следует наше утверждение.

В пространстве функций двух переменных действует следующая (калибровочная) псевдогруппа

$$\mathcal{G} = \{z(x,y) \to \chi^{-1}(z(\varphi(x), \psi(y)))\},$$

где $(\varphi,\ \psi,\ \chi)$ - ростки непостоянных аналитических функций. Ясно, что это действие не меняет сложности и что функции сложности один - это, в точности, орбита функции $(x+y)$. Т.е. по отношению к этому действию все функции сложности один эквивалентны. Если же для построеиия действия использовать только алгебраические функции $(\varphi,\ \psi,\ \chi)$, то по отношению к этой меньшей псевдогруппе $\mathcal{GA}$ классов эквивалентности становится больше. Обозначим через Cl_1^{alg} пересечение Cl_1 с совокупностью алгебраических функций двух переменных. Ясно, что $\mathcal{GA}$ действует на Cl_1^{alg}. Теперь теорему 1 можно переформулировать так.

Теорема 4: По отношению к действию $\mathcal{GA}$ совокупность алгебраических функций первого класса - Cl_1^{alg} это совокупность орбит

$$x + y, \quad xy, \quad x \diamond y$$

Функции $x+y$ и xy - это конкретные функции двух переменных, тогда как функция $x \diamond y$, связанная с пе-функцией Вейерштрасса зависит вместе с ней от двух свободных параметров, например, пары периодов. Поэтому уместен следующий вопрос. Пусть $x \diamond y$ соответствует $\wp(t, \omega_1, \omega_2)$, а $x \tilde{\diamond} y$ соответствует $\wp(t, \tilde{\omega_1}, \tilde{\omega_2})$. При каком соотношении на эти пары параметров функции $x \diamond y$ и $x \tilde{\diamond} y$ эквивалентны с точностью до преобразования из $\mathcal{GA}$? Вот ответ.

Утверждение 5: Функции $x\tilde{\diamond}y$ и $x\diamond y$ эквивалентны, т.е. принадлежат одной орбите $\mathcal{GA}$ в том и только том случае, когда решетки периодов совпадают с точностью до умножения на ненулевую комплексную константу, т.е. $\tilde{\omega}_1 = k\omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = k\omega_2$. При этом $\wp_2(t) = \wp_1(t/k)$.
Доказательство: Пусть $x\tilde{\diamond}y$ и $x\diamond y$ эквивалентны, т.е. $x\tilde{\diamond}y = c(a(x)\diamond b(y))$, где (a,b,c) - непостоянные алгебраические функции. Пусть $\wp_1(t) = \wp(t,\omega_1,\omega_2)$, $\quad \wp_2(t) = \wp(t,\tilde{\omega_1},\tilde{\omega_2})$. Имеем

$$c(\wp_1(\wp_1^{-1}(a(x)) + \wp_1^{-1}(b(y))) = \wp_2(\wp_2^{-1}(x) + \wp_2^{-1}(y))$$

Тогда утверждение 3 позволяет заключить, что

$$\wp_1^{-1}(a(x) = \frac{\wp_2^{-1}(x)+p}{k}, \quad \wp_1^{-1}(b(y) = \frac{\wp_2^{-1}(y)+q}{k}, \quad c(\wp_1(t)) = \wp_2(kt-(p+q)),$$

откуда, далее, $a(x) = \wp_1(\frac{\wp_2^{-1}(x)+p}{k})$, $\quad b(y) = \wp_1(\frac{\wp_2^{-1}(y)+q}{k})$. Эллипический интеграл $\wp_2^{-1}(t)$ - это бесконечнозначная аналитическая функция, чьи ростки в фиксированной точке отличаются на константы вида

$$\frac{m_1\,\tilde{\omega}_1 + m_2\,\tilde{\omega}_2}{k},$$

поэтому функции a и b могут быть конечнозначными лишь в случае, когда образ второй решетки $\frac{\tilde{L}}{k} = L(\frac{\tilde{\omega}_1}{k},\frac{\tilde{\omega}_2}{k})$ содержится в первой $L = (\omega_1,\omega_2)$. В силу обратимости действия получаем обратное включение, т.е. $\tilde{L} = kL$ и, тем самым, $\wp_2(t) = \wp_1(t/k)$. Утверждение доказано.

Итак, все алгебраические функции аналитической сложности один - это совокупность орбит трех бинарных операций эллиптического сложения, умножения и обычного сложения под действием алгебраической калибровочной группы $\mathcal{GA}$. При этом эллиптическое сложение является базовой операцией, умножение возникает, как предельный переход $\omega_2 \to \infty$, а сложение, в свою очередь, как предельный переход $\omega_1 \to \infty$, $\quad \omega_2 \to \infty$.

Возможность факторизации по комплексному умножению, позволяет задавать "эллиптические" орбиты одним параметром. Полагая $k = 1/\omega_1$ мы превращаем решетку $L(\omega_1,\omega_2)$ в решетку $L(1,\tau)$. Замена $\tau \to -\tau$ не меняет решетки, поэтому можем полагать, что $\mathrm{Im}\,\tau > 0$. Оставшиеся дискретные степени свободы описываются действием модулярной группы

[6]. После факторизации верхней полуплоскости по действию модулярной группы мы получаем одномерное комплексное многообразие с особенностями (орбифолд), гомеоморфное двумерной вещественной плоскости. Точки этого орбифолда находятся, с одной стороны, во взаимно однозначном соответствии с эллиптическим орбитами $\mathcal{GA}$, а с другой с классами аффинно эквивалентных решеток, т.е. с комплексными структурами на 2-мерном торе. Факторы по вырожденным решеткам, цилиндр и плоскость, также, с одной стороны, соответствуют уникальным операциям, умножению и сложению, а с другой, допускают единственные комплексные структуры.

В процессе работы над статьей автор имел плодотворные обсуждения с А.В.Домриным и И.В.Артамкиным за что он им благодарен.

Автор рассматривает данную публикацию как свой скромный вклад в продолжающееся празднование 200-летия со дня рождения великого немецкого математика Карла Теодора Вильгельма Вейерштрасса.

Список литературы

[1] V. K. Beloshapka, Analytic Complexity of Functions of Two Variables, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 14, No. 3, 2007, pp. 243 -– 249.

[2] В. К. Белошапка, Семимерное семейство простых гармонических функций, Матем. заметки, 2015, т. 98, № 6, pp.803–808

[3] M. Stepanova, On Rational Functions of First-Class Complexity, Russian Journal of Mathematical Physics, 2016, Vol. 23, No. 2, pp. 251–256.

[4] В. В. Прасолов, Ю.П.Соловьев Эллиптические функции и алгебраические равнения М."Факториал 1997, 288 с.

[5] M.B. Villarino Algebraic addition theorems Escuela de matematica Universidad de Costa Rica arXiv:12126471v2[math.CA]7Jan2013

[6] А.Гурвиц, Р.Курант, Теория функций, М., "Наука 1968, 648 с.