# Треугольно-полиномиальные CR-иерархии

Белошапка В.К.

24.05.2015

**Аннотация**

В данной работе вводится понятие CR-иерархии, которое расширяет сферу применимости метода модельной поверхности. Обсуждаются как известные, так и новые примеры $CR$-иерархий и их основные свойства.

[1]

Можно сказать, что $CR$-геометрия изучает свойства вещественных подмногообразий комплексных многообразий, инвариантные по отношению к действию псевдогруппы $\mathcal{HOL}$ локально-обратимых голоморфных (биголоморфных) преобразований. По форме этот подход напоминает концепцию Ф.Клейна, но при этом место структурной группы Ли занимает бесконечномерная псевдогруппа, пришедшая из комплексного анализа. Это обстоятельство придаёт своеобразие изучению $CR$-геометрии. В [6],[9],[10] автор, развивая подход [1],[4], предложил метод изучения вещественных подмногообразий комплексного пространства ($CR$-многообразий)-метод модельной поверхности. Этот подход базируется на сопоставлении ростку $M_\xi$ порождающего многообразия $M$ произвольного $CR$-типа $(n, K)$ ($n$ - размерность комплексной касательной, $K$ - коразмерность) его модельной поверхности, которая представляет собой вещественно алгебраическую поверхность (график полиномиального отображения) того же

[1]Россия, Москва, Воробьевы горы, 119992,
МГУ им.Ломоносова, механико-математический факультет, vkb@strogino.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ
14-01-00709-а и 13-01-12417-офи-м2

$CR$-типа. Основная цель этой процедуры это сведение основных задач $CR$-геометрии (описание автоморфизмов, поиск инвариантов, классификация), поставленных для ростка аналитического многообразия, к аналогичным задачам для модельной поверхности, которая устроена проще. В частности, эта процедура позволяет редуцировать псевдогруппу биголоморфных преобразований до стабилизатора точки в группе автоморфизмов модельной поверхности ростка, которая, как правило, представляет собой группу Ли.

Росток $M_\xi$ аналитического подмногообразия $M$ локально можно задать, как множество общих нулей набора вещественно аналитических функций, заданных в окрестности точки $\xi \in \mathbf{C}^N$

$$\{\rho_1(Z) = \ldots = \rho_K(Z) = 0\}.$$

То, что точка $\xi$ - неособая можно понимать в двух смыслах. Первый - градиенты определяющих функций в точке $\xi$ - линейно независимы над полем вещественных чисел. Это означает, что это росток гладкого многообразия, т.е. график гладкой функции. Второй, более сильный, что они независимы над полем комплексных чисел. Тогда мы говорим, что росток *порождающий*. В дальнейшем мы будем это это предполагать. Выбирая подходящие линейные координаты $Z = (z, w) = (z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_K)$, мы можем задать наш росток в виде графика вещественного отображения вида

$$\operatorname{Im} w_1 = F_1(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w), \ldots, \operatorname{Im} w_K = F_K(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w),$$

где функции $(F_1, ..., F_K)$ - вещественно аналитичны в окрестности начала координат и их разложения не имеют постоянных и линейных членов. При этом касательное пространство в нуле это $\{v = 0\}$, а его комплексная часть это $\{w = 0\}$. При этом $n$ - это размерность комплексной части касательного пространства, $K$ - это коразмерность, $N = n + K$, а пару $(n, K)$ мы называем $CR$-типом порождающего ростка $M_\xi$.

В основе процедуры сопоставления ростку его модельной поверхности лежит система пространств вещественных полиномов возрастающих весов - $CR$-иерархия. В системе, описанной в работе [9], это были вещественные квазиоднородные формы переменных $(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n)$, соответствующих комплексной касательной. $CR$-многообразия, возникающие на базе этой $CR$-иерархии демонстрировали определенный набор свойств. В работе [10] была построена модифицированная система, которая отличалась от первой тем, что в число переменных, от которых зависели формы были добавлен бесконечный набор вещественных переменных $(u_1, u_2, \ldots)$. Набор свойств модельных поверхностей сохранился, но к нему добавилось некоторое новое свойство - универсальности. На базе каждой иерархии определялась совокупность модельных поверхностей - вещественно-алгебраических поверхностей произвольных $CR$-типов $(n, K)$ ($n$-размерность комплексной касательной, $K$ - коразмерность). Для реализации полного набора свойств эти $CR$-иерархии нуждаются в соблюдении некоторого условия - условия полной невырожденности. Это условие формулируется в терминах координатных форм конкретной модельной поверхности и является условием общего положения. Когда модельная имеет тип $(n, 1)$ (гиперповерхность), это условие есть условие Леви-невырожденности. В данной работе в рассмотрение вводится новая $CR$-иерархия (см.определенние 1), который включает описанные ранее, а также многие другие. С точки зрения ранее построенных иерархий эти новые иерархии являются вырожденными (не выполнено условие полной невырожденности). Необходимость такого расширения вызвана рядом причин. Первая. В [7] было показано, что техника метода модельной поверхности применима и для вырожденных ростков. Вторая. Взятие прямой суммы модельных поверхностей, выводит за рамки старых иерархий. Новые иерархии позволяют реализовывать эту операцию, не выходя за их рамки.

**Определение 1:**
*$CR$-иерархия $\mathcal{I}$* - это объект, представленный следующим набором данных.

1) Список размерностей: $(n = n_1 + \ldots + n_m,\ k_1\ k_2,\ \ldots)$.

2) Список переменных: $z_1 \in \mathbf{C}^{n_1}, \ldots, z_m \in \mathbf{C}^{n_m}$,

$w_1 = u_1 + iv_1 \in \mathbf{C}^{k_1}, \quad w_2 = u_2 + iv_2 \in \mathbf{C}^{k_2}, \ldots$.

3) Список весов: $(p_1, \ldots, p_m,\ q_1 < q_2 < \ldots)$, где $p_i,\ q_j$ - натуральные (целые и положительные) числа.

При этом веса переменным назначаются следующим образом. $[z_i] = p_i, \quad i = 1, \ldots, m. \quad [w_j] = q_j, \quad j = 1, 2, \ldots$

4) Список пространств квазиоднородных форм. $\mathcal{N}_1,\ \mathcal{N}_2, \ldots$, где $\mathcal{N}_\beta$ - это вещественное линейное пространство квазиоднородных форм от переменных $(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n)$ веса $q_1$, $\mathcal{N}_2$ - это вещественное линейное пространство квазиоднородных форм от переменных $(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n, u_1)$ ве-

са $q_2$, $\mathcal{N}_j$ - это вещественное линейное пространство квазиоднородных форм от переменных $(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n, u_1, \ldots, u_{j-1})$ веса $q_j$ и т.д. Причем выбор этих пространств связан двумя дополнительными условиями $(T_1)$ и $(T_2)$:
$(T_1)$ Пространство $\mathcal{N}_j$ инвариантно относительно следующего действия произведения линейных групп

$$\begin{gathered} n_j(z_1, \bar{z}_1 \ldots, z_m, \bar{z}_m, u_1, \ldots, u_{j-1}) \to \\ \rho_j n_j(C_1 z_1, \overline{C_1 z_1} \ldots, C_m z_m, \overline{C_m z_m}, \rho_1 u_1, \ldots, \rho_{j-1} u_{j-1}) \end{gathered} \tag{1}$$

где $C_\alpha \in GL(n_\alpha, \mathbf{C})$, $\rho_\beta \in GL(k_\beta, \mathbf{R})$,
$(T_2)$ Эти пространства трансверсальны пространствам плюригармонических форм в следующем смысле. Если $P_j(z, w)$ голоморфная квазиоднородная форма веса $q_j$ и имеет место соотношение

$$\operatorname{Im}(P_j(z, u_1 + in_1(z, \bar{z}), \ldots, u_j + in_j(z, \bar{z}, n_1, \ldots, n_{j-1})) \equiv 0 \; mod \, \mathcal{N}_j \tag{2}$$

где $n_\beta \in \mathcal{N}_\beta$, то $P_j = 0$.

Отметим, что эти условия имеют рекуррентный характер и что они выполнены для иерархий работ [9], [10].

**Определение 2:**
Будем говорить, что $Q$, порождающее подмногообразие $\mathbf{C}^{n+K}$ $CR$-типа $(n, K)$ является *модельной поверхностью* веса $l$, подчиненной иерархии $\mathcal{I}$, если $Q$ это поверхность задано системой соотношений вида

$$\begin{aligned} v_1 &= N_1(z, \overline{z}) \\ v_2 &= N_2(z, \overline{z}, u_1) \\ &\ldots \\ V &= N_l(z, \overline{z}, u_1, \ldots, u_{l-1}) \end{aligned}$$

или сокращенно $v = N(z, \bar{z}, u)$, где
(1) $k_1 + \ldots + k_{l-1} < K \leq k_1 + \ldots + k_l$ ,
(2) $N_j \in \mathcal{N}_j^{k_j}$ для $j = 1, \ldots, l-1$,
(3) $N_l \in \mathcal{N}_l^k$, где $k$ - избыточная коразмерность - это $K - (k_1 + \ldots + k_{l-1})$ и $W = U + iV \in \mathbf{C}^k$.

(C) Будем говорить, что росток вещественно аналитического порождающего многообразия $M_\xi$ типа $(n, K)$ имеет поверхность $Q$ своей модельной поверхностью, если $M_\xi$ задан системой соотношений вида

$$\begin{aligned} v_1 &= N_1(z, \overline{z}) + o(q_1) \\ v_2 &= N_2(z, \overline{z}, u_1) + o(q_2) \\ &\dots \\ v_l &= N_l(z, \overline{z}, u_1, \dots, u_{l-1}) + o(q_l) \end{aligned}$$

или сокращенно $v = N(z, \bar{z}, u) + \dots$, При этом через $o(q)$ мы обозначаем ряд, все компоненты которого имеют вес больше $q$.

**Замечание 3:** В этом определении можно выделить три составляющие: "полиномиальность"(модельные поверхности - это графики вещественных полиномиальных отображений), "однородность"(весовая квазиоднородность определяющих полиномов) и "верхне-треугольность"(младшие формы не зависят от переменных, соответствующих старшим).

**Замечание 4:** В данной конструкции мы рассматриваем объекты трех уровней: росток вещественного подмногообразия, его модельная поверхность и иерархия, которой подчинена модельная поверхность.

Мы можем рассматривать как бесконечные иерархии, т.е. иерархии, где индекс $l$, нумерующий пространства $\mathcal{N}_l$ принимает все натуральные значения, так и конечные, т.е. такие, где этот индекс принимает значения, не превосходящие $l_{max}$. При этом можно формально оставаться в рамках бесконечных иерархий, полагая все остальные пространства нулевыми.

С точки зрения этого определения иерархия работы [9] - $\mathcal{IR}$ (жесткая иерархия) строится так. $m = 1, \quad [z] = p = 1, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 3, \dots$. Пространство $\mathcal{N}_1$ - это вещественное линейное пространство эрмитовых форм от переменных $z = (z_1, \dots, z_n),\ \bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ т.е. форм бистепени $(1, 1)$. Это пространство является естественным дополнением в пространстве вещественных квадратичных форм к пространству плюригармонических форм (бистепени $(2, 0)$ и $(0, 2)$). $\mathcal{N}_2$ - это пространство вещественных кубических форм без плюригармонических членов (бистепени $(2, 1)$ и $(1, 2)$). И так далее. Нетрудно убедиться в том, что при любом выборе положительных $n$ и $K$ произвольный росток жесткой поверхности типа $(n, K)$ , т.е. росток заданный уравнениями вида $\operatorname{Im} w = F(z, \bar{z})$, имеет своей модельной поверхностью, в некоторых координатах, поверхность, подчиненную иерархии $\mathcal{IR}$. Отсутствующие плюригармонические члены легко убираются полиномиальной заменой. Если при этом $l > 2$ и координатные формы линейно независимы, то мы говорим, что росток и его модельная поверхность *вполне невырождены*. Эта иерархия максимальна в классе иерархий, где формы зависят лишь от $(z, \bar{z})$. Она получена из совокупности всех вещественных форм от $(z, \bar{z})$ путем некоторой нормализации действием псевдогруппы голоморфных замен. Иерархия, построенная в работе [10] - $\mathcal{IU}$ (универсальная иерархия) это максимальная иерархия для ростков без каких-либо ограничений. Также как и раньше $m = 1, \quad [z] = p = 1, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 3, \ldots$. Пространства однородных форм веса $(j+1)$ - $\mathcal{N}_j$ строятся из пространства всех вещественных форм веса $(j + 1)$ нормализацией с помощью действия псевдогруппы биголоморфных замен. Можно сказать, что строится сечение пространства орбит этого действия. Такое сечение выделяется условиями обнуления слагаемых определённых типов однородности. При этом построенные пространства с номерами $j = 1, 2, 3$ не отличаются от тех, что возникают в $\mathcal{IR}$. Первое несовпадение имеет место при $j = 4$, т.е. для форм веса пять. Специфическим условием, которое используется при работе с этими двумя иерархиями - это условие *полной невырожденности*. Для конкретной модельной поверхности это можно понимать как условие "заполнения уровней": все координатные однородные формы линейно независимы, причем если данная модельная поверхность имеет координатную форму веса $l$, то это означает, что среди форм меньших весов присутствует полный базисный набор. С этой точки зрения иерархии данной работы являются вырожденными.

При рассмотрении многообразий и модельных поверхностей нас, в первую очередь, будут интересовать их голоморфные симметрии. Введем в рассмотрение следующие объекты, связанные с ростком вещественного подмногообразия $M_\xi$.

$\operatorname{aut}(M_\xi)$ - это совокупность ростков вещественных векторных полей в точке $\xi$, порождающих локальные однопараметрические группы голоморфных преобразований, с тем условием, что сужение на $M_\xi$ касательно к $M_\xi$, т.е. можно сказать, что это инфинитезимальные автоморфизмы $M_\xi$. Отметим, что $\mathrm{aut}(M_\xi)$ - это вещественное линейное пространство по отношению к операции скобки полей является вещественной алгеброй Ли, которая может быть как конечномерной, так и бесконечномерной.

$\mathrm{aut}_\xi(M_\xi)$ - это подалгебра $\mathrm{aut}(M_\xi)$, состоящая из ростков полей, обращающихся в ноль в точке $\xi$. Т.е. это поля, порождающие однопараметрические группы, оставляющие $\xi$ на месте. Будем говорить, что $\mathrm{aut}_\xi(M_\xi)$ - это стабилизатор $\xi$ в $\mathrm{aut}(M_\xi)$.

Алгебре Ли $\mathrm{aut}(M_\xi)$ можно сопоставить $\mathrm{Aut}(M_\xi)$ - псевдогруппу, состоящую из голоморфных преобразований окрестности точки $\xi$, порожденных полями из $\mathrm{aut}(M_\xi)$. Эти преобразования, очевидно, сохраняют росток $M_\xi$. Аналогично подалгебре $\mathrm{aut}_\xi(M_\xi)$ сопоставим псевдогруппу $\mathrm{Aut}_\xi(M_\xi)$, которая состоит из тех преобразований из $\mathrm{Aut}(M_\xi)$, которые сохраняют неподвижной точку $\xi$. Т.е. $\mathrm{Aut}(M_\xi)$ - это псевдогруппа автоморфизмов ростка, а $\mathrm{Aut}_\xi(M_\xi)$ - это стабилизатор точки $\xi$ в $\mathrm{Aut}(M_\xi)$.

Введение весов переменных групп $z$ и $w$ позволяет продолжить эту градуировку не только на степенные ряды от этих переменных, но и на векторные поля. Для этого следует назначение весов дополнить следующим соглашением

$$[\frac{\partial}{\partial z_i}] = -p_i, \quad [\frac{\partial}{\partial w_j}] = -q_i$$

Это превращает алгебру Ли ростков аналитических векторных полей в окрестности точки $\xi$, а также любые ее подалгебры, в частности, $\mathrm{aut}(M_\xi)$ и $\mathrm{aut}_\xi(M_\xi)$, в градуированные алгебры Ли.

Операция сопоставления ростку многообразия $M_\xi$ ее модельной поверхности $Q$ функториальна в следующем смысле.

**Утверждение 5:** Пусть $M_\xi$ и $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ - два ростка, а $Q$ и $\tilde{Q}$ - их модельные поверхности, подчиненные некоторой иерархии $\mathcal{I}$ одного $CR$-типа и веса.
(a) Если эти ростки биголоморфно эквивалентны, то их модельные поверхности эквивалентны линейно.
(b) Если $\{z \to f(z,w), \quad w \to g(z,w)\}$ - обратимое голоморфное в окрестности начала координат отображение, переводящее $M_\xi = \{v = F(z,\bar{z},u)\}$ в $\tilde{M}_{\tilde{\xi}} = \{v = \tilde{F}(z,\bar{z},u)\}$ и переводящее начало координат в себя, то млад-

шие члены этого отображения имеют вид

$$f_\alpha = C_\alpha z_\alpha + o(p_\alpha) \tag{3}$$
$$g_\beta = \rho_\beta w_\beta + o(q_\beta), \tag{4}$$

причем имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{N}_j(C_1 z_1, \overline{C_1 z_1}, \ldots, C_m z_m, \overline{C_m z_m}, \rho_1 u_1, \ldots, \rho_{j-1} u_{j-1}) = \\ \rho_j N_j(z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_m, \overline{z_m}, u_1, \ldots, u_{j-1})\end{aligned} \tag{5}$$

*Доказательство:* Начнем с (b). При всех $(z, \bar{z}, u)$ имеет место тождество

$$\operatorname{Im} g = \tilde{F}(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g), \text{где } w = u + iF(z, \bar{z}, u).$$

Разлагая координаты $f = (f_1, \ldots f_m)$ и $g = (g_1, \ldots, g_l)$ в сумму квазиоднородных весовых компонент, пользуясь треугольностью и трансверсальностью (см.определение 1) и последовательно отделяя в $j$-й координате нашего тождества начиная с $j = 1$ и до $l$ компоненты весов от 1 до $q_j$, получаем

$$\begin{aligned} f_\alpha &= C_\alpha z_\alpha + o(p_\alpha) \\ g_\beta &= \rho_\beta w_\beta + o(q_\beta) \end{aligned} \tag{6}$$

где $C_\alpha$ и $\rho_\beta$ - обратимые линейные преобразования, причем выполнены соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{N}_j(C_1 z_1, \overline{C_1 z_1}, \ldots, C_m z_m, \overline{C_m z_m}, \rho_1 u_1, \ldots, \rho_{j-1} u_{j-1}) = \\ \rho_j N_j(z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_m, \overline{z_m}, u_1, \ldots, u_{j-1})\end{aligned} \tag{7}$$

где $j = 1, \ldots, l$. Чтобы установить (a) осталось заметить, что (7) означает, что линейное отображение $f_\alpha = C_\alpha z_\alpha, \quad g_\beta = \rho_\beta w_\beta$ есть отображение $Q$ на $\tilde{Q}$.

**Замечание 6:** Соотношения (7) определяют действие

$$GL(n_1, \mathbf{C}) \times \ldots \times GL(n_m, \mathbf{C}) \times GL(k_1, \mathbf{R}^{k_1}) \times \ldots \times GL(k_{l-1}, \mathbf{R}^{k_{l-1}}) \times GL(k, \mathbf{R}^k)$$

на пространстве

$$\mathcal{N}_1^{k_1} \times \ldots \times \mathcal{N}_{l-1}^{k_{l-1}} \times \mathcal{N}_l^k$$

индуцированное действием псевдогруппы ростков локально обратимых голоморфных замен в начале координат. Эта редукция голоморфного действия к линейному позволяет и в этой новой ситуации определять пространство модулей модельных поверхностей также как это было сделано в [11].

Следующее утверждение есть прямое следствие предыдущего утверждения и квазиоднородности определяющих уравнений.

**Утверждение 7:** Пусть $Q$ модельная поверхность, подчиненная некоторой иерархии (3), $L\,\mathrm{Aut}_0(Q_0)$ - линейная подгруппа стабилизатора начала координат в группе голоморфных автоморфизмов, тогда
(a) $L\,\mathrm{Aut}_0(Q_0)$ состоит из преобразований вида

$$\begin{gathered}(z_\alpha \to C_\alpha z_\alpha, \quad w_\beta \to \rho_\beta w_\beta), \quad \alpha = 1,\dots,m, \quad \beta = 1,\dots,l, \quad \text{причем} \\ N_j(C_1 z_1, \overline{C_1 z_1}, \dots, C_m z_m, \overline{C_m z_m}, \rho_1 u_1, \dots, \rho_{j-1} u_{j-1}) = \\ \rho_j N_j(z_1, \overline{z_1}, \dots, z_m, \overline{z_m}, u_1, \dots, u_{j-1})\end{gathered} \tag{8}$$

(b) Эта линейная подгруппа нетривиальна, т.к. содержит однопараметрическую группу взвешенных растяжений вида

$$\begin{gathered} z_i \to t^{p_\alpha} z_i, \quad \alpha = 1,\dots,m \\ w_j \to t^{q_\beta} w_\beta, \quad \beta = 1,\dots,l \quad t \in \mathbf{R}^* \end{gathered} \tag{9}$$

Соответствующее векторное поле имеет вид

$$\Theta = 2\,\mathrm{Re}(p_\alpha z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + q_\beta w_\beta \frac{\partial}{\partial w_\beta}) \tag{10}$$

Применяя к модельной поверхности $Q$ критерий конечномерности $\mathrm{aut}\,Q_0$ работы [14], получаем, что конечномерность это *минимальность + голоморфная невырожденность*. Нетрудно видеть, что минимальность, в нашей ситуации, равносильна линейной независимости координатных форм. Условие голоморфной невырожденности это конструктивно проверяемое условие. Оно имеет вид не обращения в ноль некоторого определителя составленного из коэффициентов координатных форм. Однако специфика модельных поверхностей позволяет показать, что конечномерность эквивалентна полиномиальности.

**Утверждение 8:**
(a)Если $X \in \operatorname{aut} Q_0$ и $X = \sum X_s$ разложение этого векторного поля по однородным весовым компонентам, то $X_s \in \operatorname{aut} Q_0$ для всех $s$.
(b)Алгебра Ли $\operatorname{aut} Q_0$ конечномерна тогда и только тогда, когда она полиномиальна, т.е. состоит из векторных полей с полиномиальными коэффициентами равномерно ограниченной степени.
(c) Если $Q$ имеет вес $l$ и $\operatorname{aut} Q_0$ конечномерна, то $\operatorname{aut} Q_0 = \sum_{-l}^{d} \mathcal{G}_j$, где $d < \infty$.
(d) $\mathcal{G}_+ = \sum_0^d \mathcal{G}_j$ - это стабилизатор начала координат в $\operatorname{aut} Q_0$, т.е. $\operatorname{aut}_0 Q_0$
(e) Голоморфная однородность $Q$ равносильна тому, что $\dim \mathcal{G}_- = \dim Q = 2n + K$, где $\mathcal{G}_- = \sum_{-l}^{-1} \mathcal{G}_j$.
**Доказательство:** То, что векторное поле $X = 2\operatorname{Re}(\sum f_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \sum g_\beta \frac{\partial}{\partial w_\beta})$ является элементом $\operatorname{aut} Q_0$ равносильно тому, что голоморфные функции $f_\alpha$ и $g_\beta$ на $Q$ удовлетворяют условию касания к $Q$. А это линейное по $f$ и $g$ соотношение является квазиоднородным. Откуда следует пункт (a), а из него и пункт (b). Пункт (c) следует из предыдущих и того, что при нашей градуировке в $\mathbf{C}^{n+K}$ не существует векторных полей веса меньше $(-l)$. Утверждение (d) есть прямое следствие утверждения (5.b), а (e) следует из (d).

Отметим, что если воспользоваться критерием конечномерности работы [14], то условие (b) утверждения (7) это условия голоморфной невырожденности и минимальности.

Применим к анализу ростков поверхностей технику формальных рядов, идущую от работы А.Пуанкаре [1]. Рассмотрим отображение формальными рядами $\{z \to f(z,w), \quad w \to g(z,w)\}$ вида

$$
\begin{aligned}
f_\alpha &= z_\alpha + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\alpha^{\alpha+\nu} \quad \alpha = 1, \ldots, m \\
g_\beta &= w_\beta + \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\beta^{\beta+\nu} \quad \beta = 1, \ldots, l
\end{aligned}
\tag{11}
$$

И пусть это отображение переводит одну поверхность, заданную формальными уравнениями $(j = 1, \ldots, l)$

$$
v_j = F_j(z, \bar{z}, u) = N_j(z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_m, \overline{z_m}, u_1, \ldots, u_{j-1}) + F_j^{q_j+1}(z, \bar{z}, u) \ldots \tag{12}
$$

в другую такую поверхность

$$v_j = \tilde{F}_j(z, \bar{z}, u) = N_j(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_m, \bar{z}_m, u_1, \dots, u_{j-1}) + \tilde{F}_j^{q_j+1}(z, \bar{z}, u)\dots \quad (13)$$

т.е. при всех $(z, \bar{z}, u)$ имеет место тождество

$$-\operatorname{Im} g + \tilde{F}(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g) = 0, \text{где } w = u + iF(z, \bar{z}, u) \quad (14)$$

Запустим рекуррентный вычислительный процесс последовательного вычисления весовых компонент отображения. В качестве начальных значений возьмем $f_1^{p_1} = z_1, \quad \dots, \quad f_m^{p_m} = z_m, \quad g_1^{q_1} = w_1, \quad \dots, \quad g_l^{q_l} = w_l$. При этом основное соотношение (14) выполнено в $j$-й координате вплоть до веса $q_j$. Если же мы рассмотрим в каждой координате еще одну весовую компоненту, то у нас появятся новые компоненты, а именно $f_1^{p_1+1}, \dots, f_m^{p_m+1}, g_1^{q_1+1}, \dots, g_l^{q_l+1}$, а также компоненты уравнений, а именно $F_1^{q_1+1}, \tilde{F}_1^{q_1+1}, \dots, F_l^{q_l+1}, \tilde{F}_l^{q_l+1}$. И так далее, на $\mu$-м шаге появится следующий старший набор

$$f_1^{p_1+\mu}, \dots, f_m^{p_m+\mu}, g_1^{q_1+\mu}, \dots, g_l^{q_l+\mu} F_1^{q_1+\mu}, \tilde{F}_1^{q_1+\mu}, \dots, F_l^{q_l+\mu}, \tilde{F}_l^{q_l+\mu}$$

Поскольку при этом вычислении компоненты отображения $\phi = (f, g)$ появляются указанным образом мы пишем $\phi = \sum_1^\infty \phi_\mu$, где

$$\phi_\mu = (f_1^{p_1+\mu}, \dots, f_m^{p_m+\mu}, g_1^{q_1+\mu}, \dots, g_l^{q_l+\mu})$$

Аналогично $F = \sum_1^\infty F_\mu$, где

$$F_\mu = (F_1^{q_1+\mu}, \dots, F_l^{q_l+\mu}).$$

Назовем $\sum_1^\mu \phi_\nu$ и $\sum_1^\mu F_\nu$ - $\mu$-струей отображения и уравнения соответственно.

Нетрудно указать явный вид слагаемых, зависящих от $\mu$-го старшего набора. Выделяя в $j$-й координате тождества компоненту веса $q_j + \mu$, получаем

$$-\operatorname{Im} g_j^{q_j+\mu} + 2\operatorname{Re}\left(\sum \frac{\partial N_j}{\partial z_\alpha} f_\alpha^{p_\alpha+\mu}\right) + \sum \frac{\partial N_j}{\partial u_\beta} \operatorname{Re} g_\beta^{q_\beta+\mu} - F_\mu + \tilde{F}_\mu + \dots = 0 \quad (15)$$

При этом имеется ввиду, что значения компонент производных $N$, а также $F$ и $\tilde{F}$ берутся в точке $(z, \bar{z}, u)$, компонент $f$ и $g$ при $(z, w_1 =$

$u_1 + iN_1, \ldots, w_l = u_l + iN_l$), а многоточие - это те слагаемые, которые зависят от $\phi_\nu$, $F_\nu$, $\tilde{F}_\nu$ при $\nu < \mu$.

Заметим, что если считать $F$ и $\tilde{F}$ фиксированными, то коэффициенты текущих компонент $f$ и $g$ - это решения системы линейных уравнений и все степени свободы, которые имеются в выборе отображения содержатся в ядре линейного оператора.

$$L(f,g) = -\operatorname{Im} g + 2\operatorname{Re}(\sum \frac{\partial N}{\partial z_\alpha} f_\alpha + \sum \frac{\partial N}{\partial u_\beta} \operatorname{Re} g_\beta) \tag{16}$$

где $w = u + iN$. Это линейный оператор, определённый на линейном пространстве $\mathcal{V}$ формальных степенных рядов $(f,g)$ от комплексных переменных $(z,w)$, принимающий значения в пространстве $\mathcal{F}$ наборов вещественных формальных степенных рядов от переменных $(z, \bar{z}, u)$ или, иначе говоря, $\mathbf{R}^K$-значных степенных рядов. С другой стороны, то что $(f,g)$ содержится в ядре $L$ не что иное, как условие, что голоморфное в окрестности начала координат вещественное векторное поле $X = 2\operatorname{Re}(f\frac{\partial}{\partial z} + g\frac{\partial}{\partial w}) = (f,g) = \phi$ касательно к модельной поверхности $Q$ в точках поверхности $Q$. Таким образом имеет место совпадение $\mathrm{Ker} L = \operatorname{aut} Q$. Как мы отмечали выше $\operatorname{aut} Q$ - градуированная алгебра Ли и если $\sum_{-l}^{\infty} G_j$ - это компоненты $\operatorname{aut} Q$, $X = \sum_{-l}^{\infty} X_j \in \operatorname{aut} Q$, где $X_j \in G_j$, то если

$$X_\mu = \operatorname{Re}(\sum f_\alpha^{p_\alpha + \mu} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \sum g_\beta^{q_\beta + \mu} \frac{\partial}{\partial w_\beta})$$

то набор $(f_1^{p_1+\mu}, \ldots, f_m^{p_m+\mu}, g_1^{q_1+\mu}, \ldots, g_l^{q_l+\mu}) = \phi_\mu$ есть элемент ядра $L$. Как уже отмечалось, конечномерность алгебры $\operatorname{aut} Q$ равносильна конечно градуированности, т.е. тому что лишь конечное число компонент этой алгебры отлично от нуля. В этом случае $\operatorname{aut} Q = \sum_{-l}^{d} G_j$, где $d < \infty$ и мы говорим что $\operatorname{aut} Q$ имеет вид $(l,d)$.Итак

**Утверждение 9:**
(a) $KerL = \operatorname{aut} Q$,
(b) Если $\operatorname{aut} Q$ конечномерна вида $(l,d)$, а $(f,g)$ и $(\tilde{f}, \tilde{g})$ два отображения одной поверхности вида (12) $M_\xi$ в другую такую поверхность $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$, с совпадающими $d$-струями, то $(f,g) = (\tilde{f}, \tilde{g})$ (как формальные ряды).
(c) Если $M_\xi$ - росток поверхности вида (12), $X = \sum_0^{\infty} X_j \in \operatorname{aut}_0 M_0$, ее модельная поверхность $Q$ имеет конечный вес $d$, тогда отображение

$\sigma : X \to \tilde{X} = \sum_0^d X_j$ - это гомоморфизм с тривиальным ядром (точное представление) алгебры $\mathrm{aut}_0 M_0$ в алгебре $\mathrm{aut}_0 Q_0$ и, в частности, $\dim \mathrm{aut}_0 M_0$ конечна и не превосходит $\dim \mathrm{aut}_0 Q_0$.

Некоторая модификация описанной конструкции позволяет формальными голоморфными заменами добиться определённого упрощения уравнения ростка, т.е. построить приведение к нормальной форме.

Линейный оператор $L$ действует из пространства $\mathcal{V}$ в пространство $\mathcal{F}$. Рассмотрим его на $\mathcal{V}_0$ - подпространстве $\mathcal{V}$, состоящем из рядов без свободных членов, т.е. из формальных замен, сохраняющих начало координат. Пусть $\mathcal{FN}$ - прямое дополнение к образу $L(\mathcal{V}_0)$ до $\mathcal{F}$, а $\hat{\mathcal{V}}_0$ - прямое дополнение $KerL$ до $\mathcal{V}_0$ т.е.

$$\mathcal{F} = L(\mathcal{V}_0) + \mathcal{FN}, \quad \mathcal{V}_0 = KerL + \hat{\mathcal{V}}_0$$

Ясно, что при любом $T \in \mathcal{F}$ существует решение $(f,g) \in \mathcal{V}_0$, уравнения

$$L(f,g) \equiv T(z,\bar{z},u) \; mod \; \mathcal{FN}, \tag{17}$$

причем единственное в $\hat{\mathcal{V}}_0$. Далее, возвращаясь к рекуррентному процессу вычисления компонент $(f,g)$, будем использовать его несколько иначе. Исходный росток, заданный уравнением (12) полагаем фиксированным, а в качестве образа используем тот же самый росток, но будем изменять его процессе вычисления. При этом нетрудно убедиться, что решая на $\mu$-м шаге уравнение вида (17) можно добиться того, что уравнение в образе будет иметь вид $\operatorname{Im} w = N(z,\bar{z},u) + FN(z,\bar{z},u)$ (уравнение в нормальной форме) где $FN \in \mathcal{FN}$. Итак,

**Утверждение 10:**

Пусть уравнение ростка в формальных рядах имеет вид $v = N(z,\bar{z},u) + F(z,\bar{z},u)$, где $N$ - это формы, задающие модельную поверхность, а $F$ - формальные ряды состоящие из членов более высоких весов.

(a) Существует единственная формальная замена $\phi_0 \in \hat{\mathcal{V}}_0$, приводящая уравнение к нормальной форме $v = N(z,\bar{z},u) + FN(z,\bar{z},u)$, где $FN \in \mathcal{FN}$

(b) Любое другое приведение к нормальной форме имеет вид композиции $\phi_0 \circ \psi$, где $\psi \in \mathrm{Aut}_0 Q_0$.

(c) Сама модельная поверхность $Q = \{v = N(z,\bar{z},u)\}$ имеет единственную нормальную форму с $FN = 0$.

Итак, конечномерная группа автоморфизмов модельной поверхности действует на бесконечномерном пространстве построенных формальных нормальных форм. Поэтому можно подобрать номер струи так, чтобы размерность пространства соответствующих отрезков правых частей нормализованных уравнений была бы больше размерности группы. Далее, переходя к рассмотрению орбиты точки общего положения (дополнительные, по отношению к условиям конечномерности условия невырожденности, - сильная невырожденность) и используя специфику действия группы на этом пространстве, можно построить сечение к этому действию. С точки зрения уравнения ростка это будет дополнительная нормализация - построение специальной нормальной формы, которая будет уже однозначной. Для голоморфно эквивалентных ростков эти нормальные формы должны совпадать. Т.е. каждый коэффициент специальной нормальной формы - это голоморфный инвариант ростка. Однако можно утверждать большее.

**Утверждение 11:** Два сильно невырожденных ростка голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их специальные нормальные формы. Или, другими словами, набор коэффициентов специальной нормальной формы - это полный набор голоморфных инвариантов сильно невырожденного ростка.
*Доказательство:* В доказательстве нуждается импликация: если нормальные формы совпали, то ростки голоморфно эквивалентны. Это, в силу голоморфной невырожденности, следует из работ [15] и [16].

Пример конкретного построения специальной нормальной формы - работа [5].

Те $CR$-иерархии, которые были рассмотрены в работах [9], [10], обладали свойством *голоморфной однородности*. Имеется ввиду то, что группа голоморфных автоморфизмов модельной поверхности $\mathrm{Aut}\, Q$, действует на $Q$ транзитивно. Более того, для этих иерархий группа $G_-$, порожденная подалгеброй $\mathcal{G}_- = g_{-l} + \ldots + g_{-1}$ действует на Q треугольно-полиномиальными заменами транзитивно и без неподвижных точек, что позволяет канонически отождествить $Q$ и $G_-$. Т.е. модельная поверхность получает структуру группы Ли. Если говорить о произвольных, описанных выше иерархиях и модельных поверхностях, то рассчитывать на голоморфную однородность, вообще говоря, не приходится (см.пример

№3). Причина, по которой иерархии работ [9], [10] оказывались голоморфно однородными состоит в следующем. Пусть

$$\operatorname{Im} w_2 = N_2(z, \overline{z}), \ldots, \operatorname{Im} w_l = N_l(z, \overline{z}, u_1, \ldots, u_{l-1})$$

это соотношения, определяющие $Q$. Переразложим однородную форму $N_l$ с центром в точке $Q$, отличной от начала координат. Т.е. в качестве аргументов подставим $(z + a, \bar{z} + \bar{a}, u_1 + b_1, \ldots, u_{l-1} + b_{l-1})$. Если результат разложить в сумму квазиоднородных весовых компонент, то старшей, а именно $l$-й, компонентой будет $N_l(z, \overline{z}, u_1, \ldots, u_{l-1})$ плюс приращение, которое есть сумма компонент меньшего веса. Специфика тех иерархий (она связана с условием полной невырожденности) состоит в том, что приращение всегда можно представить как линейную комбинацию правых частей младших уравнений и плюригармонического полинома. Таким образом простое преобразование координат возвращает старшее уравнение к прежнему виду. И так далее, переходя от старших координат к младшим, мы возвращаем уравнение к прежнему виду. На эту процедуру можно смотреть так. Исходный сдвиг не является автоморфизмом Мы последовательно изменяем исходный сдвиг так, что он становится автоморфизмом $Q$. Полученный "нормализованный сдвиг"представляет собой полиномиально-треугольное преобразование. Их совокупность $\operatorname{Aut} Q_-$ является группой Ли, с которой естественно отождествляется $Q$. В основе этого построения лежит следующее свойство ($S$-свойство), которое можно понимать и как свойство отдельной модельной поверхности, и как свойство всей иерархии (если ему удовлетворяют все подчиненные модельные поверхности).

**Определение 12:** **S**-*свойство* (или инвариантность относительно нормализованного сдвига): Приращение, которое получает каждая координатная форма уравнения модельной поверхности $Q$ при произвольном сдвиге $(z \to z+a, \quad w \to w+b)$, где $(a, b) \in Q$ содержится в пространстве, порожденном младшими формами и плюригармоническими полиномами соответствующий степени.
Можно констатировать следующее

**Утверждение 13:**
(a) Если модельная поверхность обладает $S$-свойством, то она голоморфно однородна.

(b) Иерархии работ [9], [10] обладают $S$-свойством.
(c) Если модельная поверхность $Q$ обладает $S$-свойством, то группа Ли $\mathrm{Aut}\, Q_-$, порожденная $\mathrm{aut}\, Q_-$ (сумма отрицательных компонент $\mathrm{aut}\, Q$) состоит из полиномиально-треугольных преобразований. При этом $\mathrm{Aut}\, Q_-$ действует на $Q$ транзитивно без неподвижных точек и $Q$ канонически отождествляется с $\mathrm{Aut}\, Q_-$.

Иерархии работ [9], [10], обладают еще одним свойством. Группа $\mathrm{Aut}\, Q$ является подгруппой Ли группы бирациональных автоморфизмов $\mathbf{C}^{n+K}$ равномерно ограниченной степени. Многократно применявшаяся идея доказательства этого утверждения известна давно [3]. Оно основано, во-первых, на наличии линейного градуирующего векторного поля (в нашей ситуации это поле $\Theta$ (см.(10))) и, во-вторых, на конечно-градуированности $\mathrm{aut}\, Q$ и, в-третьих, на строении $\mathrm{Aut}\, Q_-$, которое обеспечивает $S$-свойство. Таким образом получаем

**Утверждение 14:** Пусть $Q$ обладает $S$-свойством и алгебра $\mathrm{aut}\, Q$ модельной поверхности $Q$ конечномерна вида $(l, d)$, тогда группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, Q$ есть подгруппа Ли группы бирациональных автоморфизмов $\mathbf{C}^{n+K}$, причем степени отображений, составляющих $\mathrm{Aut}\, Q$ ограничены величиной, зависящей лишь от $(n, K, l, d)$.

**Примеры 15:**

1. Вот простой пример гиперповерхности, которая не укладывается в рамки описанной конструкции $\{(z, w = u + iv) \in \mathbf{C}^2 : v = u|z|^2\}$, т.е. не является модельной, независимо от расстановки весов, т.к.нарушено свойство треугольности.

2. $S$-свойство может выполняться и для иерархий, не сводящихся к упомянутым выше, и модельных поверхностей, не обладающих свойством полной невырожденности.

2.1. Гиперповерхность в $\mathbf{C}^{n+2}$ вида

$$\{\mathrm{Im}\, w = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{\zeta} + \ldots + z_n \bar{\zeta}^n)\},$$

расстановка весов: $([\zeta] = 1,\ [z_j] = 1 + n - j,\ [w] = n + 1)$. Этот пример

был рассмотрен в работе [8].
2.2. Прямое произведение модельной поверхности типа $(1,2)$ на себя. Т.е. поверхность типа (2,4), заданная уравнениями.

$$\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_1^2\bar z_1),\ \operatorname{Im} w_3 = |z_2|^2,\ \operatorname{Im} w_4 = 2\operatorname{Re}(z_2^2\bar z_2)$$

Расстановка весов: $[z_1]=[z_2]=1,\ [w_1]=[w_3]=2,\ [w_2]=[w_4]=3$ .
2.3. Пусть $z\in \mathbf{C}^1, \quad w=(w_1,\dots w_k)\in \mathbf{C}^k$. $Q$ зададим как

$$\{\operatorname{Im} w_1 = (\operatorname{Im} z)^2,\dots,\operatorname{Im} w_k = (\operatorname{Im} z)^{k+1}\}.$$

Расстановка весов: $([z]=1,[w_j]=(j+1))$. Этот пример был рассмотрен в работе [13].
Приведенные здесь примеры допускают много обобщений, как поверхностей так и иерархий с $S$-свойством.

3. Для гиперповерхности в $\mathbf{C}^2$ вида $\{\operatorname{Im} w = 2\operatorname{Re}(z^2\bar z)\}$ орбита начала координат это вещественная 2-мерная плоскость $\{\operatorname{Re} z=0,\operatorname{Im} w=0\}$, состоящая из точек Леви-вырождения, что не совпадает со всей 3-мерной гиперповерхностью. Таким образом эта модельная гиперповерхность ( расстановка весов: $[z]=1,\ [w]=3$) не является голоморфно однородной. Этот пример был разобран в работе [7].

**Замечание 16:** То, что при построении $CR$-иерархии мы были привязаны к действию псевдогруппы голоморфных преобразований $\mathcal{HOL}$ в пространстве комплексных переменных не является принципиальным. Этот подход можно адаптировать и к другим ситуациям. Для реализации подобной конструкции существенно наличие последовательности перменных, весов, пространств однородных форм и наличие структурной псевдогруппы $\mathcal{G}$, индуцирующей действие на пространствах конечных наборов переменных.

**Замечание 17:** Есть основания считать, что метод модельной поверхности, как в прежних реализациях, так и в том виде, как он был представлен в данной работе и подход, предложенный более 40 лет назад японским геометром Н.Танакой (градуированные алгебры Ли) [2] в некотором смысле двойственны (координатная и безкоординатная версии $CR$-геометрии). Описание имеющихся соответствий автор планирует обсудить в отдельной статье.

**Замечание 18:** Описанный подход пригоден и для изучения $CR$-геометрии бесконечномерных (гильбертовых) пространств, как это было показано в [12]. Новые проблемы возникают, но их не много и принципиально меняется мало. При этом переменные, которые участвуют в определении иерархии, могут принимать значение в комплексных гильбертовых пространствах, пространства форм также становятся бесконечномерными. Все это не трудно реализовать и в новом, описанном здесь, более общем контексте.

# Список литературы


[1] H. Poincare, "Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme",Rend. Circ. Mat., Palermo, 1907, 185–220

[2] Noboru Tanaka On differential systems, graded Lie algebras and pseudugroups, J.Math.,Koyto Univ., 10-1, (1970), pp.1-82.

[3] W. Kaup, Y. Matsushima and T. Ochiai, "On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains". Amer. J. Math. 92 1970 475–498.

[4] Chern S. S., Moser J. K., "Real hypersurfaces in complex manifolds", Acta Math., 133:3,4 (1974), 219–271

[5] В. К. Белошапка, "О размерности группы автоморфизмов аналитической гиперповерхности", Изв. АН СССР. Сер. матем., 43:2 (1979), 243–266.

[6] Белошапка В.К., "О голоморфных преобразованиях квадрики", Математический сборник, 182:2 (1991), 203–219

[7] V. K. Beloshapka, Automorphisms of degenerated hypersurfaces in $\mathbf{C}^2$ and dimension conjecture, Russian J. Math. Phys., 4:3 (1996),399–404

[8] А. С. Лабовский, "О размерности группы биголоморфных автоморфизмов вещественно-аналитических гиперповерхностей", Матем. заметки, 61:3 (1997), 349–358

[9] В. К. Белошапка, Полиномиальные модели вещественных многообразий//Изв. РАН. Сер. матем., 65:4 (2001),с.3–20.

[10] Белошапка В.К. Универсальная модель вещественного подмногообразия, Матем.заметки, т.75, № 4, С.507, 2004.

[11] Beloshapka V.K., “Moduli Space of Model Real Submanifolds”, Russian Journal of Mathematical Physics, 13:3 (2006), 245–252.

[12] В. К. Белошапка, “Метод модельной поверхности: бесконечномерная версия”, Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа, Сборник статей, Тр. МИАН, 279, МАИК, М., 2012, 20–30.

[13] G. Fels and W. Kaup, “Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5”. Acta Math. 201 (2008), no. 1, 1–82.

[14] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild, “Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings”. Princeton University Press, Princeton Math. Ser. **47**, Princeton, NJ, 1999.

[15] R.Julin, B.Lamel, Automorphism groups of minimal real-analytic CR-manifolds, J.Eur.Math.Soc. 15 (2013), N 2, 509-537.

[16] J. Merker, “Convergence of formal invertible CR mappings between minimal holomorphically nondegenerate real analytic hypersurfaces”. Int. J. Math. Math. Sci. 26 (2001), no. 5, 281–302.