Сфера в $\mathbf{C^2}$ как модельная поверхность для вырожденных гиперповерхностей в $\mathbf{C^3}$

В.К.Белошапка *, И.Г.Коссовский†

3 января 2015 г.

Аннотация

В работе описано неожиданное соответствие между автоморфизмами 5-мерных вещественных равномерно 2-невырожденных гиперповерхностей пространства $\mathbf{C}^3$ и автоморфизмами 3-мерной гиперсферы в $\mathbf{C}^2$. В определенном смысле эта 3-мерная гиперсфера, которая, как известно, является модельной для класса невырожденных 3-мерных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^2$, обладает этим статусом и по отношению к указанному классу 5-мерных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^3$

0. Введение

Если (z, w) - координаты пространства $\mathbf{C}^2$, то локальное уравнение Леви-невырожденной вещественно аналитической гиперповерхности имеет после аналитического упрощения вид $\operatorname{Im} w = |z|^2 + O(3)$ (O(m) обозначает члены ряда степени m и выше). Если же (z, ζ, w) - координаты пространства $\mathbf{C}^3$, то локальное уравнение гиперповерхности, чья форма Леви имеет в начале координат ранг один, имеет (после аналитического упрощения) точно такой же вид $\operatorname{Im} w = |z|^2 + O(3)$. При этом

[1]Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия, vkb@strogino.ru. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 14-01-00709-А и 13-01-12417-ОФИ-М-2013

[2]Faculty of Mathematics, University of Vienna, e-mail: ilya.kossovskiy@univie.ac.at. With the support of the Austrian Science Fund (FWF)

уравнение $\operatorname{Im} w = |z|^2$ в $\mathbf{C}^2$ задает 3-мерную гиперповерхность, проективно эквивалентную стандартной сфере $|z|^2 + |w|^2 = 1$ и чья группа голоморфных автоморфизмов изоморфна 8-мерной классической группе $SU(2,1)$. Тогда как 5-мерная гиперповерхность, которая задаётся тем же уравнением в $\mathbf{C}^3$, имеет структуру прямого произведения сферы в $\mathbf{C}^2$ на комплексную прямую и которая имеет бесконечномерную группу автоморфизмов. Гиперповерхность вида $\operatorname{Im} w = |z|^2 + O(3)$ в $\mathbf{C}^3$ имеет в начале координат ранг один, а в окрестности ранг не меньше единицы. Если ранг равен единице в полной окрестности начала координат, то мы говорим, что наша гиперповерхность *равномерно Леви-вырождена*. Условием этого для нашей гиперповерхности является равенство нулю определителя матрицы формы Леви, эрмитовой матрицы размера (2×2). Далее возникает следующая дихотомия. Если существует голоморфное векторное поле L такое что $L + \bar{L}$ попадает в *комплексную касательную* к гиперповерхности в каждой точке, то поверхность называется *голоморфно вырожденной* и снова имеет (в определенных локальных голоморфных координатах) вид прямого произведения гиперповерхности в $\mathbf{C}^2$ и комплексной прямой. Группа автоморфизмов, опять же, является бесконечномерной в этом случае. В противном же случае, гиперповерхность удовлетворяет условию невырожденности называемому *2-невырожденность* (см. [4]). Всякую такую поверхность мы будем называть *равномерное 2-невырожденной*, и она будет главным объектом нашего изучения. Для дальнейшего удобнее говорить не о степенях мономов, а об их весах. Веса мономов определим следующим выбором весов переменных: $[z] = [\bar{z}] = [\zeta] = [\bar{\zeta}] = 1, \quad [w] = [\bar{w}] = 2$. Обозначение $O(m)$ теперь понимаем как сумму мономов весов m и выше. Нетрудно убедиться в том, что равномерно 2-невырожденная гиперповерхность в $\mathbf{C}^3$ имеет уравнение вида

$$\operatorname{Im} w = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z^2\bar{\zeta}) + O(4)$$

(см. [6]). В работе [1] было показано, что размерность стабилизатора начала координат в группе голоморфных автоморфизмов такой гиперповерхности не превосходит шести, а размерность всей группы не превосходит 11-ти. Комбинируя этот результат с известной классификацией Фелса и Каупа [7] однородных 2-невырожденных гиперповерхностей, нетрудно улучшить оценку размерности полной группы до 10. Этот результат является точным, т.к. 10 - это размерность светового конуса $(\operatorname{Im} w)^2 = (\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Im}\zeta)^2$. Размерность стабилизатора точки светового конуса равна пяти (см. [8]), что чудесным образом совпадает с размерностью стабилизатора точки сферы в $\mathbf{C}^2$. Данная работа содержит объяснение этого совпадения (см. Теорему 5 ниже). Отметим, что точная оценка на размерность стабилизатора была получена в [9], где авторы показали, что световой конус обладает самым большим стабилизатором в классе равномерно 2-невырожденных гиперповерхностей.

1. Гомологический оператор - ядро - нормализация

Пусть Γ_ξ - росток вещественно аналитической равномерно 2-невырожденной гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства. Тогда в окрестности ξ можно выбрать координатную систему ($z \in \mathbf{C}$, $\zeta \in \mathbf{C}$, $w = u + iv \in \mathbf{C}$) так, что уравнение Γ_ξ примет вид

$$v = z\bar{z} + \mathrm{Re}(z^2\bar{\zeta}) + F_4 + F_5 + \ldots \qquad (1)$$

При этом веса переменным назначим следующим образом: $[z] = [\bar{z}] = [\zeta] = [\bar{\zeta}] = 1, \quad [u] = 2$ Применим к этому классу гиперповерхностей стандартную технику в стиле Пуанкаре (формальные ряды, гомологическое уравнение). Пусть

$$z \to z + f_3 + \ldots, \quad \zeta \to \zeta + h_2 + \ldots, \quad w \to w + g_4 + \ldots \qquad (2)$$

отображает Γ_0 на другой росток такого вида - $\tilde{\Gamma}_0$, заданный уравнением

$$v = z\bar{z} + 2\,\mathrm{Re}(z^2\bar{\zeta}) + \tilde{F}_4 + \tilde{F}_5 + \ldots \qquad (3)$$

Тогда, записывая возникающее соотношение и отделяя в нем компоненту веса m, получаем

$$\mathrm{Re}(ig_m(z,\zeta,w) + 2\bar{z}f_{m-1}(z,\zeta,w) + 2\bar{z}^2h_{m-1}(z,\zeta,w)) = \\ \tilde{F}_m(z,\bar{z},\zeta,\bar{\zeta},u) - F_m(z,\bar{z},\zeta,\bar{\zeta},u) + \ldots,$$

где $w = u + i|z|^2$ и, тем самым, имеет вес 2, а многоточие означает члены, зависящие от $g_\mu, f_{\mu-1}, h_{\mu-2}, F_\mu, \tilde{F}_\mu$ при $\mu < m$.

Вычислим ядро гомологического оператора

$$\mathcal{L}(g,f,h) = \mathrm{Re}(ig(z,\zeta,u+i|z|^2) + 2\bar{z}f(z,\zeta,u+i|z|^2) + 2\bar{z}^2h(z,\zeta,u+i|z|^2)) = 0 \qquad (4)$$

Введем обозначения:

$$f(0,0,u)=a(u),\quad g(0,0,u)=b(u),\quad h(0,0,u)=c(u),\tag{5}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,u)=d(u),\quad \frac{\partial h}{\partial z}(0,0,u)=e(u),\quad \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(0,0,u)=m(u)$$

Полагая в (4) $\bar z=\bar\zeta=0$, получаем

$$g(z,\zeta,u)=b(u)+2i\bar a(u)z+2I\bar c(u)z^2\tag{6}$$

При $z=0$ получаем $\operatorname{Im} b(u)=0$. Подставляем полученное выражение в (4), дифференцируем по $\bar z$ и, полагая $\bar z=\bar\zeta=0$, получаем

$$f(z,\zeta,u)=a(u)+d(u)z+(2i\bar a'(u)-\bar e)z^2+2i\bar c(u)z^3\tag{7}$$

Причем $b'(u)=2\operatorname{Re} d(u)$. Подставляем полученное выражение в (4), два раза дифференцируем по $\bar z$ и, полагая $\bar z=\bar\zeta=0$, получаем

$$h(z,\zeta,u)=c(u)+ze(u)+\frac{1}{2}m(u)z^2+(2\bar a''(u)+2i\bar e'(u))z^3+2\bar c''(u)z^4\tag{8}$$

Причем $2\operatorname{Im} d'(u)=\operatorname{Re} m(u)$. Подставим полученное выражение в (4) и выпишем вид некоторых мономов, входящих в (4) после трех наших подстановок.

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{3}b'''(u)-\bar d''(u)-d''(u)-i\bar m'(u)+im'(u)-i\bar m')z^3\bar z^3\\
&(-4\bar e'(u)+\frac{8}{3}i\bar a'''(u))z^4\bar z^3\\
&\frac{8}{3}i\bar c'''(u)z^5\bar z^3\\
&(\frac{1}{3}i\bar d'''(u)-\frac{1}{3}id'''(u)-\frac{1}{2}m''(u)-\frac{1}{2}\bar m''(u))z^4\bar z^4\\
&(-\frac{4}{3}a^{IV}(u)+\frac{4}{3}ie'''(u))z^5\bar z^4\\
&(\frac{1}{12}d^{IV}(u)+\frac{1}{12}\bar d^{IV}(u)-\frac{1}{60}b^{V}(u)+\frac{1}{6}i\bar m'''(u)-\frac{1}{6}im'''(u))z^5\bar z^5)
\end{aligned}\tag{9}$$

Если все эти слагаемые равны нулю, то все шесть функций одного переменного (a,b,c,d,e,m) - это полиномы, со следующими оценками на степени $(3,4,2,3,2,2)$. В итоге получаем следующее описание ядра оператора $\mathcal{L}$.

Лемма 1:
(a) Ядро $\mathcal{L}$ - это 27-мерное пространство, которое состоит из полиномов вида

$$g = b_0 + 2\operatorname{Re} d_0 u + \operatorname{Re} d_1 u^2 + \frac{2}{3}\operatorname{Re} d_2 u^3 + \frac{1}{2} d_3 u^4 + 2i(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 u + \bar{a}_2 u^2 + \bar{a}_3 u^3)z + 2i(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 u + \bar{c}_2 u^2)z^2$$
$$f = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + (d_0 + d_1 u + d_2 u^2 + d_3 u^3)z + (2i\bar{a}_1 + 4i\bar{a}_2 u + 4i\bar{a}_3 u^2 - \bar{e}_0 - \bar{e}_1 u)z^2 + (2i\bar{c}_1 + 4i\bar{c}_2 u)z^3 \qquad (10)$$
$$h = 4\bar{c}_2 z^4 + (4\bar{a}_2 + 4\bar{a}_3 u + 2i\bar{e}_1)z^3 + (\operatorname{Im} d_1 + \frac{1}{2} i m_0 + 2u \operatorname{Im} d_2 - \frac{2}{3} i u \operatorname{Re} d_2 - i d_3 u^2)z^2 + z(e_0 + e_1 u - 2i a_3 u^2) + c_0 + c_1 u + c_2 u^2$$

При этом $(a_0, a_1, a_2, a_3, c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2, e_0, e_1)$ - это комплексные параметры, а (b_0, d_3, m_0) - вещественные.
(b) Если рассмотреть разложение ядра по весовым компонентам, то старшая компонента это (g_8, f_7, h_6).

Вещественный степенной ряд F от переменных $(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}, u)$ можно записать в виде

$$\sum c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(u) z^\alpha \bar{z}^\beta \zeta^\gamma \bar{\zeta}^\delta$$

Для вычисления ядра оператора были использованы следующие компоненты $(\alpha, 0, \gamma, 0)$, $(\alpha, 1, \gamma, 0)$, $(\alpha, 2, \gamma, 0)$ при всех значениях α и β, а также (3,3,0,0), (4,3,0,0), (5,3,0,0), (4,4,0,0), (5,4,0,0), (5,5,0,0).

Определим прямое разложение пространства вещественных степенных рядов $\mathcal{F}$ в прямую сумму двух подпространств $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$, где $\mathcal{R}$ это суммы мономов указанного вида и сопряженные к ним, а $\mathcal{N}$ это вещественные ряды составленные из мономов, не вошедших в $\mathcal{R}$. Повторяя те же самые вычисления для неоднородных уравнений получаем следующее утверждение.

Лемма 2: Линейное неоднородное уравнение $\mathcal{L}(g, f, h) = T \ mod \ \ \mathcal{N}$ разрешимо при любой правой части T.

Используя соотношение (4) для рекуррентного вычисления последовательных троек (g_m, f_{m-1}, h_{m-2}), получаем на основании полученных двух лемм следующее утверждение.

Утверждение 3:
(a) Уравнение гиперповерхности вида (1) формальной заменой можно привести к формальной нормальной форме вида

$$\operatorname{Im} w = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z^2\bar\zeta) + O(4) = \tag{11}$$
$$|z|^2 + 2\operatorname{Re}(z^2\bar\zeta) + \sum N_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(u) z^\alpha \bar z^\beta \zeta^\gamma \bar\zeta^\delta \tag{12}$$

где $N_{\alpha,0\gamma,0}(u) = N_{\alpha,1\gamma,0}(u) = N_{\alpha,2\gamma,0}(u) = 0$ для всех значений α и γ, а также $N_{3,3,0,0}(u) = N_{4,3,0,0}(u) = N_{5,3,0,0}(u) = N_{4,4,0,0}(u) = N_{5,4,0,0}(u) = N_{5,5,0,0}(u)$.
(b) Если имеются два отображения вида $w \to w + O(9), \quad z \to z + O(8), \quad \zeta \to \zeta + O(7)$ одной гиперповерхности вида (1) на другую такую гиперповерхность (имеется ввиду, что обе фиксированы), то эти отображения совпадают. В частности, если это отображение гиперповерхности на себя, то оно является тождественным отображением.

Заметим, что если нам нужна нормализация конечного отрезка ряда, то такая нормализация осуществляется полиномиальной заменой.

2. Условие равномерной 2-невырожденности

Пусть Γ_ξ - росток вещественно аналитической гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства, чья форма Леви вырождена, но имеет ненулевой ранг 1 в точке ξ. Тогда в окрестности ξ можно выбрать координатную систему ($z \in \mathbf{C},\ \zeta \in \mathbf{C},\ \mathrm{w} = \mathrm{u} + \mathrm{iv} \in \mathbf{C}$) так, что уравнение Γ_ξ примет вид

$$v = z\bar z + \text{члены степени 3 и выше} = z\bar z + F(z, \bar z, \zeta, \bar\zeta, 2u) \tag{13}$$

Предположим теперь, что поверхность является равномерно два невырожденной, и изучим следствия этого условия. Уравнение касательной имеет вид $dv = 2Re(F_z dz + F_\zeta d\zeta) + F_u du$. Комплексной касательной - $dw = (F_z dz + F_\zeta d\zeta)/(1 - iF_u)$. Форма Леви это сужение комплексного гессиана $\partial\bar\partial(|z|^2 + F)$ на комплексную касательную, т.е. некоторая эрмитова форма на пространстве переменных (z, ζ), которой соответствует эрмитова матрица размера 2x2 - $\mathcal{L}(F)$. В силу того, что $F = O(3)$, эта форма в нуле имеет единичный ранг, поэтому условие 2-невырожденности сводится к тому, что

$$DL(F) = \det \mathcal{L}(F) = h_{11}h_{22} - |h_{12}|^2 = 0 \tag{14}$$

Мы будем предполагать, что младшие члены (до веса 9) уравнения гиперповерхности записаны в нашей нормальной форме т.е.

$$v = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z^2\bar{\zeta}) + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + N_9 + O(10) \tag{15}$$

Ясно, что $(m-2)$-я компонента (14)) не зависит от компонент уравнения веса выше m. Отделяя в (14) компоненты весов 2, 3, 4, 5, 6, 7 и приравнивая их к нулю, получаем ограничения на вид $N_4,\ N_5,\ N_6,\ N_7,\ N_8,\ N_9$. Компьютерные вычисления [3] позволяют установить, что

$$\begin{gathered} N_4 = 4|z|^2|\zeta|^2, \\ N_5 = 2\,\mathrm{Re}(4z^2\zeta\bar{\zeta}^2 + \beta_1 z^3\bar{z}\bar{\zeta} + \beta_2 z^4\bar{\zeta}) \end{gathered} \tag{16}$$

где $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ - комплексный параметр. Компоненты следующих весов имеют свой специфический вид и они зависят от возрастающего числа параметров [3].

3. Младшие компоненты автомофизма

Наша следующая цель - это анализ младших компонент автоморфизма гиперповерхности вида

$$v = z\bar{z} + 2\,\mathrm{Re}(z^2\bar{\zeta}) + 4|z|^2|\zeta|^2 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + \cdots = N(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}, u) \tag{17}$$

представленной уравнением в нормальной форме с учетом ограничений, полученных из условия равномерной Леви-вырожденности. Нас интересует 8-струя автоморфизма, сохраняющего начало координат на месте, а именно

$$\begin{aligned} w &\to g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + O(9) = g(z,\zeta,w) \\ z &\to f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + O(8) = f(z,\zeta,w) \\ \zeta &\to h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + O(7) = h(z,\zeta,w) \end{aligned} \tag{18}$$

То, что данное отображение есть автоморфизм означает в точности следующее

$$\Phi(z,\bar z,\zeta,\bar\zeta,u) = -\operatorname{Im} g + N(f,\bar f,h,\bar h,\operatorname{Re} g) =$$
$$-\operatorname{Im} g + f\bar f + 2\operatorname{Re}(f^2\bar h) + 4|f|^2|h|^2 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + \cdots = 0$$
$$\text{при} \quad w = u + iN \quad (19)$$

Это соотношение можно разложить в сумму весовых компонент $\sum \Phi_m$. Ясно, что компонента веса m не зависит от $(g_\mu, f_{\mu-1}, h_{\mu-2})$ при $\mu > m$. Выделяем младшие компоненты [3].

Вес 1: $\Phi_1 = -\operatorname{Im} g_1$, откуда следует, что $g_1 = 0$.

Вес 2: $\Phi_2 = -\operatorname{Im} g_2 + |f_1|^2$, откуда получаем, что $g_2 = |\lambda|^2 w, \quad f_1 = \lambda z$ где λ - комплексное число, отличное от нуля.

Вес 3:

$$g_3 = |\lambda|^2 2i\bar a z w, \quad f_2 = \lambda(2i\bar a - b)z^2 + aw), \quad h_1 = \frac{\lambda}{\bar\lambda}(\zeta + bz)$$

где a и b - комплексные параметры.

Вес 4: Получаем, что $b = -ia$, а также

$$g_4 = |\lambda|^2((A_1 w - 2\bar a^2)z^2 w + (r + i|a|^2)w^2), \quad f_3 = \lambda(A_1 z^3 + zw(r + iA_2) - 2\bar a\zeta w),$$
$$h_2 = \frac{\lambda}{\bar\lambda}(z^2(A_2 - 3/2|a|^2 + iA_3) + 2i\bar a z p + \frac{1}{2}i\bar A_1 w)$$

где A_1 - комплексный параметр, а A_2 и A_3 - вещественные.

Дальнейшие вычисления будем проводить в предположении, что значения параметров $(\lambda,\ a,\ r)$ совпадают с их значениями для тождественного отображения, а именно

$$\lambda = 1, \quad a = 0, \quad r = 0$$

Вес 5: Получаем $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, откуда следует, что

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = w, \quad f_1 + f_2 + f_3 = z, \quad h_1 + h_2 = \zeta,$$

а также имеем

$$g_5 = 2i\bar B z w^2, \quad f_4 = B w^2, \quad h_3 = -4\bar B z^3 - 4iBzw$$

где B - комплексный параметр.
Вес 6: Получаем $B=0$, откуда следует, что $g_5=f_4=h_3=0$, а также имеем

$$g_6 = C_1 z^2 w^2, \quad f_5 = 2C_1 z^3 w + iC_2 z w^2, \quad h_4 = -2iC_1 z^4 + 2C_2 z^2 w + \frac{i}{2}\bar{C}_1 w^2,$$

где C_1 - комплексный параметр, а C_2 - вещественный.
Вес 7: Получаем $C_1=C_2=0$, откуда следует, что $g_6=f_5=h_4=0$, а также имеем

$$g_7 = Dzw^3, \quad f_6 = 2Dz^2w^2 + \frac{i}{2}\bar{D}w^3, \quad h_5 = -2iDz^3 w + \bar{D}zw^2,$$

где D - комплексный параметр.
Вес 8: Получаем $D=0$, откуда следует, что $g_7=f_6=h_5=0$, а также имеем

$$g_8 = Ew^4, \quad f_7 = 2Ezw^3, \quad h_6 = -2iEz^2w^2,$$

где E - вещественный параметр.
Вес 9: Получаем $E=0$, откуда следует, что $g_8=f_7=h_6=0$. В результате, в качестве непосредственного следствия утверждения (3.b) получаем

Утверждение 4:
Если $z \to f(z,\zeta,w),\ \zeta \to h(z,\zeta,w),\ w \to g(z,\zeta,w)$ - автоморфизм равномерно 2-невырожденной гиперповерхности вида (1), причем

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=1, \quad \frac{\partial f}{\partial w}(0,0,0)=0, \quad \mathrm{Re}(\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(0,0,0))=0,$$

то это тождественное отображение, т.е. $f=z,\ h=\zeta,\ g=w$.

Напомним некоторые, хорошо известные сведения о невырожденных гиперповерхностях в $\mathbf{C}^2$. Гиперповерхность $Q=\{v=|z|^2\}$ в $\mathbf{C}^2$ - это проективный образ стандартной сферы $S=\{|z|^2+|w|^2=1\}$. Q - голоморфно, точнее аффинно, однородна и стабилизатор начала координат $\mathrm{Aut}_\xi Q$, точки $\xi=(0,0)$ состоит из проективных преобразований вида

$$z \to \frac{\lambda(z+aw)}{1-\delta}, \quad w \to \frac{|\lambda|^2 w}{1-\delta}, \quad \delta = 2i\bar{a}z + (r+i|a|^2)w), \tag{20}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}^*,\ a \in \mathbf{C},\ r \in \mathbf{R}$. Эта односвязная 5-мерная группа Ли имеет вид полупрямого произведения вида $\mathbf{C}^* \lhd \mathbf{C} \lhd \mathbf{R}$.

Обозначим это отображение через $\chi_{\lambda ar}$. Если (F, G) - координатные функции этого отображения, то

$$\lambda = F'_z(0,0),\ a = \frac{F'_w(0,0)}{F'_z(0,0)},\ r = \frac{\operatorname{Re} G''_{ww}(0,0)}{|F'_z(0,0)|^2} \tag{21}$$

Если использовать веса $[z] = [\bar{z}] = 1,\ [w] = [\bar{w}] = 2$, то любая Леви-невырожденная гиперповерхность в $\mathbf{C}^2$ имеет локальное уравнение вида $v = |z|^2 + O(6)$. И если $\psi = (f(z,w), g(z,w))$ это её автоморфизм, оставляющий начало координат на месте и удовлетворяющий условиям, аналогичным условиям (21), то ψ этими условиями определен однозначно и он может быть обозначен как $\psi_{\lambda ar}$. Отображение $\psi_{\lambda ar} \to \chi_{\lambda ar}$ определяет точное представление стабилизатора точки в группе автоморфизмов этой гиперповерхности в стабилизаторе точки сферы.

Пусть теперь Γ росток равномерно 2-невырожденной гиперповерхности в $\mathbf{C}^3$, заданный уравнением приведенной к нормальной форме до веса 9. И пусть $\phi_{\lambda ar} = (f(z,\zeta,w), h(z,\zeta,w), g(z,\zeta,w))$ - однозначно определенный автоморфизм, сохраняющий начало координат и удовлетворяющий условиям

$$\lambda = f'_z(0,0,0),\ a = \frac{f'_w(0,0,0)}{f'_z(0,0,0)},\ r = \frac{\operatorname{Re} g''_{ww}(0,0,0)}{|f'_z(0,0,0)|^2} \tag{22}$$

Тогда имеем
Теорема 5: (a) Отображение $\phi_{\lambda ar} \to \chi_{\lambda ar}$ есть точное представление стабилизатора начала координат равномерно 2-невырожденной гиперповерхности вида (17) в $\mathbf{C}^3$ в стабилизаторе точки сферы в $\mathbf{C}^2$.
(b) Если гиперповерхность - это световой конус, который можно записать в виде [8]

$$\operatorname{Im} w = \frac{|z|^2 + \operatorname{Re}(z^2\bar{\zeta})}{1 - |\zeta|^2},$$

то данное отображение задает изоморфизм стабилизатора точки конуса и стабилизатора точки сферы.

Напомним, что группа автоморфизмов светового конуса детально описана в работе [8].

Список литературы

[1] Белошапка В.К., *Симметрии вещественных гиперповерхностей трехмерного комплексного пространства*, Матем. заметки, 78:2 (2005), 171–179.

[2] Белошапка В.К., Коссовский И.Г., Maple-вычисления, http://vkb.strogino.ru

[3] Белошапка В.К.,*Представление группы голоморфных симметрий вещественного ростка в группе симметрий его модельной поверхности*, Математические заметки, т.82, №4, октябрь 2007, стр. 515-518.

[4] S. Baouendi, X. Huang and L.P. Rothschild. *Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces.* Invent. Math. 125 (1996), 13-36.

[5] Chern S. S., Moser J. K., *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math., 133:3,4 (1974), 219–271.

[6] P. Ebenfelt. *Normal forms and biholomorphic equivalence of real hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$. Indiana Univ. Math. J. 47 (1998), no. 2, 311-366.

[7] Fels G.,Kaup W.,*Classification of Levi degenerate homogeneous CR–manifolds in dimension 5*, Acta Mathematica, 201:1 (2008), 1–82.

[8] G. Fels, W. Kaup. *CR-manifolds of dimension 5: a Lie algebra approach.* J. Reine Angew. Math. 604 (2007), 47–71.

[9] A. Isaev and D. Zaitsev. *Reduction of five-dimensional uniformly Levi degenerate CR structures to absolute parallelisms.* J. Geom. Anal. 23 (2013), no. 3, 1571–1605.