ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2012, т. 279, с. 20–30

УДК 517.55

Метод модельной поверхности: бесконечномерная версия[1]

В. К. Белошапка[2]

Поступило в ноябре 2011 г.

Метод модельной поверхности применяется к изучению вещественно аналитических подмногообразий комплексного гильбертова пространства. В основном результаты вполне аналогичны конечномерным, однако имеются особенности и специфические трудности. Одна из особенностей — существование модельной поверхности с алгеброй Леви–Танаки бесконечной длины.

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении голоморфных отображений вещественных подмногообразий комплексных пространств, как и во многих других областях геометрии, основные вопросы группируются по трем направлениям. Это классификация, инварианты и автоморфизмы. Среди подходов к этой тематике имеется *метод модельной поверхности.* В последние годы окончательно кристаллизовались структурные особенности этой теории.

Перечислим основные особенности.

• Данный подход является *локальным*, т.е. локальный анализ первичен по отношению к каким-либо глобальным выводам. Основным объектом изучения является не многообразие M, а его росток в точке M_ξ.

• Подход является *координатным.* Изначально предполагается, что поверхность, представляющая росток, вложена в комплексное пространство, которое в силу локальности рассмотрения можно отождествлять со стандартным линейным конечномерным комплексным пространством $\mathbb{C}^N$. Тогда можно полагать, что росток задан своим локальным уравнением. А сама модельная поверхность строится как некий нормализованный младший член уравнения ростка.

• Основой локальной техники являются *вычисления со степенными рядами*, сходящимися или формальными.

• При изучении автоморфизмов первичным объектом является алгебра Ли ростков голоморфных векторных полей, касательных ростку многообразия, т.е. *алгебра Ли* инфинитезимальных автоморфизмов ростка. Выводы относительно совокупности порожденных этими полями голоморфных автоморфизмов ростка делаются позже на основании информации о структуре алгебры.

Этот общий взгляд на данную теорию позволяет заключить, что ее особенности — это адаптированные к специфике задачи особенности дифференциального исчисления, основой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00495-а и 11-01-12033-офи-м-2011).

[2]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: vkb@strogino.ru

которого, безусловно, является координатный анализ “в малом”. При том что теория ориентирована на решение геометрических задач (голоморфная геометрия вещественных подмногообразий комплексного пространства), она представляет собой аналитическую альтернативу современным бескоординатным геометрическим методам.

Дадим краткий очерк метода.

• Каждому ростку M_ξ ставится в соответствие его модельная поверхность $Q(M_\xi)$. Модельная поверхность — это голоморфно однородная вещественно алгебраическая поверхность.

• Формулируется и доказывается простой критерий конечномерности $\operatorname{aut} Q$ — алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов модельной поверхности Q — условие полной невырожденности.

• Дается описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов модельной поверхности Q. Векторные поля оказываются полиномиальными, соответствующая этой алгебре Ли группа преобразований $\operatorname{Aut} Q$ оказывается группой Ли, действующей во всем пространстве бирациональными преобразованиями ограниченной степени.

• Доказывается, что голоморфная эквивалентность ростков порождает линейную эквивалентность их модельных поверхностей. В частности, задача классификации модельных поверхностей погружается в алгебраический контекст теории инвариантов.

• Доказывается теорема вложения, т.е. строится каноническое точное представление стабилизатора точки как подалгебры Ли автоморфизмов ростка $\operatorname{aut}_\xi M_\xi$ в стабилизаторе его модельной поверхности $\operatorname{aut}_0 Q(M_\xi)$.

А теперь посмотрим, во что трансформируется эта теория при замене ее основного структурного элемента — пространства $\mathbb{C}^N$ на какое-либо другое пространство. В данной работе в качестве базового пространства мы возьмем комплексное сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$.

Основным объектом нашего рассмотрения будет росток M_ξ вещественно аналитического гильбертова подмногообразия M комплексного гильбертова пространства в точке ξ. Начнем с линейных объектов. В дальнейшем будем полагать, что все рассматриваемые подпространства замкнуты, линейны и полилинейные формы непрерывны, при этом в число гильбертовых пространств включаются и конечномерные.

Пусть H — вещественное гильбертово пространство, $\mathcal{H}$ — его комплексификация. В $\mathcal{H}$ имеется оператор комплексной структуры — оператор умножения на мнимую единицу $v \to iv$. И мы можем написать $\mathcal{H} = H \oplus iH$. Пусть $\mathcal{H}\mathbb{R}$ — овеществление $\mathcal{H}$, т.е. то же самое $\mathcal{H}$, но над полем вещественных констант. Его можно отождествить с $H \oplus H$. Пусть L — подпространство в $\mathcal{H}\mathbb{R}$. Подпространство L называется *порождающим*, если $L + iL = \mathcal{H}\mathbb{R}$, т.е. замыкание линейной оболочки L и iL совпадает с $\mathcal{H}\mathbb{R}$. Обозначим $L \cap iL$ через L_{c}. Ясно, что L_{c} — комплексное подпространство в $\mathcal{H}$. Пусть N — некоторое прямое дополнение L_{c} до L. Тогда то, что подпространство L порождающее, означает, что имеет место прямое разложение $\mathcal{H}\mathbb{R} = (L_{\mathrm{c}})\mathbb{R} \oplus N \oplus iN$, а также $\mathcal{H} = L \oplus N\mathbb{C}$, где $N\mathbb{C} = N \oplus iN$. Умножение на i устанавливает изоморфизм дополнения L_{c} до L и дополнения L до $\mathcal{H}\mathbb{R}$. Типом порождающего подпространства L будем называть пару (n, K), где n — это размерность L_{c} как комплексного подпространства, а K — коразмерность L в $\mathcal{H}\mathbb{R}$. Оба параметра могут принимать как конечные, так и бесконечные значения.

Пусть f — отображение области D комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$ в другое такое пространство $\mathcal{H}_2$. Мы говорим, что f *голоморфно*, если в некоторой замкнутой круговой окрестности каждой точки a отображение может быть представлено в виде суммы ряда

$$f(z) = f_0 + f_1(z-a) + f_2(z-a, z-a) + \ldots + f_m(z-a, \ldots, z-a) + \ldots,$$

где f_m — непрерывная симметрическая полилинейная форма от m векторных переменных из $\mathcal{H}_1$ со значениями в $\mathcal{H}_2$, причем ряд сходится по норме пространства $\mathcal{H}_2$. То, что окрестность круговая, означает, что вместе со всякой своей точкой z она содержит точки вида $a + t(z - a)$, где t — комплексное число, $|t| \le 1$. Это определение эквивалентно следующему: отображение f в любой точке D имеет полный дифференциал, который представляет собой непрерывное комплексно линейное отображение $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. Если в первом определении заменить пространства и ряды на вещественные, то такое отображение называется *вещественно аналитическим*. Отображение в одномерное пространство $\mathbb{C}^1$ называется *голоморфной функцией* [5].

Ряд, который фигурирует в определении голоморфного или вещественно аналитического отображения, — это ряд по однородным компонентам, где однородность понимается так: если $t \in \mathbb{C}$ и мы сделаем преобразование $z \to tz$, то f_m умножится на t^m. Пусть пространство, на котором определены формы, представлено в виде прямой суммы, которая порождает представление переменного вида $z = z_1 + \ldots + z_s$. Тогда каждому слагаемому можно присвоить определенный вес $[z_j] = \mu_j$ и однородность f_m можно понимать так, что множитель t^m эта компонента получает после преобразования $z_1 \to t^{\mu_1} z_1, \ \ldots, \ z_s \to t^{\mu_s} z_s$. В этом случае говорим о *весовых компонентах*.

Пусть M_ξ — росток вложенного вещественно аналитического подмногообразия пространства $\mathcal{H}\mathbb{R}$. Пусть L — касательное пространство к ростку в ξ. Мы будем предполагать, что L — порождающее подпространство типа (n, K), в этом случае говорим, что M_ξ — *порождающий росток типа* (n, K). Все комплексное пространство распадается в прямую сумму $\mathcal{H} = L \oplus N\mathbb{C}$, а в соответствии с этим разложением каждый элемент пространства представлен в виде $z + w$. Поменяем обозначения: $L_{\mathrm{c}} = H_z$, $N\mathbb{C} = H_w$, теперь $z \in H_z$, $w = u + iv \in H_w$, $u \in N$, $v \in N$. Будем полагать, что ξ — начало координат (этого можно добиться сдвигом). Теперь в окрестности начала координат пространства $\mathcal{H} = H_z \oplus H_w$ росток может быть задан уравнением

$$v = F(z, \bar{z}, u),$$

где F — вещественно аналитическое отображение окрестности начала координат пространства $(H_z)\mathbb{R} \oplus (H_z)\mathbb{R} \oplus N$ в пространство N, причем как F, так и dF в начале координат равны нулю. Это прямое следствие теоремы о неявном отображении. При этом можно пользоваться вещественными переменными (x, y), где $z = x + iy$, а можно формальными переменными $(z, \bar{z})$, имея при этом в виду, что F — вещественное отображение, т.е. $\overline{F(z, \bar{z}, u)} = F(\bar{z}, z, u)$.

2. ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ, $K = 1$

Рассмотрим сначала случай коразмерности 1. Итак, $n \le \infty$, $K = 1$, т.е. речь идет о ростке типа $(\infty, 1)$ вещественно аналитической гиперповерхности Γ в комплексном гильбертовом пространстве. Пространство имеет вид прямой суммы $\mathcal{H} = H_z \oplus \mathbb{C}$, при этом координатами будем называть пару (z, w), где z — вектор пространства H_z, а $w = u + iv$ — комплексное число. Уравнение ростка имеет вид $v = F(z, \bar{z}, u)$, где F — вещественнозначная вещественно аналитическая в окрестности начала координат функция, причем F и dF обращаются в нуль в начале координат. Назначим веса переменных следующим образом: $[z] = 1$, $[w] = [u] = 2$. Тогда уравнение ростка можно записать так:

$$v = F_{2,0,0}(z, z) + F_{1,1,0}(z, \bar{z}) + F_{0,2,0}(\bar{z}, \bar{z}) + O(3), \tag{1}$$

где слагаемые — это полилинейные формы своих переменных, а $O(m)$ означает сумму форм веса m и выше. В силу вещественности F форма $F_{1,1,0}(z, \bar{z})$ эрмитова; введем для нее обозначение $\langle z, \bar{z} \rangle$, а сумма $F_{2,0,0}(z, z) + F_{0,2,0}(\bar{z}, \bar{z}) = 2 \operatorname{Re} F_{2,0,0}(z, z)$. Тогда после треугольно-квадратичной замены $z \to z$, $w \to w + iF_{2,0,0}(z, z)$ уравнение примет вид

$$v = \langle z, \bar{z} \rangle + F_3(z, \bar{z}, u) + F_4(z, \bar{z}, u) + \ldots \tag{2}$$

Квадратичная гиперповерхность (квадрика) $Q = \{v = \langle z, \bar{z}\rangle\}$ — это и есть модельная поверхность данного типа, при этом форма $\langle z, \bar{z}\rangle$ называется *формой Леви гиперповерхности* Γ *в начале координат*. Такая форма называется *невырожденной*, если у нее нет ядра, т.е. соотношение $\langle z, \bar{a}\rangle = 0$ может быть выполнено для всех z только в случае, когда $a = 0$. В этом случае росток гиперповерхности также называется *невырожденным*.

Вещественные векторные поля на пространстве $\mathcal{H}$ можно записывать в следующей символически-координатной форме:

$$2\,\mathrm{Re}\biggl(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + g(z,w)\frac{\partial}{\partial w}\biggr),$$

где коэффициент f принимает значения в H_z, а g — в $\mathbb{C}$. Каждое такое поле порождает локальную однопараметрическую группу преобразований пространства $\mathcal{H}$, причем если f и g голоморфны, то поле порождает однопараметрическую группу голоморфных преобразований пространства [6]. Такие векторные поля называются голоморфными. Вещественное поле есть сумма голоморфного и антиголоморфного слагаемых, каждое из них позволяет сопряжением получить второе и восстановить все поле. В силу этого, выписывая поля, для краткости будем писать только голоморфную составляющую. Голоморфные поля можно записывать в виде суммы слагаемых вида

$$f_\alpha(z,\dots,z)w^\beta\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{и} \qquad g_\gamma(z,\dots,z)w^\delta\frac{\partial}{\partial w},$$

где f есть α-форма, а g есть γ-форма, присваивая дифференцированиям веса следующим образом:

$$\biggl[\frac{\partial}{\partial z}\biggr] = -1 \qquad \text{и} \qquad \biggl[\frac{\partial}{\partial w}\biggr] = -2.$$

Продолжаем весовое разложение с рядов на векторные поля, в результате чего алгебра Ли векторных полей становится градуированной алгеброй Ли, разложение которой имеет вид $g = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + \dots$ В соответствии с этим каждое векторное поле может быть разложено по своим градуированным компонентам $X = X_{-2} + X_{-1} + X_0 + X_1 + \dots$

Сформулируем пять утверждений.

(а) Если поле $X = X_{-2} + X_{-1} + X_0 + X_1 + \dots$ принадлежит $\operatorname{aut} Q$, то этой алгебре принадлежит каждая его компонента, $X_j \in \operatorname{aut} Q$.

(б) Если форма $\langle z, \bar{z}\rangle$ вырождена, то в разложении $g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + \dots$ алгебры $\operatorname{aut} Q$ по компонентам содержатся ненулевые компоненты всех весов. Если же форма $\langle z, \bar{z}\rangle$ невырожденна, то ее разложение имеет вид $\operatorname{aut} Q = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2$.

(в) Если форма $\langle z, \bar{z}\rangle$ невырожденна, компоненты имеют следующее явное описание:

$$\begin{aligned}
g_{-2} &= \biggl\{2\,\mathrm{Re}\biggl(q\frac{\partial}{\partial w}\biggr)\biggr\},\\
g_{-1} &= \biggl\{2\,\mathrm{Re}\biggl(p\frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \bar{p}\rangle\frac{\partial}{\partial w}\biggr)\biggr\},\\
g_0 &= \biggl\{2\,\mathrm{Re}\biggl(Cz\frac{\partial}{\partial z} + \rho w\frac{\partial}{\partial w}\biggr)\biggr\},\\
g_1 &= \biggl\{2\,\mathrm{Re}\biggl(\bigl(aw + 2i\langle z, \bar{a}\rangle z\bigr)\frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \bar{a}\rangle w\frac{\partial}{\partial w}\biggr)\biggr\},\\
g_2 &= \biggl\{2\,\mathrm{Re}\biggl(rwz\frac{\partial}{\partial z} + rw^2\frac{\partial}{\partial w}\biggr)\biggr\},
\end{aligned}$$

где $q, r \in \mathbb{R}$, $p, a \in H_z$, C — непрерывный линейный оператор на H_z и вещественное число ρ связаны соотношением $2\,\mathrm{Re}\langle Cz, \bar z\rangle = \rho\langle z, \bar z\rangle$.

Подалгебре $g_- = g_{-2} + g_{-1}$ соответствует подгруппа

$$\mathrm{Aut}_- Q = \bigl\{z \to z + p,\ w \to w + 2i\langle z, \bar p\rangle + (q + i\langle p, \bar p\rangle)\bigr\},$$

транзитивно действующая на Q аффинными преобразованиями пространства. Эта подгруппа известна в конечномерном случае как группа Гейзенберга.

Подалгебре $\mathrm{aut}_0 Q = g_0 + g_1 + g_2$ соответствует подгруппа автоморфизмов Q, сохраняющих неподвижным начало координат, — стабилизатор начала координат. Подалгебра g_0 порождает в стабилизаторе подгруппу линейных автоморфизмов, которая является связной компонентой группы $\mathrm{AutL}\, Q$ всех линейных автоморфизмов Q, сохраняющих начало координат. Эта группа имеет вид $z \to Cz$, $w \to \rho w$, где C — непрерывный обратимый линейный оператор на пространстве H_z, т.е. $C \in \mathrm{GL}(H_z)$, удовлетворяющий соотношению $\langle Cz, \overline{Cz}\rangle = \rho\langle z, \bar z\rangle$ при некотором ненулевом вещественном множителе ρ. При этом g_0 является алгеброй Ли этой линейной группы.

Подалгебре $g_+ = g_1 + g_2$ соответствует подгруппа $\mathrm{Aut}_+ Q$, которую составляют нелинейные автоморфизмы Q, оставляющие начало координат неподвижным. Группа $\mathrm{Aut}_+ Q$ состоит из дробно-линейных преобразований $\mathcal{H}$ вида

$$(z, w) \to \frac{(z + aw, w)}{1 - \bigl(2i\langle z, \bar a\rangle + (r + i\langle a, \bar a\rangle)w\bigr)}.$$

Здесь следует сделать общее замечание. В конечномерной ситуации, т.е. когда основное пространство было конечномерным, каждая градуированная компонента была также конечномерной. Поэтому конечномерность алгебры была эквивалентна тому, что в разложении $\mathrm{aut}\, Q = \sum g_j$ присутствует лишь конечное число компонент, отличных от нуля (конечная градуированность). Этому утверждению можно придать другую форму, а именно: элементы $\mathrm{aut}\, Q$ — это поля с полиномиальными коэффициентами ограниченной степени. В этом случае разложение имеет вид $\mathrm{aut}\, Q = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + \ldots + g_d$, где d — номер старшей ненулевой компоненты. Если же конечномерное пространство мы заменяем бесконечномерным, то параметры формально остаются теми же, но при этом перестают быть конечномерными. Так, например, параметры p и a, которые были векторами конечномерного пространства, становятся элементами H_z, параметр C, который был линейным оператором на конечномерном пространстве, — теперь линейный оператор на H_z. Поэтому при рассмотрении бесконечномерных ситуаций естественным аналогом конечномерности является *конечная градуированность*.

(г) Пусть имеются два ростка $\Gamma^1_{\xi^1}$, $\Gamma^2_{\xi^2}$ и голоморфное обратимое отображение ϕ первого на второй, $\phi\bigl(\Gamma^1_{\xi^1}\bigr) = \Gamma^2_{\xi^2}$, $\phi(\xi) = \widetilde{\xi}$. Тогда линейная часть (дифференциал) отображения ϕ в точке ξ^1 имеет вид

$$z \to Cz + aw, \qquad w \to bz + \rho w.$$

Запишем локальные уравнения ростков в виде

$$v = \langle z, \bar z\rangle^1 + O(3) \qquad \text{и} \qquad v = \langle z, \bar z\rangle^2 + O(3).$$

Тот факт, что данное отображение переводит первую поверхность во вторую, можно записать в виде некоторого тождества. Отделяя в нем компоненты веса 1 и 2, получаем, что $b = 0$ и

$$\langle z, \bar z\rangle^2 = \rho\langle C^{-1}z, \overline{C^{-1}z}\rangle^1. \tag{3}$$

А это означает, что линейное отображение $z \to Cz$, $w \to \rho w$ переводит первую модельную поверхность $Q^1 = \{v = \langle z, \bar z\rangle^1\}$ во вторую $Q^2 = \{v = \langle z, \bar z\rangle^2\}$, т.е. голоморфная эквивалентность ростков порождает линейную эквивалентность их модельных поверхностей.

(д) Пусть $X = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots$ — поле из $\operatorname{aut}_0 \Gamma_0$, где $\Gamma = \{v = \langle z, \bar z\rangle + O(3)\}$ — невырожденная гиперповерхность, а $Q = \{v = \langle z, \bar z\rangle\}$ — ее модельная поверхность. Тогда отображение $\psi\colon\ X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots \to X_0 + X_1 + X_2$ является точным представлением $\operatorname{aut}_0 \Gamma_0$ в $\operatorname{aut}_0 Q$. В частности, это дает возможность утверждать, что отображения невырожденных ростков однозначно определяются своей 2-струей.

Итак, все доказательства переносятся без изменений. Отметим, что бесконечномерный случай отличается от конечномерного только тем, что вместо утверждения о конечномерности алгебры Ли мы говорим о конечности ее градуированного разложения.

3. КВАДРИКИ, $l = 2$

Пусть теперь дополнение H_w имеет произвольную конечную или бесконечную размерность K. Переменная w из скалярной становится векторной, конечно- или бесконечномерной. Эрмитова форма $\langle z, \bar z\rangle$ теперь также является формой со значениями в вещественном гильбертовом пространстве N.

Что изменится в формулировках утверждений (а)–(д)?

Утверждения (а) и (г) переносятся без изменений. Так же, т.е. дословно, переносятся утверждения (б) и (д), но при этом критерий конечномерности получает следующую редакцию.

Форма называется невырожденной при выполнении двух, вообще говоря, независимых условий.

(1) *Отсутствие ядра, т.е. соотношение $\langle z, \bar a\rangle = 0$ может быть выполнено для всех z только в случае, когда $a = 0$.*

(2) *Полномерность образа, т.е. если α — линейный функционал в N и $\alpha(\langle z, \bar z\rangle) = 0$ для всех z из H_z, то $\alpha = 0$.*

Если K конечно, то второе условие означает линейную независимость координатных эрмитовых форм.

Для того чтобы получить утверждение (б), можно предложить следующую модификацию конечномерного рассуждения.

Доказательство утверждения (б). Записываем условие на голоморфное касательное векторное поле

$$2\operatorname{Re}\biggl(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + g(z,w)\frac{\partial}{\partial w}\biggr)$$

и получаем соотношение

$$\operatorname{Im} g(z, u + i\langle z, \bar z\rangle) = 2\operatorname{Re}\langle f(z, u + i\langle z, \bar z\rangle), \bar z\rangle. \tag{4}$$

Записываем при этом коэффициенты поля в виде суммы компонент $f(z,w) = \sum f_j(z,w)$, $g(z,w) = \sum g_j(z,w)$. Приравнивая компоненты (4) бистепеней $(j,0)$ по $(z,\bar z)$, из невырожденности эрмитовой формы получаем $f(z,u) = a(u) + C(u)z + A(u,z,z)$, $g(z,u) = b(u) + 2i\langle z, \bar a(u)\rangle$, где Cz линейно по z, а A — квадратичная форма от z. Подставляя эти выражения в (4), получаем

$$\begin{gathered} \langle A(u,z,z), \bar z\rangle = 2i\langle z, \Delta\bar a(u)\rangle\langle z, \Delta^2\bar a(u)\rangle, \qquad \operatorname{Im} b(u) = 0, \qquad \Delta^3 b(u) = 0, \\ 2\operatorname{Re}\langle C(u)z, \bar z\rangle = \Delta b(u), \qquad 2\operatorname{Im}\langle C(u)z, \bar z\rangle = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где Δ — значение дифференциала по u на форме $\langle z, \bar z\rangle$, т.е. $\Delta\phi(u) = \phi'_u(u)(\langle z, \bar z\rangle)$. Из полученных соотношений нетрудно вывести, что

$$\langle \Delta^2 C(u)z, \bar z\rangle = 0. \tag{6}$$

Теперь, пользуясь тривиальностью ядра формы $\langle z, \bar{z}\rangle$, строим расширяющуюся последовательность конечномерных подпространств пространства Z

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots Z_j \subset \ldots$$

таких, что сужение эрмитовой формы $\langle z, \bar{z}\rangle$ на каждое из них невырожденно и их замыкание есть всё Z. Этим подпространствам будет соответствовать расширяющаяся последовательность конечномерных подпространств пространства N

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots N_j \subset \ldots,$$

где N_j — линейная оболочка образа пространства Z_j под действием отображения $z \mapsto \langle z, \bar{z}\rangle$. Замыкание этих подпространств в силу второго условия невырожденности формы дает всё N. Стандартное рассуждение, основанное на теореме об экспоненциальном представлении, позволяет из (6) получить, что ограничение $C(u)z$ на подпространство $Z_j \oplus N_j$ линейно зависит от u. Теперь, переходя к пределу и пользуясь непрерывностью, получаем, что это верно и для $Z \oplus N$. Далее стандартное рассуждение позволяет получить, что a линейно по u, A от u не зависит, а b зависит от u квадратично. $\square$

В описание алгебры Ли модельной поверхности, т.е. в утверждение (в), следует внести изменения, которые, впрочем, для бесконечномерной ситуации формально совпадают с теми, что возникают в конечномерной при $K > 1$. А именно:

$$\begin{aligned}
g_{-2} &= \left\{2\operatorname{Re}\left(q\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\},\\
g_{-1} &= \left\{2\operatorname{Re}\left(p\frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \bar{p}\rangle\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\},\\
g_0 &= \left\{2\operatorname{Re}\left(Cz\frac{\partial}{\partial z} + \rho w\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\}, \qquad \text{где} \quad 2\operatorname{Re}\langle Cz, \bar{z}\rangle = \rho\langle z, \bar{z}\rangle,\\
g_1 &= \left\{2\operatorname{Re}\left((aw + A(z,z))\frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \bar{a}w\rangle\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\}, \qquad \text{где} \quad \langle A(z,z), \bar{z}\rangle = 2i\langle z, \bar{a}\langle z, \bar{z}\rangle\rangle,\\
g_2 &= \left\{2\operatorname{Re}\left(B(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + r(w,w)\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\}, \qquad \text{где} \quad \operatorname{Re}\langle B(z,u), \bar{z}\rangle = r(\langle z, \bar{z}\rangle, u),\\
&\qquad\qquad \operatorname{Im}\langle B(z, \langle z, \bar{z}\rangle), \bar{z}\rangle = 0.
\end{aligned}$$

При этом параметры имеют очевидный смысл: $q \in N$, $p \in H_z$, $C \in \mathrm{gl}(H_z)$, $\rho \in \mathrm{gl}(N)$, параметр A — квадратичная форма на $H_z \oplus H_z$ со значениями в H_z, параметр B — билинейная форма на $H_z \oplus H_w$ со значениями в H_w, параметр r — квадратичная форма на $N \oplus N$ со значениями в N.

Утверждения о строении групп преобразований $\operatorname{Aut}_- Q$ и $\operatorname{Aut}_0 Q$ остаются без изменений. Однако группа $\operatorname{Aut}_+ Q$ уже не является подгруппой группы проективных преобразований. Можно показать, что любое преобразование из $\operatorname{Aut}_+ Q$ выписывается через операторы, обратные к полиномиальным преобразованиям ограниченной степени. Рассуждение, которое позволяет это показать, принадлежит, по-видимому, В. Каупу [9], а к описанию автоморфизмов квадратичных модельных поверхностей его первым применил А. Туманов [8, 10]. Если коразмерность конечна, то, как и в конечномерном случае, отсюда следует бирациональность с ограничением на степень, но для бесконечной коразмерности этого утверждать уже нельзя.

4. МОДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ $l \geq 3$

В конечномерном случае, т.е. для конечного n, имелось естественное ограничение на применимость таких квадратичных модельных поверхностей. Это связано с тем, что размерность пространства эрмитовых форм на комплексном пространстве размерности n равна n^2. И если $K > n^2$, то для такого типа ростков нет невырожденных модельных поверхностей. Если же z — бесконечномерная переменная, то для существования невырожденных квадратичных (т.е. описанных выше) модельных поверхностей такого формального препятствия нет. Однако и здесь может иметь место явление, аналогичное нарушению неравенства $K \leq n^2$. А именно может случиться, что замыкание *всех* эрмитовых форм есть собственное подпространство в пространстве вещественного дополнения N. Тогда мы обозначаем это подпространство N_2, его комплексификацию H_{w_2}, соответствующую переменную $w_2 = u_2 + iv_2$ и переходим к следующему шагу. Соответствующее построение приведено в [2]. Это построение носит рекурсивный характер. Количество шагов описывается новым параметром l. Каждый шаг, т.е. увеличение l на единицу, включает в себя

- подключение к рассмотрению пространства однородных вещественных (скалярных, не векторнозначных) полиномов следующего $(l+1)$-го веса $\mathcal{F}_{l+1}$;
- построение некоторого прямого разложения этого пространства $\mathcal{F}_{l+1} = \mathcal{R}_{l+1} \oplus \mathcal{N}_{l+1}$, введение новой переменной $w_{l+1} = u_{l+1} + iv_{l+1}$, которая является вектором пространства $H_{w_{l+1}}$ — комплексификации пространства $\mathcal{N}_{l+1}$ и которой приписывается вес $l+1$, причем $v_{l+1} \in \mathcal{N}_{l+1}$. А также осуществляется следующий шаг приведения локальных уравнений ростка, дописываются уравнения, соответствующие новой группе переменных. В результате уравнения принимают вид
$$v_2 = F_2 + O(3), \quad \ldots, \quad v_{l+1} = F_{l+1} + O(l+2), \qquad \widetilde{v} = \widetilde{F},$$
где $\widetilde{v}$ есть координата пространства $\widetilde{N}$ — прямого дополнения $\mathcal{N}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{N}_l \oplus \mathcal{N}_{l+1}$ до N;
- проверку того, что мы не исчерпали всего пространства N. Если $\widetilde{N} = 0$, то процесс останавливается, если $\widetilde{N} \neq 0$, то процесс идет дальше.

Выпишем то, что получается при $l = 7$. При этом для краткости обозначений форму, имеющую степень a по x и b по y, обозначаем $\langle x^a y^b \rangle$:
$$\begin{aligned}
&v_2 = \langle z\bar{z} \rangle,\\
&v_3 = \langle z^2\bar{z} \rangle + \langle z\bar{z}^2 \rangle,\\
&v_4 = \langle z^3\bar{z} \rangle + \langle z^2\bar{z}^2 \rangle + \langle z\bar{z}^2 \rangle,\\
&v_5 = \langle z^4\bar{z} \rangle + \langle z^3\bar{z}^2 \rangle + \langle z^2\bar{z}^3 \rangle + \langle z\bar{z}^4 \rangle + \langle z^2\bar{z}u_2 \rangle + \langle z\bar{z}^2u_2 \rangle,\\
&v_6 = \langle z^5\bar{z} \rangle + \langle z^4\bar{z}^2 \rangle + \langle z^3\bar{z}^3 \rangle + \langle z^2\bar{z}^4 \rangle + \langle z\bar{z}^5 \rangle + \langle z^3\bar{z}u_2 \rangle + \langle z^2\bar{z}^2u_2 \rangle + \langle z\bar{z}^3u_2 \rangle,\\
&v_7 = \langle z^6\bar{z} \rangle + \langle z^5\bar{z}^2 \rangle + \langle z^4\bar{z}^3 \rangle + \langle z^3\bar{z}^4 \rangle + \langle z^2\bar{z}^5 \rangle + \langle z\bar{z}^6 \rangle + \langle z^4\bar{z}u_2 \rangle + \langle z^3\bar{z}^2u_2 \rangle +\\
&\qquad + \langle z^2\bar{z}^3u_2 \rangle + \langle z\bar{z}^4u_2 \rangle + \langle z^2\bar{z}u_2^2 \rangle + \langle z\bar{z}^2u_2^2 \rangle + \langle z^3\bar{z}u_3 \rangle + \langle z^2\bar{z}^2u_3 \rangle + \langle z\bar{z}^3u_3 \rangle.
\end{aligned}$$

В конечномерном случае, т.е. когда и n, и K конечны, этот процесс с необходимостью останавливался после выполнения конечного числа шагов. Дело в том, что размерности пространств N_j быстро растут. Так, $\dim N_2 = n^2$, $\dim N_3 = n^2(n+1)$ и т.д. Если же $K = \infty$, то процесс может не остановиться. Это значит, что в правых частях нормализованных уравнений ростка будут полиномы всех весов. В этом случае мы полагаем, что $l = \infty$. При этом если

n конечно, то конечны и размерности всех дополнений N_j и для бесконечного значения K параметр l уже и не может быть конечен.

Во что теперь трансформируются основные утверждения? Утверждение (a) переносится без изменений.

(a) Если поле $X = X_{-2} + X_{-1} + X_0 + X_1 + \dots$ принадлежит $\operatorname{aut} Q$, то этой алгебре принадлежит каждая его компонента, $X_j \in \operatorname{aut} Q$.

При $l > 2$ условие невырожденности упрощается. В этой ситуации уравнения модельной поверхности начинаются с уравнения вида $v_2 = \langle z, \bar{z} \rangle$, где форма $\langle z, \bar{z} \rangle$ принимает значение в пространстве $\mathcal{N}_2$, изоморфном пространству всех скалярных эрмитовых форм, наличие нетривиального ядра по отношению к формам всех весов означает, в частности, что для некоторого ненулевого $a \in H_z$ имеет место условие $\langle z, \bar{a} \rangle = 0$. Пространство H_z представим в виде прямой суммы одномерного пространства, порожденного a, и некоторого дополнения, соответственно всякий вектор из H_z можно записать в виде $z = z_1 + z_2$, при этом форма получает разложение вида $\langle z, \bar{z} \rangle = \langle z_1, \bar{z}_1 \rangle + \langle z_1, \bar{z}_2 \rangle + \langle z_2, \bar{z}_1 \rangle + \langle z_2, \bar{z}_2 \rangle$. Теперь рассмотрим на N_2 ненулевой линейный функционал α такой, что $\alpha(\langle z_2, \bar{z}_2 \rangle) = 0$, тогда $\alpha(\langle z, \bar{z} \rangle) = 0$, а это есть нарушение второго условия невырожденности. Таким образом, при $l > 2$ первое условие невырожденности (отсутствие ядра) поглощается вторым условием (полномерность образа). Итак, теперь условие невырожденности модельной поверхности $v = \Phi(z, \bar{z}, u)$ — это условие полномерности образа.

Росток $v = F(z, \bar{z}, u)$ называется *невырожденным*, если невырожденна полученная из него в результате описанной выше процедуры модельная поверхность $v = \Phi(z, \bar{z}, u)$. *Невырожденность модельной поверхности означает полномерность образа отображения* Φ, *т.е. если* $\alpha(\Phi(z, \bar{z}, u)) = 0$, *то этот линейный функционал на* N *равен нулю*. Если K конечно, то это просто условие линейной независимости координатных форм.

В соответствии с полученным при построении модельной поверхности весовым разложением все поля также получают весовые разложения. При этом следует различать случаи конечного и бесконечного l. Если l конечно, то разложение полей имеет вид

$$X = X_{-l} + X_{-l+1} + \dots + X_0 + X_1 + \dots,$$

ему соответствует разложение алгебры Ли модельной поверхности

$$\operatorname{aut} Q = g_{-l} + g_{-l+1} + \dots + g_0 + g_1 + \dots$$

Если же $l = \infty$, то это разложение неограничено и с отрицательной стороны.

Как обстоят дела с аналогами утверждений (б) и (в)?

Пусть g_- — сумма всех отрицательных компонент g. Группа $\operatorname{Aut}_- Q$, соответствующая этой подалгебре Ли, — это группа треугольно-полиномиальных преобразований пространства, которая действует на Q транзитивно, без неподвижных точек и может быть отождествлена с Q. Если l конечно, то $g_- = g_{-l} + \dots + g_{-1}$ и вес старшей компоненты полиномов из соответствующей группы равен $l - 1$. Если $l = \infty$, то степени полиномов в блоках неограниченно возрастают. Это группа, которая является естественным аналогом группы Гейзенберга.

Подалгебре g_0 соответствует AutL-подгруппа группы $\mathrm{GL}(H_z) \oplus \mathrm{GL}(N)$, которая выделяется условием $\Phi(Cz, \overline{Cz}, \rho u) = \rho \Phi(z, \overline{z}, u)$. Из этого следует, что ρ имеет блочную структуру, соответствующую разложению $N = N_2 \oplus \dots \oplus N_l$.

Ситуация с g_+ достаточно парадоксальна. Нет ни одного примера с $l \geq 3$, где $g_+ \neq 0$. Это относится как к конечномерной ситуации, так и к бесконечномерной. В некоторых конечномерных ситуациях тривиальность g_+ доказана. Так, например, она доказана И. Коссовским [7] для всех конечномерных модельных поверхностей при $l = 3$. То, что g_+ конечно градуирована, т.е. состоит из конечного числа компонент, доказано в предположении невырожденности для всех конечномерных ситуаций. Это является следствием из теоремы Д. Зайцева [11]. Ни теорема Коссовского, ни теорема Зайцева непосредственно на бесконечномерную ситуацию не переносятся. Однако непосредственный анализ определяющих уравнений, который содержится в [3] и [4], с помощью приема, описанного выше для $l = 2$, позволяет для бесконечномерной ситуации показать следующее. Для $l = 3$ подалгебра g_+ имеет вид $g_1 + \ldots + g_6$, а для $l = 4$ имеем $g_+ = g_1$. На самом деле в [4] утверждение $g_+ = g_1$ доказано для произвольного $l \geq 4$, но это сделано для "жестких" поверхностей, т.е. таких, что правые части их уравнений не содержат $u = \operatorname{Re} w$. И для таких поверхностей утверждение переносится и на бесконечномерную ситуацию. Но при $l \geq 5$ общая модельная поверхность этому условию не удовлетворяет. В теореме Зайцева ничего не говорится о градуированных компонентах. Это теорема об однозначной зависимости ростка голоморфного отображения от своей конечной струи. Основным предположением является конечность типа ростка поверхности. Основным инструментом является техника поверхностей Сегре и теорема о неявной функции. Если в бесконечномерной ситуации справедлив аналог теоремы Зайцева, то из него в силу (а) сразу же следует конечная градуированность. В теореме Зайцева дается оценка номера струи, для которой выполняется такая теорема единственности. Но эта оценка, доказанная для конечномерного пространства, растет с ростом размерности. Это как минимум вызывает сомнения в возможности адаптации доказательства Зайцева для бесконечномерной ситуации.

Итак, для невырожденной модельной поверхности можно сформулировать две гипотезы: минимальную и максимальную. При этом минимальная для конечномерного случая доказана, а максимальная открыта в обеих ситуациях.

Гипотеза-минимум. *Если l конечно, то g_+ конечно градуирована.*

Гипотеза-максимум. *Если $3 \leq l < \infty$ конечно, то $g_+ = 0$.*

(г) Это утверждение остается почти без изменений. А именно если имеется *голоморфная* эквивалентность ростков, то из линейной части этого отображения некоторым образом извлекается набор обратимых линейных операторов $C, \rho_2, \ldots, \rho_l$, которые, действуя на соответствующие переменные, дают *линейную* эквивалентность модельных поверхностей.

(д) При наличии конечной градуированности точное представление стабилизатора невырожденного ростка $\operatorname{aut}_0 M_0$ в стабилизаторе его модельной поверхности $\operatorname{aut}_0 Q$ строится так же,

$$\psi\colon\ X_0 + X_1 + \ldots + X_d + \ldots \to X_0 + \ldots + X_d.$$

Все эти утверждения для бесконечного l имеют те же формулировки, что и в конечномерной ситуации. Однако в конечномерной ситуации невозможно бесконечное значение l. Модельные поверхности с бесконечным значением параметра l — это новый объект, который требует внимания. Простейшая ситуация, дающая $l = \infty$, — это невырожденные поверхности с одномерной комплексной касательной $n = 1$ и бесконечной коразмерностью $K = \infty$.

В данной работе условие невырожденности приводится в чисто координатной форме. Однако это условие можно формулировать и в бескоординатной форме. Соответствия нашего условия невырожденности (полная невырожденность) некоторым бескоординатным условиям указаны в [2], бесконечномерная специфика никак на этих соответствиях не отражается. В частности, параметр l в этих терминах — это длина алгебры Леви–Танаки.

В данной работе мы обсудили лишь основные структурные составляющие данной теории. Имеется масса более специальных тем и построений, которые также можно перевести в бесконечномерную ситуацию [1]. Вот пара тем.

• Если пространства, в которых расположены поверхности, обладают некоторой дополнительной алгебраической структурой, то в таких пространствах возможна более специализированная теория. Например, если базовое вещественное гильбертово пространство H обладает структурой вещественной коммутативной алгебры, то возникает специфический класс квадрик, которые в конечномерном случае были рассмотрены в [12].

• В конечномерном случае квадратичные модельные поверхности коразмерности 2 были классифицированы и изучены в [13]. Как обстоят дела в случае $n = \infty$?

Основой данной теории является взаимодействие вещественной и комплексных структур, а также использование степенных рядов. Поэтому имеется масса возможностей для обобщений: переход от гильбертовых пространств к банаховым пространствам и далее к пространствам Фреше; рассмотрение некоммутативных ситуаций, например, подмногообразий в суперпространстве и т.д.

Благодарности. Эта работа была завершена в Канберре, в Национальном австралийском университете, куда автор был любезно приглашен профессором А. Исаевым.

Во время работы над статьей автор имел плодотворные обсуждения с О. Белошапкой, Е.А. Гориным, А. Исаевым, И. Коссовским и О.Г. Смоляновым, за что он им искренне благодарен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белошапка В.К.* Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации // УМН. 2002. Т. 57, №1. С. 3–44.
2. *Белошапка В.К.* Универсальная модель вещественного подмногообразия // Мат. заметки. 2004. Т. 75, №4. С. 507–522.
3. *Белошапка В.К.* Кубическая модель вещественного многообразия // Мат. заметки. 2001. Т. 70, №4. С. 503–519.
4. *Белошапка В.К.* Полиномиальные модели вещественных многообразий // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65, №4. С. 3–20.
5. *Mujica J.* Complex analysis in Banach spaces: Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions. Amsterdam: North-Holland, 1986. (North-Holland Math. Stud.; V. 120).
6. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
7. *Гаммель Р.В., Коссовский И.Г.* Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен "жесткости"// Тр. МИАН. 2006. Т. 253. С. 30–45.
8. *Туманов А.Е.* Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, №3. С. 651–659.
9. *Kaup W.* Einige Bemerkungen über polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten // Math. Ann. 1973. Bd. 204. S. 131–144.
10. *Isaev A., Kaup W.* Regularization of local CR-automorphisms of real-analytic CR-manifolds // J. Geom. Anal. 2012. V. 22, N 1. P. 244–260.
11. *Zaitsev D.* Germs of local automorphisms of real-analytic CR structures and analytic dependence on k-jets // Math. Res. Lett. 1997. V. 4, N 6. P. 823–842.
12. *Ežov V.V., Schmalz G.* A matrix Poincaré formula for holomorphic automorphisms of quadrics of higher codimension. Real associative quadrics // J. Geom. Anal. 1997. V. 8, N 1. P. 27–41.
13. *Шевченко С.Н.* Квадрики коразмерности два и их автоморфизмы // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, №4. С. 149–172.