Аналитическая сложность: развитие темы

Белошапка В.К.

24 мая 2012 г.

Аннотация

Изучается сложность аналитических функций двух переменных с точки зрения порядка сложности, который был предложен в работе [1]. Данная работа является продолжением этой статьи. Дана оценка сложности многочлена через степень. Разобраны примеры однородных и гармонических функций. Получена оценка сложности степенного ряда в терминах геометрии его носителя. Рассмотрены дифференциальные уравнения, определяющие классы сложности. Для полиномиальных отображений сложности один доказана гипотеза о якобиане. В связи с этим обсуждается сложность отображений плоскости.

[1] [2]

1.Введение

Для каждой аналитической функции двух переменных $z(x,y)$ определен ее *порядок сложности* - $N(z)$. Сложность можно определить по любому ростку, представляющему эту функцию. При аналитическом продолжении эта величина не меняется. Если росток зависит лишь от одного из переменных, полагаем $N(z)=0$. Если это не так, но росток можно представить в виде $z=c(a(x)+b(y))$, где (a,b,c) - ростки аналитических функций одного переменного, то $N(z)=1$, и так далее. Т.е. мы пишем, что $N(z)=n$, если z можно записать в виде $C(A(x,y)+B(x,y))$, где C - росток

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 11-01-00495-а и 11-01-12033-офи-м-2011

[2]119991 Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, Московский государственный университет, ГЗ, механико-математический факультет, vkb@strogino.ru

функции одного переменного, сложность A и B меньше n и нет такого представления с меньшим значением n. Возникает возрастающая система классов функций $Cl_0 \subset Cl_1 \subset Cl_2 \ldots$. В Cl_n попадают функции, чья сложность не превосходит n. Если функция не попала ни в один из этих классов, мы пишем, что $N(z) = \infty$. Если зафиксировать какую-нибудь область в двумерном пространстве, то в пространстве Фреше функций, голоморфных в этой области, подмножество функций конечной сложности - это множество 1-й категории Бэра (тонкое подмножество). Каждый класс задается дифференциально-алгебраическими соотношениями. Так Cl_0 задается условием $z'_x z'_y = 0$, а Cl_1 условием $(log(z'_x/z'_y))''_{xy} = 0$. Замена базовой бинарной операции $x+y$ на любое из трех оставшихся арифметических действий, в силу соотношения $xy = \exp(\log(x) + \log(y))$, не отражается на порядках сложности.

Можно отметить, что предложенный подход в некоторой мере аналогичен подходам, предложенным А.Островским [7] (система рангов) и Д.Григорьевым [5] (аддитивная сложность). В связи с этим можно отметить следующее. Имеется широкий спектр теорий сложности, ориентированных на математические объекты разной природы. Алгоритмическая сложность, топологическая сложность, сложность по Колмогорову, и т.д. К тому же, с этой, „сложностной“, точки зрения можно рассматривать множество математических характеристик: степень многочлена, размерность пространства, род поверхности, дифференциальный порядок уравнения, степень трансцендентности, ε-энтропию и т.д. И на теорию Галуа, и на теорию трансфинитных чисел Кантора можно смотреть как на некоторые теории сложности. Среди проблем Гильберта половину списка можно без натяжки рассматривать как проблемы сложности. Особо следует отметить 13-ю проблему [3]. Несмотря на значительное разнообразие математических объектов и подходов к оценке их сложности, можно отметить общие черты этих теорий.

(1) Конструирование сложного из простого с помощью базовых операций.

(2) Большой разрыв между верхними оценками сложности, которые даются легко и нижними, которые даются с большими усилиями.

(3) Шкалы сложностей простираются в бесконечность, но основной массив математических объектов умещается в пределах „прибрежной полосы“ объектов, чья сложность не превосходит 3. (Так, например, шкала трансфинитов уходит весьма далеко, но „почти вся“ математика обходится конечными, счетными и континуальными множествами).

Все эти особенности, некоторым образом, проявляются и в рассматриваемой здесь *теории аналитической сложности.*

2. Многочлены второй степени.

Ясно, что многочлены степени один имеют порядок сложности ноль или один.

Утверждение 1:
(a) Все многочлены степени два $z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$ имеют сложность не выше двух.
Такой многочлен имеет сложность не выше одного в трех случаях:
(b.1) если $b = 0$, при этом $z = a(x + \alpha)^2 + c(y + \beta)^2 + g$,
(b.2) если $a = c = 0$, при этом $z = b(x + \alpha)(y + \beta) + g$,
(b.3) если $ac - b^2 = dc - eb = 0$, при этом $z = (px + qy + r)^2 + s$.
Доказательство: В том, что сложность не выше двух нетрудно убедиться, приводя многочлен к канонческому виду. Уравнение первого класса для z принимает вид

$\Delta_1(z) = b(a^2c\, x^2 - ab^2\, x^2 - ac^2\, y^2 + b^2c\, y^2 - 2\, aeb\, x + 2\, acd\, x + 2\, bdc\, y - 2\, ace\, y + cd^2 - ae^2) = 0$

Приравниваем к нулю коэффициенты, решаем систему уравнений и получаем ответ.

Итак, картина такова: в 6-мерном пространстве многочленов степени не выше второй многочлены первого класса сложности это алгебраическое подмножество состоящее из трех неприводимых компонент: два линейных подпространства - коразмерности один и коразмерности два, а также подмногообразие коразмерности два, которое представляет собой пересечение двух квадратичных конусов. При этом картину из 6-мерной можно сделать 4-мерной. Исключим из рассмотрения свободный член f, который на сложности не отражается и перейдем к проективному пространству $\mathbf{CP}^4$ с однородыми координатми $(a : b : c : d : e)$.

Отметим также, что два описанных случая представления квадратичного многочлена формулой первого класса сложности базируются на процедуре выделения полного квадрата, а один на разложении его на множители.

3. Однородные функции.

Утверждение 2: Пусть $z(x, y)$ - однородная, степени k функция, тогда
(a) сложность z не превосходит двух,

(b) если $z(x,y)$ записать в виде $(xP(y/x))^k$, то z имеет сложность не выше единицы тогда и только тогда, когда P удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

t $\mathrm{P}^{(2)}(t)P'(t)^2P(t) - tP^{(2)}(t)^2P(t)^2 + 2t^2P^{(2)}(t)^2P(t)P'(t) + tP^{(3)}(t)P'(t)P(t)^2 - t^2P^{(3)}(t)P'(t)^2P(t) - P^{(2)}(t)P'(t)^2P(t)t + P^{(2)}(t)P'(t)P(t)^2 - P'(t)^3P(t) + P'(t)^3P(t) - t^2P'(t)^3P^{(2)}(t) = 0$

Доказательство: Оценка $N(z) \leq 2$ сразу следует из представления $(xP(y/x))^k$. Уравнение на P получаем из условия $(ln(z'_x/z'_y))''_{xy} = 0$, которое описывает первый класс.

Если однородность понимать в обобщенном смысле, а именно как $z(t^\alpha x, t^\beta y) = t^\gamma z(x,y)$, то оценка $N(z) \leq 2$, конечно, остается в силе.

Система Maple выдает общее решение полученного дифференциального уравнения на P в виде следующей элементарной функции

$$P(t) = \exp(-\frac{-C_3C_1 + \ln(\exp(-\ln(t)C_1) - \exp(C_1C_2)}{C_1})$$

т.е. общий вид однородной функции степени один первого класса сложности таков

$$z = x\exp(-\frac{-C_3C_1 + \ln(\exp(-\ln(y/x)C_1) - \exp(C_1C_2)}{C_1})$$

Это 3-параметрическое семейство не трудно преобразовать к более обозримому виду $z = (px^r + qy^r)^{1/r}$. Можно написать еще одно 3-параметрическое семейство таких функций $z = R\ (x^Py^Q)^{1/(P+Q)}$. Это семейство можно извлечь из решения дифференциального уравнения с помощью предельного перехода при $C_1 \to 0$. Этим двум семействам однородных функций степени $k = 1$ соответствуют два 3-параметрических семейства однородных функций произвольной степени

$$z_+ = (px^r + qy^r)^{k/r} \quad \text{и} \quad z_\times = R\ (x^P\ y^Q)^{k/(P+Q)},$$

которым соответствуют порождающие функции вида

$$P_+(t) = (p + q\ t^r)^{k/r} \quad \text{и} \quad P_\times(t) = R\ t^{\frac{k\ Q}{P+Q}},$$

Для того, чтобы функция $z_\times$ была полиномом нужно, чтобы значения

r и k были целыми неотрицательными, причем r было делителем k, тогда $P_1(t) = (p + q\ t^r)^s$, где $k = r\ s$. При этом $z = (p\ x^r + q\ y^r)^s$. Для того, чтобы функция z_+ была полиномом нужно, чтобы целыми неотрицательными были $m = \frac{k\,Q}{P+Q}$, $n = \frac{k\,P}{P+Q}$. При этом $P_+(t) = R\ t^m$ и $z = R\ x^m\ y^n$. Комплексные корни полинома P_+ лежат на окружности радиуса $|p/q|$ с центром в нуле в вершинах правильного r-угольника, тогда как единственный корень $P_\times$ это $t = 0$. Эта конфигурация получается из предыдущей предельным переходом при $p \to 0$ и можно считать, что это правильный многоугольник нулевого размера. Если нули полинома $P(t)$ не лежат в вершинах правильного многоугольника с центром в нуле, то полученный из него однородный полином имеет сложность два.

4. Гармонические функции.

Если $f(\zeta)$ - аналитическая функция комплексного переменного ζ, то, в соответствии с нашим определением она имеет сложность ноль. Но если мы будем рассматривать ее как функцию вещественных переменных $f(x+iy)$, то ее сложность оказывается равной единице. При таком подходе голоморфными функциями сложности ноль будут лишь постоянные. Если мы комплексифицируем переменные x и y, то сложность выражения $f(x+iy)$ останется единицей. Теперь пусть u - гармоническая, возможно многозначная, функция. Тогда локально имеет место представление $u = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = f(x+iy) + \bar{f}(x-iy)$, где $f(z)$ - голоморфна, откуда следует, что $N(z) \leq 2$. Гармонические функции первого класса - это функции, удовлетворяющие, кроме уравнения Лапласа, к тому же и уравнению первого класса. Это условие, записанное для f, выглядит довольно загадочно.

$$(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2})(\frac{\log(f'(z) - \bar{f}'(\bar{z}))}{\log(f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}))}) = 0$$

Однако из этого соотношения видно, что если $f(z)$ - решение, то $if(z)$ - тоже, поэтому если гармоническая функция $u = \mathrm{Re}f$ имеет сложность один, то сопряженная гармоническая функция $v = \mathrm{Im}f$ - тоже. В качестве примеров гармонических функций первого класса кроме линейных можно предложить вещественные и мнимые части следующих функций

$\mathrm{z}^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$,
$\log(z) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\,\mathrm{arctg}(y/x)$,
$exp(z) = \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y)$

Можно подойти с другой стороны. Запишем уравнение Лапласа для

$z = c(a(x) + b(y))$, получим

$$c''(a(x)+b(y))a'(x)^2+c'(a(x)+b(y))a''(x)+c''(a(x)+b(y))b'(y)^2+c'(a(x)+b(y))b''(y) = 0,$$

это соотношение можно продифференцировать как по x, так и по y. После чего в нашем распоряжении окажется три уравнения, линейных относительно (c', c'', c'''). В предположении, что функция c непостоянна мы можем утверждать, что определитель этой системы равен нулю. Этот определитель представляет собой произведение множителя $(a'(x)^2+b'(y)^2)$, который равен нулю только для постоянных (a, b) и выражения

$b'''(y)a'(x)^3 - a'''(x)b'(y)a'(x)^2 + 2a'(x)a''(x)^2b'(y) + a'(x)b'''(y))b'(y)^2 - 2a'(x)b''(y)^2b'(y) - a'''(x)b'(y)^3$,

которое, тем самым, равно нулю. Выразим из этого равенства $b'''(y)$, продифференцируем полученное соотношение по x, сократим ответ на $b(y)$, выразим из полученного равенства $b''(y)^2$, опять продифференцируем полученное соотношение по x, сократим ответ на $(a'(x)^2+b'(y)^2)^2$ и тогда получим требуемое соотношение на a.

$$F(a) = (a')^2a''a^{(5)} - (a')^2a'''a^{(4)} - 3(a'')^2a^{(4)}a' + 3(a'')^3a''' = 0$$

В силу симметрии между x и y такому же уравнению должна удовлетворять и функция b.

Прямое вычисление показывает, что $F(x^2) = 0$, но это и не противоречит нашим взглядам, действительно, у нас есть примеры x^2-y^2 и $\ln(x^2+y^2)$. Однако $F(x^3) = 3888x^3$, а это означает, что функция $z = c(x^3 + b(y))$ не является гармонической ни при каких непостоянных b и c. Можно предложить это утверждение, как задачу для суденческой олимпиады по анализу.

Итак, имеет место

Утверждение 3:

(a) все гармонические функции $u(x, y)$ имеют сложность не выше двух,
(b) для того, чтобы гармоническая функция $u(x, y) = f(x+iy)+\bar{f}(x-iy)$ имела сложность один, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right)\left(\frac{\log(f'(z) - \bar{f}'(\bar{z}))}{\log(f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}))}\right) = 0$$

(c) для того, чтобы функция первого класса сложности $z = c(a(x)+b(y))$ была гармонической, необходимо, чтобы функции a и b удовлетворяли обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$F(a(x)) = 0, \quad F(b(y)) = 0.$$

Пример с гармоническими функциями может быть обобщен следующим образом. Пусть D - однородный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами и $u(x, y)$ - решение уравнения $D(u) = 0$. Тогда линейной заменой переменных оператор может быть приведен к виду $D = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ или $D = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ откуда видно, что все решения имеют сложность не выше двух. В частности, эта оценка относится к решениям волнового уравнения $u_{yy} = u_{xx}$ (формула Даламбера).

5. Степенная геометрия.

Рассмотрим вопрос об оценке сложности аналитической функции с точки зрения степенной геометрии. Пусть функция задана степенным рядом или рядом Лорана $z(x, y) = \sum z_{ij} x^i y^j$. Нетрудно видеть, что такой ряд общего положения имеет бесконечную сложность. Условие общности положения - это условие уклонения от счетного набора алгебраических соотношений на коэффициенты. Пусть $\mathbf{Z}$ - это множество целых чисел, т.е. $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, тогда носитель степенного ряда $\mathrm{supp}(z)$ - это подмножество декартова квадрата $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, состоящего из тех пар (i, j), которым соответствуют ненулевые значения z_{ij}. Приведем некоторые условия на носитель ряда, позволяющие оценить сложность $z(x, y)$. В основе этих оценок лежат два очевидных наблюдения.

(1) Пусть (p, q) - ненулевой вектор из $\mathbf{Z}^2$. Ему соответствует прямая, проходящая через начало координат, для которой он является направляющим. Если носитель ряда принадлежит этой прямой, то можно написать, что $z = c(x^p y^q)$, откуда следует, что $N(z) \leq 1$. Если носитель лежит на прямой, которая не проходит через начало координат, то можно написать $z = c(x^p y^q) x^i y^j$, и мы видим, что $N(z) \leq 2$.

(2) Если носитель ряда можно представить в виде объединения двух подмножеств $M_1 \cup M_2$ двумерной целочисленной решетки, так что все ряды с носителями на M_1 и на M_2 имеют сложность не выше n, то исходный ряд имеет сложность не выше $n + 1$.

Самый экономный способ кодирования - это способ деления пополам. Т.Садыков [6] обратил внимание автора на уместность применения этого способа в данной ситуации. Пусть $[x]$ - это минимальное целое, которое не меньше действительного числа x. Если натуральные числа k и n таковы, что $2^{n-1} < k \leq 2^n$, то если мы начнем делить кучу из k предметов на равные половины или отличающиеся на единицу, то мы дойдем до частей, содержащих не более одного предмета, не более, чем за n делений. Поэтому число делений не превосходит $[\log_2(k)]$. Это позволяет сформулировать

Утверждение 4:
(a)Если носитель ряда z содержится в объединении k прямых, то $N(z) \leq [\log_2(k)] + 2$.
(b)Если функцию z можно представить в виде суммы k однородных слагаемых, то $N(z) \leq [\log_2(k)] + 2$.
(c)Если функцию z можно представить в виде суммы k слагаемых вида $c_{ij}(x,y)x^i y^j$, где все коэффициенты $c_{ij}(x,y)$ имеют сложность не выше $n \geq 1$, то $N(z) \leq [\log_2(k)] + 1 + n$.
(d)Если функция - это многочлен степени не выше d,
то $N(z) \leq [\log_2(d)] + 1$.

В качестве следствия получаем.
Следствие: Если u - решение уравнения

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}(u) = 0,$$

то сложность $N(u) \leq [\log_2(m+n)] + 2$.

Можно перейти от переменных (x, y) к формальным переменным $(z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy)$ и рассматривать сложность по отношению к этим переменным. Утверждение 4 дает оценку сложности полианалитических функций, т.е. решений уравнения $\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}(f) = 0$, как функций $(z, \bar{z})$, а именно $N(f) \leq [\log_2(n)] + 2$.

В качестве простейшего примера ряда, чей носитель не содержится в объединении прямых и чья сложность, возможно, равна бесконечности, можно предложить $z = \sum z_n x^n y^{n^2}$, в частности $z = \sum x^n y^{n^2}$. Отметим, что $u(x, y) = z(e^x, e^y)$ - это решение уравнения теплопроводности $u_y = u_{xx}$, которое, тем самым, имеет ту же сложность.

6. Голоморфная сложность.

В работе [1] мы делали различие между аналитической сложностью и полиномиальной. Введем еще одну характеристику сложности - *голоморфную сложность*. Пусть $z(x, y)$ функция голоморфная в окрестности начала координат и равная нулю в начале координат. Тогда ее голоморфная сложность определяется по той же индуктивной схеме, что и аналитическая, но функции одного переменного, которые участвуют в суперпозиции - это функции одного переменного, голоморфные в окрестности нуля и равные нулю в начале координат. Если $N(z)$, $N_{hol}(z)$, $N_{pol}(z)$ - это аналитическая, голоморфная и полиномиальня сложнсть z, то можно написать неравенство $N(z) \leq N_{hol}(z) \leq N_{pol}(z)$.

Пусть $z = xy$, тогда $N(z) = 1$ в силу соотношения $xy = \exp(\log(x) + \log(y))$. Но представление xy в виде $c(a(x) + b(y))$ с голоморфными в нуле a, b, c - невозможно. Действительно, пусть $a(x) = a_1x + a_2x^2 + O(3)$, аналогично b и c. Тогда сравнивая коэффициенты в разложении, получаем

$$c_1a_1 = c_1b_1 = (c_2b_1^2 + c_1b_2) = (c_2a_1^2 + c_1a_2) = 0, \quad 2c_2a_1b_1 = 1$$

и не трудно видеть, что эта система не имеет решения (другое доказательство этого утверждения имеется у Т.Садыкова [6]). Но, с другой строны,

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{2}$$

Таким образом $N_{hol}(xy) = N_{pol}(xy) = 2$. Т.е. запрет помещать особенность в некоторую точку может изменять порядок сложности. По-видимому, голоморфная и полиномиальная сложности также могут различаться.

Как устроены многочлены аналитической сложности один? Можно предложить следующую гипотезу.

Гипотеза. Многочлен имеет аналитическую сложность один тогда и только тогда, когда он имеет вид $R(P(x) + Q(y))$ или вид $R(P(x)Q(y))$, где (P, Q, R) - непостоянные многочлены от одного переменного.

Отметим, что в первом случае такой многочлен имеет полиномиальную сложность один, а во втором - два.

7. Классы сложности как дифференциально-алгебраические множества.

Обсудим некоторые особенности дифференциально-алгебраических соотношений, определяющих классы сложности.

Утверждение 5: Уравнения $\Delta_n(z) = 0$, определяющие Cl_n, это соотношения,

в которых явно не присутствуют независимые переменные x и y, а также сама неизвестная функция z, т.е. это соотношения только на производные функции z.
Доказательство: Это следует из инвариантности классов относительного всех сдвигов $(x \to x+a)$, $\quad (y \to y+b)$, $\quad (z \to z+c)$.

В связи с этим, говоря о k-струе, мы будем иметь ввиду усеченную k-струю, т.е. k-струю из которой исключены (x, y, z). Это касается как функций двух переменных, так и функций одного переменного. Не трудно подсчитать рзмерность такой k-струи. Для функций одного переменного она равна k, а для двух переменных - $k(k+3)/2$.

Уравнению $(log(z'_x/z'_y))''_{xy} = 0$, определяющему первый класс, можно придать вид

$$\Delta_1(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z'_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0$$

или, если перейти к другим обозначениям,

$$\Delta_1(z) = z_{10} z_{01}(z_{21} z_{01} - z_{12} z_{10}) + z_{11}((z_{10})^2 z_{02} - (z_{01})^2 z_{20}) = 0$$

С этим соотношением можно связать три величины k, l и m, где $k = 3$ - это дифференциальный порядок, $l = 4$ - алгебраическая степень определяющего уравнения, $m = 1$ - коразмерность Cl_1 в k-струе. Значения некоторых из этих параметров можно было угадать и не выписывая самого соотношения. Действительно, пусть $z = c(a(x)+b(y))$. Дифференцируя это соотношения, мы получаем выражения для частных производных функции z через производные (a, b, c) соответствующих порядков. Размерность усеченной k-струи (считаем только производные порядка один и выше) для функций двух переменных равна $k(k+3)/2$, а для набора (a, b, c) - $3k$. При $k = 3$ обе эти величины равны $d = 9$.

Вот выражения производных функции z первого класса через производные функций (a, b, c).

$z_{10} = c_1 a_1, \quad z_{0,1} = c_1 b_1,$
$z_{20} = c_2 a_1^2 + c_1 a_2, \quad z_{11} = c_2 a_1 b_1, \quad z_{02} = c_2 b_1^2 + c_1 b_2,$
$z_{30} = c_3 a_1^3 + 3c_2 a_1 a_2 + c_1 a_3, \quad z_{21} = c_3 b_1 a_1^2 + c_2 b_1 a_2,$
$z_{03} = c_3 b_1^3 + 3c_2 b_1 b_2 + c_1 b_3, \quad z_{12} = c_3 a_1 b_1^2 + c_2 a_1 b_2$

Эти выражения однородны в следующем смысле. При замене $(a_j \to$

$ta_j, \quad b_j \to t^j b_j, \quad c_j \to tc_j)$ производная $z_{x^n y^m}$ переходит в $t^{m+n+1} z_{x^n y^m}$. Т.е. первые производные имеют вес два, вторые - три, третьи - четыре. Эти выражения задают полиномиальное оторбражение P_1 веса $L = 4$ из $\mathbf{C}^9$ в $\mathbf{C}^9$, которое инвариантно относительно действия мультипликативной группы $\mathbf{C}^*$. А именно, если $\lambda \in \mathbf{C}^*$, то

$$P(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3, \lambda^{-1} c_1, \lambda^{-2} c_2, \lambda^{-3} c_3) = P(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3)$$

Поэтому образом одномерной орбиты любой точки в прообразе будет единственная точка в образе и мы заключаем, что образ - это собственное алгебраическое подмножество $\mathbf{C}^9$ коразмерности m не меньше единицы. Инвариантность относительно действия $\mathbf{C}^*$ - это следствие инвариантности Cl_1 относительно линейной замены переменных вида $\Lambda : z(x, y) \to z(\lambda x, \lambda y)$. Инвариантность Cl_1 относительно замены $z(x, y) \to z(\mu x, \nu y)$ также имеет свои следствия. Эта замена порождает отображение $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3) \to (\mu a_1, \mu^2 a_2, \mu^3 a_3, \nu b_1, \nu^2 b_2, \nu^3 b_3, c_1, c_2, c_3)$. Ему соответствует действие $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ на координаты отображения P, а именно - $S_{\mu\nu} : z_{ij} \to \mu^i \nu^j z_{ij}$. Инвариантность класса означает, что определяющий его дифференциальный полином Δ_1 должен быть однороден относительно этого действия. Нетрудно убедиться, что этот полином имеет дифференциальную бистепень однородности $(l, l) = (3, 3)$, т.е. $\Delta_1(S_{\mu\nu}(z)) = \mu^3 \nu^3 \Delta_1(z)$. То, что степень однородности по μ равна степени по ν - это следствие инвариантности класса относительно $\mathbf{Z}_2$-действия $z(x, y) \to z(y, x)$.

Нетрудно вычислить ранг отображения P_1^2 - сужения P_1 на 2-струю и ранг P_1^3 - сужения P_1 на 3-струю. P_1^2 - это отображение $\mathbf{C}^6$ в $\mathbf{C}^5$ и оно имеет полный ранг 5. Это означает, что нет дифференциальных соотношений 2-го порядка, которым удовлетворяет 2-й класс. P_1^3 - это отображение $\mathbf{C}^9$ в $\mathbf{C}^9$ и оно имеет ранг 8. Это означает, что коразмерность, первого класса в 3-струе действительно равна единице.

Как эти параметры трансформируются при переходе ко второму классу? Фунция второго класса имеет вид $z = s(c(a(x) + b(y)) + r(p(x) + q(y)))$. В ее формировании участвуют семь функций одного переменного. Номер критической струи $k_2 = 11$, ее размерность $d_2 = 77$. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции производные функции z - это полиномы от производных семи определяющих функций (a, b, c, p, q, r, s). Вот как выглядят несколько первых координат этого отображения

$$\mathrm{z}_{10} = s_1(c_1 a_1 + r_1 p_1), \quad z_{01} = s_1(c_1 b_1 + r_1 q_1),$$

$z_{20} = s_2(c_1a_1 + r_1p_1)^2 + s_1(c_2a_1^2 + c_1a_2 + r_2p_1^2 + r_1p_2)$

$z_{11} = s_2(c_1a_1 + r_1p_1)(c_1b_1 + r_1q_1) + s_1(c_2a_1b_1 + r_2p_1q_1),$

$z_{02} = s_2(c_1b_1 + r_1q_1)^2 + s_1(c_2b_1^2 + c_1b_2 + r_2q_1^2 + r_1q_2),$

$z_{30} = s_3(c_1a_1 + r_1p_1)^3 + 2s_2(c_1a_1 + r_1p_1)(c_2a_1^2 + c_1a_2 + r_2p_1^2 + r_1p_2) + s_1(c_3a_1^3 + 3c_2a_1a_2 + c_1a_3 + r_3p_1^3 + 3r_2p_1p_2 + r_1p_3),$

$z_{21} = s_3(c_1a_1 + r_1p_1)^2(c_1b_1 + r_1q_1) + 2s_2(c_1a_1 + r_1p_1)(c_2a_1b_1 + r_2p_1q_1) + s_2(c_1b_1 + r_1q_1)(c_2a_1^2 + c_1a_2 + r_2p_1^2 + r_1p_2) + s_1(c_3a_1^2b_1 + c_2b_1a_2 + r_3q_1p_1^2 + r_2q_1p_2),$

$z_{12} = s_3(c_1b_1 + r_1q_1)^2(c_1a_1 + r_1p_1) + 2s_2(c_1b_1 + r_1q_1)(c_2a_1b_1 + r_2p_1q_1) + s_2(c_1a_1 + r_1p_1)(c_2b_1^2 + c_1b_2 + r_2q_1^2 + r_1q_2) + s_1(c_3b_1^2a_1 + c_2a_1b_2 + r_3p_1q_1^2 + r_2p_1q_2),$

$z_{03} = s_3(c_1b_1 + r_1q_1)^3 + 2s_2(c_1b_1 + r_1q_1)(c_2b_1^2 + c_1b_2 + r_2q_1^2 + r_1q_2) + s_1(c_3b_1^3 + 3c_2b_1b_2 + c_1b_3 + r_3q_1^3 + 3r_2q_1q_2 + r_1q_3),$

и т.д. до 11-й струи, которые определяют полиномиальное отбображение P_2 из $\mathbf{C}^{77}$ в $\mathbf{C}^{77}$. Это отображение инвариантно относительно трех действий мультипликативной группы $\mathbf{C}^*$, а именно

L: $(\mathrm{a}_1, ..., a_{11}, b_1, ..., b_{11}, c_1, ..., c_{11}) \to (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_{11}, \lambda b_1, \ldots, \lambda b_{11}, \lambda^{-1}c_1, ..., \lambda^{-11}c_{11})$
$M : (p_1, ..., p_{11}, q_1, ..., q_{11}, r_1, ..., r_{11}) \to (\mu p_1, \ldots, \mu p_{11}, \mu q_1, \ldots, \mu q_{11}, \mu^{-1}r_1, ..., \mu^{-11}r_{11})$
$N : (c_1, ..., c_{11}, r_1, ..., r_{11}, s_1, ..., s_{11}) \to (\nu c_1, \ldots, \nu c_{11}, \nu r_1, \ldots, \nu r_{11}, \nu^{-1}s_1, ..., \nu^{-11}s_{11})$
Это означает, что образ отображения P_2 - это собственное алгебраическое подмножество, чья коразмерность $m_2 \geq 3$. По отношению ко 2-му классу 11-струя замечательна тем, что для нее размерность струи (число производных функции двух переменных) равна числу производных функций одного переменного, через которые эти производные выражаются. В этом случае мы называем эту струю *критической.* В частности, мы говорим, что 11-струя - это критическая струя 2-го класса. В силу симметрии отображения образ в критической струе есть алгебраическое множество положительной коразмерности. Но при этом можно прдположить , что это возможно и для некоторых струй с меньшим номером. В связи с этим введем еще один термин. *Точной критической струей* класса мы будем называть струю с минимальным номером, в которой образ этого класса имеет

положительную коразмерность. Для первого класса и точная критическая струя и просто критичечская струя - это 3-струя. Для второго класса критической является 11-струя.

Недавно Ю.Швецова, с помощью компьютерных вычислений в системе Maple (файлы с вычислениями можно найти в интернете [8]), показала, что сужение P_2 на 10-струю имеет полный ранг, откуда получаем следующее утверждение.

Утверждение 6: 11-струя является точной критической струей 2-го класса.

Доказательство: Рассмотрим дифференциал отображения P_2^{10} - сужения P_2 на 10-струю. Это отображение из 70-мерного пространства переменных

$$(a_1, \dots, a_{10}, b_1, \dots, b_{10}, c_1, \dots, c_{10}, p_1, \dots, p_{10}, q_1, \dots, q_{10}, r_1, \dots, r_3, s_1, \dots, s_{10})$$

в 65-мерное пространство 10-струй функций двух переменных. Дифференциал представляет собой матрицу из 65 строк длины 70. Оказывается, что ее минор 65-го порядка, соответствующий дифференцированиям по

а$_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$,
$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}$,
$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9$,
$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$,
$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9$,
$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8$,
$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$,

в точке

а$_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 1, p_1 = 1, q_1 = 1, r_1 = 1, s_1 = 1$,
$a_2 = 1, b_2 = 2, c_2 = 2, p_2 = 1, q_2 = 1, r_2 = 1, s_2 = 1$,
$a_3 = 1, b_3 = 2, c_3 = 3, p_3 = 1, q_3 = 1, r_3 = 1, s_3 = 1$,
$a_4 = 1, b_4 = 2, c_4 = 3, p_4 = 1, q_4 = 1, r_4 = 1, s_4 = 1$,
$a_5 = 1, b_5 = 2, c_5 = 3, p_5 = 1, q_5 = 1, r_5 = 1, s_5 = 1$,
$a_6 = 1, b_6 = 2, c_6 = 3, p_6 = 1, q_6 = 1, r_6 = 1, s_6 = 1$,
$a_7 = 1, b_7 = 2, c_7 = 3, p_7 = 1, q_7 = 1, r_7 = 1, s_7 = 1$,
$a_8 = 1, b_8 = 2, c_8 = 3, p_8 = 1, q_8 = 1, r_8 = 1, s_8 = 1$,
$a_9 = 0, b_9 = 0, c_9 = 1, p_9 = 0, q_9 = 0, r_9 = 2, s_9 = 0$,
$a_{10} = 0, b_{10} = 0, c_{10} = 1, p_{10} = 0, q_{10} = 0, r_{10} = 1, s_{10} = 0$

равен

$$17217930613695749787255938944220528640.$$

Хорошо видно, что это число не равно нулю, т.е. данный минор является ненулевым многочленом и вне его нулевого множества ранг отображения максимален (равен шестидесяти пяти), поэтому образ открыт, а значит P_2^{10} это отображение на всю 10-струю и утверждение доказано.

Итак, для первого и второго классов разницы между критической струей и точной критической струей нет. Вопрос о том так ли это для классов сложности три и выше открыт.

Что можно сказать о всех остальных классах? Имеет место следующе общее утверждение.

Утверждение 7:
(1) Критической струей n-го класса является k_n-струя, где $k_n = 2^{n+2}-5$, при этом размерности образа и прообраза для отображения P_n^k (сужение отображения n-го класса на k_n-струю) равны $d_n = (2^{n+1}-1)(2^{n+2}-5)$.
(2) Коразмерность m_n образа n-го класса в k_n-струе не меньше $2^n - 1$.
Доказательство: В запись функции n-го класса входит $2^{n+1}-1$ функция одного переменного, что при переходе к k-струе дает $(2^{n+1}-1)k$ параметров. Приравнивая эту величину к числу параметров для k-струи функций двух переменных, получаем уравнение на номер струи $(2^{n+1}-1)k = k(k+3)/2$. Откуда $k_n = 2^{n+2}-5$. Если z - функция из Cl_n и P_n - это полиномиальное ототбражение из k_n-струи определяющих функций одного переменного в k_n-струю функций двух переменных, то размерности пространств в прообразе и образе совпадают и равны $d_n = (2^{n+1} - 1)(2^{n+2}-5)$. Рассуждая по индукции, нетрудно заметить, что отображение P_n инвариантно относительно действия прямого произведения 2^n-1 экземпляров группы $\mathbf{C}^*$, что позволяет дать оценку на коразмерность.

8. Дифференцирование, интегрирование и замена переменной.

Что происходит со сложностью при дифференцировании?

Утверждение 8: Пусть $N(z) \leq n$ и D - оператор дифференцирования по x или по y, тогда $N(Dz) \leq 2n$.
Доказательство: Индукция по n и применение правила дифференцирования сложной функции.

Не ясно, что происходит со сложностью при интегрировании (переходу к первообразной по одной из переменных). Однако, если носитель ряда конечен или содержится в объединении нескольких прямых (см.утверждение 4), то поскольку носитель как производной, так и первообразной получается из носителя функции параллельным переносом, то эти операции, в таком случае, не ухудшают верхней оценки сложности.

Что происходит со сложностью при замене переменной? Верно следующее утверждение.

Утверждение 9: Пусть сложность функции $z(X, Y)$ как функции X и Y не превосходит n и пусть $X = A(x, y)$, $Y = B(x, y)$ - замена переменных, где сложность A и B не превосходит m, тогда сложность $w = z(A(x, y), B(x, y))$ не превосходит $n + m$.

9. Равноправие переменных и ткани.

Пусть $(\{x(u, v) = c_1\}, \{y(u, v) = c_2\}, \{z(u, v) = c_3\})$ - 3-ткань на плоскости [2], т.е. три попарно трансверсальные гладкие одномерные слоения плоскости. Такие объекты, рассматриваемые с точностью до замен координат на плоскости, изучаются средствами дифференциальной геометрии. В частности, строятся формы связности и кривизны ткани. С другой стороны с тканью можно связать функцию ткани. Для этого можно, например, объявить независимыми координатами не пару (u, v), а пару (x, y), тогда ткань принимает следующий вид. Это семейство горизонтальных $y = c_2$ и вертикальных $x = c_1$ прямых, а также линий уровня функции ткани $z(x, y) = c_3$. Если ткань аналитическая, то как было отмечено в [1], условие того, что функция ткани имеет аналитическую сложность один равносильно тому, что кривизна ткани равна тождественно нулю или, что то же самое, ткань можно распрямить в три семейства параллельных прямых (шестиугольная ткань). С точки зрения теории тканей переменные (x, y, z) абсолютно равноправны. Отсюда следует

Утверждение 10: Пусть $x = X(y, z)$ и $y = Y(x, z)$ соотношения, полученные разрешением соотношения $z = Z(x, y)$ относительно x и y, если $N(Z) = 1$, то $N(x) = N(Y) = 1$.

Доказательство: Доказательство следует из интерпретации Z как функции ткани, или же может быть без труда получено непосредственно. Действительно, если $z = c(a(x) + b(y))$, то $x = a^{-1}(c^{-1}(z) - b(y))$, а $y = b^{-1}(c^{-1}(z) - a(x))$.

В связи с этим возникает вопрос. *Сохраняется ли такое равноправие переменных для функций, чья сложность больше единицы?* Это вопрос о том, можно ли сложность понимать, как геометрическую характеристику соответствующей 3-ткани или же сложность чувствительна к делению переменных на независимые и зависимую.

Примеры:

(1) Пусть переменные (x, y, z) - связаны соотношением $z^m + xz + y = 0$, где $m \geq 2$, которое можно разрешить относительно одной переменной трямя способами. Нетрудно убедиться, что $N(x) = N(y) = 2$. В [1] было показано, что сложность z также равна 2.
(2) Пусть теперь переменные (x, y, z) - связаны соотношением $z^3 + xz^2 + yz + 1 = 0$, тогда нетрудно убедиться, что $N(x) = N(y) = 2$. Что касается z, то заменой $Z = z - x/3$ это уравнение становится приведенным, т.е. вида $Z^3 + XZ + Y = 0$, где $X = y - x^2/3, \quad Y = \frac{2}{27}x^3 - xy/3 + 1$, тогда из оценки для приведенного уравнения получаем, что $N(z) \leq 4$. Это лучше чем то, что непосредственно позволяет усмотреть формула Кардано. Ясно, что $N(z) > 1$, поэтому остается три возможности 2, 3 и 4, точный ответ неизвестен.

Отметим, что оба примера - это примеры прямолинейных тканей, т.е. тканей, где каждое семейство, в некоторых координатах, есть семейство прямых линий.

10. Сложность отображений и гипотеза о якобиане.

Проблематику аналитической сложности можно перенести с функций на отображения. К оценке *сложности отображений плоскости* можно подходить так. Если $\phi = (x \to z_1(x, y), y \to z_2(x, y))$, то под сложностью $N(\phi)$ будем понимать $\max(N(z_1), N(z_2))$, где сложность компонент - это обычная аналитическая сложность. Вот несколько очевидных наблюдений.

Утверждение 11:
(a) $N(\phi \circ \psi) \leq N(\phi) + N(\psi)$.
(b) Сложность любого линейного отображения не превосходит единицы.
(c) Сложность треугольного отображения $(x \to x + a(y), y \to y$, где a - непостоянная аналитическая функция, равна единице.
(d) Сложность прямого $(x \to x/y, y \to y)$ и обратного $(x \to xy, y \to y)$ σ-процессов равна единице.

Известная "гипотеза о якобиане"состоит в следующем. Пусть $X = A(x, y)$, $Y = B(x, y)$ - локально обратимое полиномиальное отображение двумерного комплексного пространства на себя. Тогда оно глобально обратимо. Локальная обратимость означает, что якобиан отображения $J = A_x B_y - A_y B_x$ нигде не обращается в ноль. Это возможно лишь в случае если это постоянная, которую, для определенности, можно считать равной единице. Глобальная же обратимость, в силу теоремы Юнга, равносильна тому, что это отображение есть композиция обратимых линейных преобразований и, так называемых "треугольных", т.е. преобразований вида $X = x + b(y), Y = y$, где $b(y)$ - полином. Проблема якобиана через теорему Хиронаки о разрешении особенностей естественно погружена в проблематику рациональных отображений плоскости, а именно σ-процессов [4].

Можно предложить доказательство следующей упрощенной версии этой гипотезы.

Утверждение 12: (Гипотеза о якобиане для первого класса.) Пусть $X = C(A(x)+B(y)),\ Y = R(P(x)+Q(y))$ - локально обратимое отображение двумерного комплексного пространства на себя, где все функции A, B, C, P, Q, R - полиномы, тогда гипотеза справедлива.

Доказательство: Будем предполагать, что отображение сохраняет неподвижным начало координат. Полиномы C и R - линейны, иначе их производные имеют нули, что дает обращение в ноль и якобиана. Т.е. можно считать, что $X = A(x)+B(y),\ Y = P(x)+Q(y)$. Имеем $a(x)q(y)-p(x)b(y) = 1$, где (a, b, p, q) - это производные (A, B, P, Q). Пусть, a - тождественный ноль, тогда получаем, что p и b - взаимообратные постоянные и гипотеза верна. Аналогичным образом гипотеза справедлива и в случае тождественного обращения в ноль остальных трех полиномов b, p или q. Можем теперь предполагать, что ни один из них н есть тожествный ноль. Тогда $q(y) = \frac{p(x)}{a(x)}b(y) + \frac{1}{a(x)}$. Если b не константа, то, выбирая значение y, при котором b обращается в ноль, получаем, что a - константа α и, далее, что p - константа π. Тогда $P(x) = \pi x$, $A(x) = \alpha x$, $Q(y) = \frac{\pi}{\alpha}B(y) + \frac{y}{\alpha}$ и мы видим, что после линейной замены отображение становится треугольным. В нашем предположении, что b не постоянна, b можно заменить на a, p или q. Если же все производные постоянны, то отображение линейно.

Это утверждение можно интерпретировать так. *Контрпример к гипотезе о якобиане надо строить для отображающих функций второго класса.* Однако совсем простые выражения второго класса, такие как, например, $X = A(x) + B(x)C(y), \quad Y = D(y) + E(x)G(y)$ примера также не дадут.

Поэтому имеет смысл строить пример для выражений вида

$$X = A(x)B(y) + C(x)D(y), \quad Y = E(x)F(y) + G(x)H(y)$$

Т.Садыков сообщил автору, что ему удалось получить оценки сложности дискриминантов, некоторых классов гипергеометрических функций, а также им предложен интересный подход к оценке сложности узлов, основанный на полиномиальной сложности.

Список литературы

[1] V. K. Beloshapka, Analytic Complexity of Functions of Two Variables, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 14, No. 3, 2007, pp. 243–249.

[2] W. Blaschke, EinfËuhrung in die Geometrie der Waben (BirkhËauser, Basel–Stuttgart, 1955).

[3] А. Г. Витушкин, 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы, УМН, 2004, 59:1(355), 11–24.

[4] А.Г.Витушкин, Вычисление якобиана рационального преобразования $\mathbf{C}^2$ и его приложения. Матем.заметки, т.66, вып.2, 1999, сс.308-312.

[5] D.Grigoriev, Additive complexity in directed computations, Theor.Comp.Sci., 19 1982. pp.39-67.

[6] В.А. Красиков и Т.М. Садыков, Об аналитической сложности дискриминантов, препринт, 2012.

[7] A. Ostrowski, Uber Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, Math. Z.8, 241–298,(1920).

[8] Ю.Швецова, Maple-файл вычисления ранга отображения P_2^{10}, http://vkb.strogino.ru/