Может ли стабилизатор быть восьмимерным?[1]

Белошапка В.К.[2]

В работе обсуждается следующий вопрос. Какие значения может принимать размерность стабилизатора точки в алгебре Ли инфинитезимальных голоморфных симметрий произвольного ростка вещественно аналитической гиперповерхности пространства $\mathbf{C^2}$? Для ответа на этот вопрос основную трудность представляют ростки бесконечного типа по Кону, сферические в точке общего положения. Полностью разобран пример гиперповерхностей вида $\Gamma(r) = \{v = ur(|z|^2)\}$. Размерности алгебры Ли и ее стабилизатора при этом могут принимать следующие значения (5,5), (4,2), (3,3) и (2,2). Все четыре класса описаны явно, первые три заданы элементарными функциями, в описании этих классов участвует рациональная функция $Q_n(t) = \mathrm{tg}(n \,\mathrm{arctg}(t))$, аналогичная знаменитому многочлену Чебышева.

1 Введение

Если Γ_ξ — абсолютно произвольный росток вещественно аналитической гиперповерхности Γ двумерного комплексного пространства $\mathbf{C^2}$ с координатами $(z, w = u + iv)$ в точке ξ, а $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ — алгебра Ли ростков векторных полей в точке ξ, порождающих голоморфные пребразования Γ_ξ, то имеет место простая альтернатива. Либо размерность $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ равна бесконечности и при этом росток биголоморфно эквивалентен ростку вещественной гиперплоскости $\{v = 0\}$, либо эта размерность не превосходит **восьми**, причем равенство означает, что в точках Леви-невырожденности гиперповерхность Γ сферична, т.е. локально эквивалентна ростку сферы $S = \{|z|^2 + |w^2| = 1\}$. Доказательство очень просто. Если росток — это росток гиперповерхности, Леви-вырожденной во всех своих точках, то такой росток, как известно, эквивалентен ростку гиперплоскости. Если же это не так, то, рассмотрев любые девять полей из $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ в точке Леви-невырожденности, мы убеждаемся, что они линейно зависимы. Это следует из любой версии Леви-невырожденной теории вплоть до работы Пуанкаре 1907-го года ([1], [2]). Оттуда же, при наличии восьми линейно независимых полей, следует сферичность. В алгебре Ли инфинитезимальных автоморфизмов $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ имеется стабилизатор - подалгебра Ли $\mathrm{aut}_\xi\,\Gamma_\xi$, состоящая из ростков полей, обращающихся в ноль в точке ξ. Это поля, порождающие преобразования, оставляющме ξ на месте. Итак, мы знаем, что для любого не плоского, т.е. не эквивалентного гиперплоскости, ростка размерность полной алгебры Ли $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$ не превосходит восьми, причем восьмерка может реализоваться только для гиперповерхностей, сферических в точках Леви-невырожденности. При этом сфера однородна и размерность стабилизатора точки равна **пяти**.

[1]Работа выполнена при поддержке по грантам РФФИ № 11-01-00495-а и № 11-01-12033-офи-м-2011.

[2]Белошапка Валерий Константинович, vkb@strogino.ru, профессор кафедры теории функций и функционального анализа, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

А что можно сказать о размерности стабилизатора $\mathrm{aut}_\xi \Gamma_\xi$ *для ростка произвольной не плоской гиперповерхности?*

Конечно, можно сразу сказать, что эта размерность не превосходит восьми, т.к. это подалгебра полной алгебры Ли автоморфизмов. Но при этом, по-видимому, ростков со стабилизаторами размерностей 6, 7 или 8 никто никогда не видел.

В соответствии с работой Черна и Мозера ([2]) локальное уравнение вещественной гиперповерхности в точке Леви-невырожденности можно записать в виде

$$v = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(hz^4\bar{z}^2) + \dots,$$

где многоточие обозначает члены степени семь и выше по переменным $(z, \bar{z}, u)$. Если $h = 0$, то начало координат называется омбилической точкой гиперповерхности. В той же работе было показано, что если гиперповерхность омбилична каждой точке окрестности, то она сферична (эквивалентна ростку сферы). Таким образом, если гиперповерхность несферична в своих Леви-невырожденных точках, то множество ее неомбилических точек — открытое плотное множество (дополнение к собственному вещественно аналитическому подмножеству). Если точка неомбилична, то дополнительные рассмотрения компонент отображения, привязанные к младшему ненулевому члену уравнения, т.е. к члену $2\,\mathrm{Re}(hz^4\bar{z}^2)$ позволяют утверждать, что имеется не более двух голоморфных симметрий (включая тождественное отображение) гиперповерхности, сохраняющих ноль на месте ([4]). В частности, размерность стабилизатора равна нулю. Тем самым для гиперповерхности, несферичной в точке общего положения, оценка размерности полной группы падает до трех. Если у такой гиперповерхности действительно имеется трехмерная алгебра Ли, то в точке общего положения, а именно, там, где три базисных поля линейно независимы, поверхность является локально однородной и, тем самым, попадает в известный список Э.Картана ([3]). Итак, еще раз.

Если росток гиперповерхности имеет стабилизатор размерности пять или более, то либо росток сферичен (в невырожденном случае), либо представляющая его гиперповерхность сферична в точках невырожденности.

Эта формулировка очень похожа на утверждение о полной алгебре Ли. Однако есть отличие. Мы так и не узнали о невозможности (или возможности) реализации размерностей стабилизатора 6, 7 и 8. В частности, остался открытым такой вопрос. Верно ли, что 5-мерный стабилизатор есть только у сферы? Ответ на этот, второй, вопрос будет получен ниже. Или даже так: верно ли, что если полная алгебра 8-мерна, то росток сферичен?

Пусть, далее, росток гиперповерхности имеет конечный тип по Кону. Это означает, что она не содержит одномерной комплексной кривой, проходящей через центр ростка. Уравнение гиперповерхности конечного типа можно записать в виде

$$\Gamma = \{v = \Phi_m(z, \bar{z}) + \dots\},$$

где Φ_m — ненулевой однородный многочлен от $(z, \bar{z}$ степени $m \geq 2$ без гармонической компоненты $2\,\mathrm{Re}(pz^m)$ (эту компоненту всегда можно убрать простой заменой), а многоточие обозначает члены веса выше, чем m. При этом при подсчете веса монома переменные z и $\bar{z}$ идут с весом 1, а u — с весом m. Отметим, что если $m = 2$, то речь идет о Леви-невырожденной гиперповерхности, поэтому интерес представляют вырожденные гиперповерхности с $m > 2$. Однако, несмотря на вырожденность, к такому ростку применима стандартная техника модельных поверхностей, где в качестве модельной используется гиперповерхность $Q = \{v = \Phi_m(z, \bar{z})\}$. В результате мы получаем, что стабилизатор $\mathrm{aut}_\xi \Gamma_\xi$

имеет естественное точное представление в стабилизаторе начала координат модельной поверхности $\mathrm{aut}_0\, Q_0$. Таким образом вопрос о возможных размерностях стабилизатора сводится к вопросу о вычислении алгебры $\mathrm{aut}_0\, Q_0$. Это несложное вычисление было проделано в 1996-м году в студенческой курсовой работе А.Ершовой ([5]). Вычисление показывает, что стабилизатор Леви-вырожденного ростка конечного типа не может быть больше трех. Максимум, т.е. тройка, достигается на гиперповерхностях вида

$$S_m = \{v = |z|^{2m}\}.$$

Этот результат содержится также в работе М.Коллара 2005-го года ([6]). Итак, ростки, которые не охвачены приведенным выше простым рассуждением — это ростки бесконечного типа, причем такие, что представляющие их гиперповерхности сферичны в своих Леви-невырожденных точках. Отметим, что отмеченные выше экстремальные для конечного типа гиперповерхности S_m также сферичны вне вещественной прямой $\{z = 0, v = 0\}$, на которой вырождается форма Леви. Это следует из того, что S_m — это образ сферической гиперповерхности S_1 при отображении $(z \to z^m, \quad w \to w)$. Вне прямой $\{z = 0\}$ отображение локально обратимо.

2 Автоморфизмы гиперповерхности вида $\mathbf{v = ur(|z|^2)}$.

Уравнение ростка бесконечного типа можно записать в виде $v = uF(z, \bar{z}, u)$. В этом пункте дается полное опиисание строения алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов гиперповерхностей бесконечного типа следующего специального вида, а именно

$$\Gamma(r) = \{v = ur(|z|^2)\} \tag{1}$$

Любая такая гиперповерхность имеет в своем стабилизаторе два поля

$$X_1 = 2\,\mathrm{Re}\left(iz\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{и} \quad X_2 = 2\,\mathrm{Re}\left(w\frac{\partial}{\partial w}\right), \tag{2}$$

которым соответствуют две однопараметрические подгруппы:

$$(z \to e^{it_1}z, \quad w \to w) \quad \text{и} \quad (z \to z, \quad w \to t_2 w).$$

Эти коммутирующие поля образуют подалгебру в $\mathrm{aut}_0\,\Gamma(r)_0$. Наша цель выяснить, для каких вещественно аналитических функций $r(t)$ гиперповерхность $\Gamma(r)$ допускает какие либо еще поля, кроме этих двух.

Гиперповерхность эквивалентна гиперплоскости в том и только том случае, когда $r = const$. В этом случае алгебра Ли бесконечномерна. Проверку невырожденности вне прямой $w = 0$ удобно проводить следующим образом. Запишем наше уравнение в виде

$$\mathrm{Im}\ln w = \mathrm{arctg}\left(\frac{v}{u}\right) = \mathrm{arctg}(r(|z|^2)),$$

тогда после замены $(z \to z, \quad w \to \ln w)$ уравнение принимает вид $v = \mathrm{arctg}(r(|z|^2) = \phi(|z|^2)$. На этот прием, в свое время, любезно обратил мое внимание А.В.Лобода. После чего нетрудно показать, что определитель Леви, после замены $|z|^2 = t$, оказывается пропорционален выражению $t\phi''(t) + \phi'(t)$. Приравнивая его к нулю и решая получившееся дифференциальное уравнение, мы видим, что неособыми в нуле решениями являются только постоянные, а это означает постоянство и функции $r(t) = \operatorname{tg}(\phi(t))$.

Будем далее предполагать, что $r(t)$ не постоянна. Можно также предполагать, что $r(0) = 0$. Действительно, уравнение $v = u(r_0 + r(|z|^2))$ запишем как $\operatorname{Im}((1 - ir_0)w) = ur(|z|^2)$. Тогда после замены $w \to (1 - ir_0)w$ уравнение принимает вид

$$v = u\tilde{r}(|z|^2) = u\frac{r(|z|^2)}{1 + |r_0|^2 + r_0 r(|z|^2)}.$$

При этом если $r(t) = r_s t^s + \dots$, то разложение $\tilde{r}$ имеет вид

$$\tilde{r}(t) = \frac{r_s}{1 + |r_0|^2} t^s + \dots$$

Предположим сначала, что $r(t)$ имеет при $t = 0$ ноль первого порядка, тогда после замены $z \to \sqrt{|r'(0)|z}$ функция принимает вид $r(t) = \sigma t + \dots$, где $\sigma = \pm 1$. Однако будет удобнее считать, что уравнение гиперповерхности записано в виде

$$\Gamma(r) = \{v = ur(\sigma |z|^2)\}, \tag{3}$$

а функция $r(t)$ имеет вид

$$r(t) = t + \frac{r_2}{2!}t^2 + \frac{r_3}{3!}t^3 + \dots,$$

т.е. $r'(0) = 1$. Условие, что поле

$$2\operatorname{Re}\left(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + g(z,w)\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

принадлежит $\operatorname{aut}\Gamma_0$, т.е. условие касания поля гиперповерхности выглядит так:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = (i + r(\sigma|z|^2)g(z,w) + (-i + r(\sigma|z|^2)\bar{g}(\bar{z},\bar{w}) + \\ 2\sigma r'(\sigma|z|^2)u(\bar{z}f(z,w) + z\bar{f}(\bar{z},\bar{w})) = 0 \\ \text{при} \quad w = u(1 + ir(\sigma|z|^2)). \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что $g(0,0) = 0$. Подставляя в (4) значение $\bar{z} = 0$ и вводя обозначения $f(0,u) = a(u)$, $g(0,u) = ub(u)$, получаем

$$g(z,w) = wb(w) + 2i\sigma w\bar{a}(w)z,$$

причем $\operatorname{Im} b(u) = 0$. Обозначая $f'_z(0,u) = c(u)$, дифференцируя (4) по $\bar{z}$ и опять подствляя $\bar{z} = 0$ получаем

$$f(z,w) = a(w) + c(w)z + \sigma(2iw\bar{a}'(w) - r_2\bar{a}(w))z^2.$$

Равенство нулю коэффициентов (4) при $|z|^2$ и $|z|^4$ позволяет заключить, что

$$c(w) = \frac{wb'(w)}{2} + i\frac{r_2 b(w)}{4} + iC.$$

Вещественную константу C можно в дальнейшем положить равной нулю, т.к. ей, при равенстве нулю a и b, соответствует поле X_1. Теперь сделаем два замечания.

Первое. Подставляя в (4) полученные нами выражения для f и g, заметим, что в разложении (4) по бистепеням мономов $z^m\bar{z}^n$ отличны от нуля лишь главная диагональ, т.е. мономы бистепеней (m, m), и побочные диагонали $(m, m+1)$ и$(m+1, m)$. При этом главная диагональ зависит только от функции b, а побочные — только от функции a. Это означает, что условия на a и b независимы.

Второе. Наличие у гиперповерхности автоморфизма $w \to tw$, с любым вещественным t, приводит к тому, что если $a(w) = \sum a_j w^j$ или $b(w) = \sum b_j w^j$ — решения уравнения (4), то каждое слагаемое этих сумм — тоже. Таким образом задача сводится к поиску a-решений вида $(a(w) = Aw^m, b = 0)$ и b-решений $(a = 0, b(w) = Bw^n)$.

Ищем сначала b-решения. Поскольку B — ненулевая вещественная константа, то можно положить $B = 1$. Соответствующее поле имеет вид

$$X_b(r_2, n) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{2n + ir_2}{4} zw^n \frac{\partial}{\partial z} + w^{n+1}\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

Положим

$$R = 1 + ir(|z|^2), \quad \phi = \arg R = \operatorname{arctg} r, \quad \text{тогда} \quad |R|^2 = 1 + r^2, \quad r = \operatorname{tg}\phi.$$

Теперь условие (4) после деления на u^{n+1} принимает вид

$$\mathrm{Re}\left(i\bar{R}R^{n+1} + 2r'(\sigma|z|^2)\sigma|z|^2\frac{2n + ir_2}{4}R^n\right) = 0$$

После замены $\sigma|z|^2$ на независимую вещественную переменную t получаем

$$(1 + r(t)^2)\sin(n\phi(t)) = r'(t)t(n\cos(n\phi(t)) - \frac{r_2}{2}\sin(n\phi(t))). \tag{5}$$

При $n = 0$ условие (5) исчезает, но получающееся поле — это комбинация двух полей вида (2), поэтому далее полагаем, что $n > 0$. Теперь (5) можно записать так

$$\frac{r'(t)t}{(1 + r(t)^2)} = \frac{1}{n - \frac{r_2}{2}\operatorname{ctg}(n \operatorname{arctg} t)} \tag{6}$$

Заметим здесь, что фигурирующее в правой части выражение $\operatorname{tg}(n \operatorname{arctg} t)$ — это рациональная функция степени n, связанная со знаменитым многочленом Чебышева.

Разложение правой части (6) имеет вид

$$t + r_2 t^2 + \frac{9r_2^2 + 2r_3 - 4 + 4n^2}{12}t^3 + \ldots$$

Левая часть (6) от n не зависит, поэтому монотонная зависимость коэффициента при t^3 в правой части от n означает, что одна функция $r(t)$ не может быть решением (6) при разных положительных n.

Чтобы решить уравнение (6), нужно его рассмотреть как уравнение на функцию $\phi(t)$, записать в виде

$$\left(n\operatorname{ctg}(n\phi) - \frac{r_2}{2}\right)d\phi = \frac{dt}{t}$$

и проинтегрировать. Учитывая, что $\phi(t) = t + o(t)$, получаем неявное уравнение, определяющее функцию $\phi(t)$:

$$\sin(n\phi(t)) = nt\exp\left(\frac{r_2}{2}\phi(t)\right). \tag{7}$$

Итак, для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ и для любого $r_2 \in \mathbf{R}$ существует единственное решение (7), которое мы обозначим $r = r_b(t; r_2, n)$. При этом разложение решения $r(t) = \mathrm{tg}(\phi(t))$ имеет нужный нам вид

$$r(t) = t + \frac{r_2}{2}t^2 + \ldots$$

Если $r_b(t; r_2, n) = r_b(t; \tilde{r}_2, \tilde{n})$, то, очевидно, $\tilde{r}_2 = r_2$ и, как было показано выше, $\tilde{n} = n$.

Теперь перейдем к поиску a-решений, т.е. $a(w) = Aw^m$, $A \in \mathbf{C}$, $b(w) = 0$. Им соответствуют поля вида

$$2\,\mathrm{Re}\left((Aw^m + \bar{A}w^m(2im - r_2)z^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2i\bar{A}zw^{m+1}\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

При этом выражение $\mathcal{L}$, как ряд по $(z, \bar{z})$, содержит лишь две побочные диагонали, верхнюю — члены бистепеней $(m, m+1)$ и нижнюю — члены бистепеней $(m+1, m)$. Приравниваем верхнюю диагональ к нулю, делим на $2Au^{m+1}\bar{z}$, заменяем $\sigma|z|^2$ на t, получаем

$$-r'(t)R(t)^m + (r_2 + 2im)r'(t)t\bar{R(t)}^m + |R(t)|^2\bar{R(t)} = 0,$$

что после отделения вещественной и мнимой части дает

$$\frac{1 + r(t)^2}{r'} = cos(2m\phi(t)) - r_2 t \tag{8}$$

$$\sin(2m\phi(t)) = 2mt. \tag{9}$$

Если $m = 0$, то (9) исчезает, а (8) дает уравнение, из которого для $r_2 \neq 0$ получаем

$$\phi(t) = -\frac{1}{r_2}\ln(1 - r_2 t), \tag{10}$$

а для $r_2 = 0$

$$\phi(t) = t. \tag{11}$$

Пусть теперь $m = 1, 2, 3, \ldots$, тогда из (9) получаем

$$\phi(t) = \frac{1}{2m}\arcsin(2mt), \tag{12}$$

и уравнение (8) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (2mt)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (2mt)^2} - r_2 t}, \tag{13}$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда $r_2 = 0$.

Итак, при $m > 0$ система (8), (9) имеет решение только при условии $r_2 = 0$, и это

$$r = r_a(t, m) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2m}\arcsin(2mt)\right). \tag{14}$$

Совпадения решений при разных m, очевидно, невозможны.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности совпадения a-решений и b-решений. Пусть $r_2 = 0$, тогда соотношение (7) можно решить относительно $\phi(t)$ и получить

$$\phi(t) = \frac{1}{n}\arcsin(nt),$$

что при $n = 2m$ в точности совпадает с a-решением. Итак,

$$r_a(t,m) = r_b(t,2m,0) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2m}\arcsin(2mt)\right). \tag{15}$$

Пусть, далее, $r_2 \neq 0$ и a-решение $\phi(t) = -\frac{1}{r_2}\ln(1-r_2t)$ является b-решением, т.е. удовлетворяет уравнению

$$\phi'(t)t = \frac{1}{n\operatorname{ctg}(n\phi(t)) - \frac{r_2}{2}}. \tag{16}$$

Но приравнивая в этом соотношении коэффициенты при t^3, получаем равенство $r_2^2 = (\frac{13}{12}r_2^2 + \frac{n^2}{3})$, которое невозможно при $r_2 \neq 0$. Последняя возможность — это a-решение при $m = 0$ и $r_2 = 0$, т.е. $\phi(t) = t$. Но эта функция не удовлетворяет уравнению (16).

Если имеется биголоморфное отображение ростка одной гиперповерхности вида $v = ur(\sigma|z|^2)$, где $r'(0) = 1$, на другую такую гиперповерхность, оставляющее начало координат на месте, то, как это следует из анализа младших компонент возникающего при этом соотношения, набор (σ, r_2, r_3) инвариантен. А этого достаточно, чтобы различать все гиперповерхности, имеющие не менее, чем трехмерную алгебру автоморфизмов. Т.е. гиперповерхности могут быть эквивалентны только в случае, если они попали в один класс по размерности алгебры Ли и имеют совпадающий набор значений определяющих параметров.

Рассмотрим теперь определяющие функции , имеющие при $t = 0$ нуль кратности s, большей, чем единица. Такую гиперповерхность локально можно задать уравнением

$$v = ur(|z|^2) = u(\sigma t^s + r_{s+1}(t^s) + \dots).$$

Подстановка в (4) значения $\bar{z} = 0$ с учетом того, что $g(0,0) = 0$, дает

$$g(z,w) = b(w)w, \text{ причем } \operatorname{Im} b(u) = 0. \tag{17}$$

Запишем f в виде

$$f(z,w) = c(w)z + \tilde{f}(z,w), \text{ где } \tilde{f}(z,w) = \sum f_j(w)w^j \text{ при } j = 0,2,3,\dots \tag{18}$$

Подставляя это в $\mathcal{L} = 0$, видим, что пара функций (b,c) входит только в диагональные члены (т.е. бистепеней (m,m)), а $\tilde{f}$ — только в недиагональные. Равенство нулю внедиагональной части $\mathcal{L} = 0$ после деления на $2r'(|z|^2)|z|^4$ дает

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\tilde{f}(z,w)}{z}\right) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Поскольку Γ в общей точке невырождена, то обращение в ноль вещественной части мероморфной функции означает, что эта функция — мнимая константа, откуда, в силу выбора $\tilde{f}$, получаем, что $\tilde{f} = 0$. Диагональная часть — это условие на (b,c). Если $b(w) = \sum b_jw^j$, $c(w) = \sum c_jw^j$ — решение, то любая пара $b(w) = b_{n+1}w^{n+1}$, $c(w) = c_nw^n$ — тоже решение. Соответствующее поле имеет вид

$$2\operatorname{Re}\left(c_nw^nz\frac{\partial}{\partial z} + b_{n+1}w^{n+1}\frac{\partial}{\partial w}\right). \tag{19}$$

Значению $b(w) = b_0$ соответствует $c(w) = 0$, но эта пара дает известное поле $2\,\mathrm{Re}\left(b_0 w \frac{\partial}{\partial w}\right)$. Если в паре (b_{n+1}, c_n) значение $b_{n+1} = 0$, из условия $\mathcal{L} = 0$ следует, что $c_n = 0$, поэтому, будем считать, что вещественное число $b_{n+1} \neq 0$. После деления, можем полагать, что $b_{n+1} = 1$, при этом $c_n = K + iM$. В результате, после подстановки $\sigma|z|^2 = t$ соотношение принимает вид

$$(1 + r(t)^2 \sin(n\phi(t)) = 2r'(t)t(K\cos(n\phi(t)) - M\sin(n\phi(t)). \tag{20}$$

Если здесь $n = 0$, то $K = 0$ и поле приобретает вид

$$2\,\mathrm{Re}\left(iMz\frac{\partial}{\partial z} + w\frac{\partial}{\partial w}\right),$$

что представляет собой комбинацию двух известных полей вида (2). Поэтому полагаем $n > 0$. Интегрируя уравнеие (20), получаем

$$2\frac{K}{n}\ln(\sin(n\phi(t))) - 2M\phi(t) = \ln(Ct), \text{ где } C = \mathrm{const},$$

или

$$\sin(n\phi(t)) = (Ct)^{\frac{n}{2K}} \exp\left(\frac{Mn}{K}\phi(t)\right).$$

Сравнивая младшие члены разложения правой и левой части, получаем

$$nt^s = C^{\frac{n}{2K}} t^{\frac{n}{2K}},$$

откуда получаем, что $K = \frac{n}{2s}$, а $C = n^{\frac{1}{s}}$. В результате чего соотношение принимает вид

$$\sin(n\phi(t)) = nt^s \exp(2Ms\phi(t)). \tag{21}$$

Поскольку функция $r(t)$, а вместе с ней и $\phi(t) = \mathrm{arctg}(r(t))$ имеет в начале координат ноль кратности s, то ϕ можно записать как $\phi(t) = \psi(t^s)$, где ψ имеет разложение

$$\psi(\tau) = \tau + \frac{\psi_2}{2!}\tau^2 + \frac{\psi_3}{3!}\tau^3 + \ldots \tag{22}$$

Тогда уравнение, которое определяет ψ и соответственно r, можно записать в виде

$$\sin(n\psi(\tau)) = n\tau \exp(2Ms\psi(\tau)). \tag{23}$$

Это неявное соотношение позволяет для любого фиксированного набора $(s \geq 2, n \geq 1, M \in \mathbf{R})$ рекуррентно вычислять коэффициенты разложения $\psi = \psi(\tau, s, n, M)$:

$$\psi_2 = 4Ms, \quad \psi_3 = 36(Ms)^2 + n^2, \ldots \tag{24}$$

Если в уравнении на ψ заменить $2Ms$ на $\frac{\psi_2}{2}$, то получим соотношение

$$\sin(n\psi(\tau)) = n\tau \exp\left(\frac{\psi}{2}\psi(\tau)\right), \tag{25}$$

которое в точности совпадает с уравнением (7) на ϕ при $s = 1$ и позволяет однозначно определить функцию $\psi(t) = \psi(t, s, n, \psi_2)$.

Если имеет место равенство $\psi(\tau, s_1, n_1, M_1) = \psi(\tau, s_2, n_2, M_2)$, то это означает, что $s_2 = s_1$, т.к. это кратность нуля, что $M_2 = M_1$, т.к. $\psi_2 = 4Ms$; и что $n_2 = n_1$, т.к. $\psi_3 = 36(Ms)^2 + n^2$. Нетрудно показать, что набор $(\sigma, s, \psi_2, \psi_3)$ биголоморфно инвариантен, а он различает все полученные гиперповерхности.

Итак, для любого фиксированного набора $(\sigma, s \geq 2, n \geq 1, M \in \mathbf{R})$ существует единственная гиперповерхность вида $v = ur(|z|^2)$, которая имеет **трехмерную** алгебру Ли и которая удовлетворяет данным этого набора. А именно гиперповерхность

$$v = u\,\mathrm{tg}(\sigma\psi(|z|^{2s})), \text{ где } \psi = \psi(t, s, n, \psi_2). \tag{26}$$

При этом третье поле имеет вид

$$X_3 = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{2n + i\psi_2}{4s} z w^n \frac{\partial}{\partial z} + w^{n+1}\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

Все прочие гиперповерхности вида $v = ur(|z|^2)$, где функия r имеет при $t = 0$ ноль конечной кратности большей, чем один, имеют двумерную алгебру Ли. Гиперповерхности вида $v = ur(\sigma|z|^2)$ эквивалентны только при полном совпадении наборов параметров (σ, s, n, ψ_2).

Чтобы добиться единообразия как при $s > 1$, так и при $s = 1$, можно и исходное уравнение записывать в виде $v = ur(\sigma|z|^{2s})$, где $r(\tau) = t + \frac{r_2}{2}\tau^2 + \ldots$, тогда $r(\tau) = \mathrm{tg}(\psi(\tau))$, и при этом $\psi_2 = r_2$ и полученный результат естественно объединяется со случаем (B) при $s = 1$. Т.е. удобно считать, что этот случай содержит дополнительный параметр s, который принимает как значение $s = 1$, так и $s = 2, 3, \ldots$ и описывает все гиперповерхности с трехмерной алгеброй Ли.

3 Итоги

Гиперповерхность $\Gamma = \{v = ur(|z|^2)\}$ эквивалентна гиперплоскости в том и только том случае, когда r постоянна. В этом случае $\mathrm{aut}\,\Gamma_0$ - бесконечномерна.

Пусть σ — это параметр, который принимает два значения ± 1. Тогда все гиперповерхности указанного вида с конечномерными симметриями распадаются на четыре типа.

(AB) Пятимерную алгебру Ли имеют гиперповерхности вида $\Gamma = \{v = ur(\sigma|z|^2)\}$ с

$$r(t) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2m}\arcsin(2mt)\right) \quad \text{при} \quad m = 1, 2, 3 \ldots$$

Три дополнительных поля имеют вид

$$X_3 = 2\,\mathrm{Re}\left(mzw^{2m}\frac{\partial}{\partial z} + w^{2m+1}\frac{\partial}{\partial w}\right),$$

$$X_4 = 2\,\mathrm{Re}\left(w^m(1 + 2imz^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2izw^{m+1}\frac{\partial}{\partial w}\right),$$

$$X_5 = 2\,\mathrm{Re}\left(w^m(i + 2mz^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2zw^{m+1}\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

При этом все пять полей попали в стабилизатор, причем четыре из них обращаются в ноль на прямой $w = 0$. Это означает, что порожденные полями (X_2, X_3, X_4, X_5) преобразования оставляют каждую точку этой прямой неподвижной.

Поверхность этой серии кодируется дискретной парой (σ, m).

(**A**) Четырехмерную алгебру Ли имеют гиперповерхности вида $\Gamma = \{v = ur(\sigma|z|^2)\}$ с

$$r(t) = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{r_2}\ln(1 - r_2 t)\right), \text{ где } r_2 \neq 0 \text{ или } r(t) = \operatorname{tg}(t).$$

При этом два дополнительных поля имеют вид

$$X_3 = 2\operatorname{Re}\left((1 - r_2 z^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2izw\frac{\partial}{\partial w}\right),$$
$$X_4 = 2\operatorname{Re}\left(i(1 + r_2 z^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2zw\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

Причем стабилизатор двумерный, порождается (X_1, X_2). Орбита начала координат — это особая прямая: $w = 0$.

Поверхность этой серии кодируется парой (σ, r_2), где r_2 - вещественный параметр.

(**B**) Трехмерную алгебру Ли имеют гиперповерхности вида $\Gamma = \{v = ur(\sigma|z|^2)\}$, такие, что $r(t) = \operatorname{tg}(\phi(t^s))$, где ϕ — это решение неявного соотношения

$$\sin(n\phi(t)) = nt\exp\left(\frac{r_2}{2}\phi(t)\right)$$

при условии, что либо $s > 1$, либо n — нечетное положительное число, либо $r_2 = 0$. При этом третье поле имеет вид

$$X_3 = 2\operatorname{Re}\left(\frac{2n + ir_2}{4s}zw^n\frac{\partial}{\partial z} + w^{n+1}\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

и содержится в стабилизаторе, который в этом случае совпадает с полной алгеброй.

Поверхность этой серии кодируется дискретным набором (σ, s, n) и вещественным параметром r_2.

(**O**) Все прочие гиперповерхности такого вида имеют двумерную алгебру Ли, оба поля лежат в стабилизаторе.

Таким образом, всегда имеет место оценка

$$\dim\operatorname{aut}\Gamma_0 \leq 5\ , \text{ причем если } r'(0) = 0\ , \text{то} \dim\operatorname{aut}\Gamma_0 \leq 3.$$

Такая же оценка остается и для стабилизаторов

$$\dim\operatorname{aut}_0\Gamma_0 \leq 5\ , \text{ причем если } r'(0) = 0\ , \text{то} \dim\operatorname{aut}_0\Gamma_0 \leq 3.$$

Гиперповерхности из списков (AB), (A), (B) могут быть эквивалентны только при полном совпадении набора определяющих параметров.

Наличие серии гиперповерхностей (AB) с пятимерной алгеброй показывает, что наличие пятимерного стабилизатора еще не означает, что росток сферичен. Но если вопрос задать иначе: *«Верно ли, что полную восьмимерную алгебру имеет только сфера?»*, то ответа на него у нас нет.

Все поля из алгебры $\mathrm{aut}\,\Gamma$ являются полиномиальными и, тем самым, определены во всем пространстве $\mathbf{C}^2$. Соответствующие дифференциальные уравнения интегрируются в многозначных элементарных функциях. Причем во всех случаях, за исключением X_4 и X_5 в (AB) это действие дается явным выражением, а для этих полей действие определяется из неявного уравнения в элементарных функциях.

Смена знака σ не отражается на алгебре Ли, т.е.

$$\mathrm{aut}\{v = u(|z|^2)\} = \mathrm{aut}\{v = u(-|z|^2)\}$$

и эти гиперповерхности — две разных орбиты действия одной локальной группы.

Все гиперповерхности серий (AB) и (A) сферичны вне прямой вырождения $w = 0$. Все гиперповерхности серии (B) в точке общего положения однородны и попадают, тем самым, в список Э.Картана.

(AB) — это дискретная серия и таким образом она нуль-мерна, (A) и (B) содержат однопараметрические семейства, тип (O) имеет бесконечную размерность.

И последнее. Эти четыре типа гиперповерхностей поразительно напоминают известную классификацию людей по группам крови: (O), (A), (B), (AB). Следует отметить, что, как и в случае с гиперповерхностями типа (AB), группа крови (AB) является самой редкой. А если к четырем классам добавить наш параметр σ, который, как и резус-фактор Rh, принимает значение $\pm$, то аналогия становится полной.

4 Ситуация в $\mathbf{C}^3$

Если Γ — вещественная гиперповерхность в $\mathbf{C}^3$, то что можно сказать о размерности $\mathrm{aut}\,\Gamma_\xi$? Если росток Леви-невырожденный, то как это следует из [2] эта размерность не превосходит 15. Поэтому даже если росток вырожден, но представляющая его гиперповерхность Леви-невырождена в общей точке, а у нас есть 16 полей, то они обязаны быть линейно зависимыми. Т.е. мы получаем, что и в этом случае размерность не выше 15-ти. И вообще, если речь идет о полной алгебре, то оценку размерности можно проводить в точке общего положения. Причем если у нас есть хотя бы 5 независимых полей, то в точках, где они линейно независимы, как касательные вектора, гиперповерхность локально однородна. Т.е. если мы интересуемся ростками с автоморфизмами размерности 5 и выше, то можно говорить только об однородных (в точке общего положения) ростках. Если при этом в общей точке есть несферичность (т.е. неэквивалентность одной их двух невырожденных гиперквадрик), то, как показал Лобода [7], размерность не превосходит 8. Если в общей точке форма Леви однородной гиперповерхности имеет вырождение ранга один, то такой росток попадает в список Фелса и Каупа [8], и размерность не превосходит 10. Если форма Леви имеет ранг ноль (если на открытом подмножестве — значит, и повсюду), то гиперповерхность локально эквивалентна гиперплоскости и ее автоморфизмы бесконечномерны.

Итак, альтернатива такова: либо размерность бесконечна и это гиперплоскость, либо она не выше 15-ти.

Алгебру Ли размерности 15 имеют обе гиперквадрики, т.е.

$$\mathrm{Im}\, w = |z_1|^2 + |z_2|^2 \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\, w = |z_1|^2 - |z_2|^2$$

Стабилизатор каждой гиперквадрики имеет размерность 10.

Единственная невырожденная несферическая гиперповерхность из списка Лободы, имеющая 8-мерные автоморфизмы, это

$$v = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + |z_1|^4$$

— поверхность Винкельмана. Ее стабилизатор имеет размерность 3.

Световой конус:

$$(\operatorname{Im} w)^2 = (\operatorname{Im} z_1)^2 + (\operatorname{Im} z_2)$$

— единственная гиперповерхность из списка Фелса и Каупа, имеющая 10-мерные автоморфизмы. Она имеет 5-мерный стабилизатор.

Можно задать ряд вопросов.

- Существуют ли ростки со стабилизаторами размерностей от 11 до 15?
- Верно ли, что если стабилизатор 10-мерный, то росток сферичен?
- Верно ли, что что полную 15-мерную алгебру имеют только сферические ростки?

Если гиперповерхность имеет конечный тип, то ее уравнение можно записать в виде

$$\Gamma = \{\operatorname{Im} w = P_m(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + O(m+1)\}, \qquad (27)$$

где P — ненулевая однородная форма степени m от своих 4 переменных без гармонических членов, а $O(m+1)$ — это члены веса $m+1$ и выше. Гиперповерхность

$$Q = \{\operatorname{Im} w = P_m(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)\}$$

является модельной по отношению к гиперповерхностям вида (27). Имеется каноническое точное представление $\operatorname{aut}_0 \Gamma_0$ в $\operatorname{aut}_0 Q_0$. Поэтому было бы любопытно выяснить какие значения может принимать размерность $\operatorname{aut}_0 Q_0$ для различных форм P_m, каково ее максимально возможное значение и на каких формах реализуется этот максимум.

Эта работа была завершена в Канберре, в Национальном австралийском университете, куда автор был любезно приглашен профессором А.Исаевым. Во время работы над статьей автор имел полезные обсуждения с А.Исаевым и И.Коссовским, за что он им искренне благодарен. Когда эта работа готовилась к печати, автору стало известно, что проф. Ламель из Венского университета также готовит публикацию по гиперповерхностям бесконечного типа в $\mathbf{C}^2$. Было бы интересно сравнить его результаты с теми, что получены в этой работе.

Список литературы

[1] *Poincare H*, Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1907, p. 185–220.

[2] *Chern S.S., Moser J.K.*, Real hypersurfaces in complex manifold // Acta Math., 1974, v.133, № 3–4, p.219–271.

[3] *Cartan E.*, Sur la geometrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes // Ann. Math. Pura Appl., 1932, v. (4) 11, p.17–90 (Oeuvres II, 2, 1231–1304).

[4] *Белошапка В.К.*, О голоморфных преобразованиях квадрики // Мат. сборник, 1991, т. 182, № 2, с. 203–219.

[5] *Ершова А.Е.*, Автоморфизмы вырожденных модельных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^2$. Механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, курсовая работа, 1996.

[6] *Kollar M.*, Normal forms for hypersurfaces of finite type in $\mathbf{C}^2$ // Mathematical Research Letters, 2005, v. 12, p. 897–910.

[7] *Лобода А. В.*, О размерности группы, транзитивно действующей на гиперповерхности в $\mathbf{C}^3$ // Функц. анализ и его прил., 1999, т. 33, № 1, с. 68–71.

[8] *Fels G., Kaup W.*, Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 // Acta Math., 2008, v. 201, № 1, p. 1–82.