

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

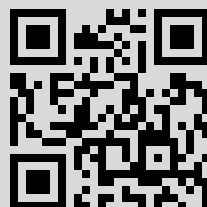
В. К. Белошапка, О размерности группы автоморфизмов аналитической гиперповерхности, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1979, том 43, выпуск 2, 243–266

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 109.252.105.98

8 мая 2017 г., 11:19:11



В. К. БЕЛОШАПКА

О РАЗМЕРНОСТИ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Введение

Данная работа посвящена изучению групп автоморфизмов вещественно аналитических гиперповерхностей. Э. Картаном ⁽¹⁾ было замечено, что из результатов Тресси ⁽²⁾ следует, что как только группа автоморфизмов вещественной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^2$ содержит более чем трехпараметрическое семейство, то она зависит от восьми вещественных параметров. Используя теорему Мозера о приведении гиперповерхности к нормальной форме ⁽³⁾, мы получили в этом направлении следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M — невырожденная вещественно аналитическая гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^n$, точка $\xi \in M$ и G_ξ — группа стабильности точки ξ , т. е. G_ξ состоит из автоморфизмов M , оставляющих точку ξ неподвижной. Тогда вещественная размерность G_ξ не может быть равной n^2 .

Из теоремы Мозера следует, что эта размерность не выше чем $(n^2 + 1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M — невырожденная вещественно аналитическая гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^2$ и $\xi \in M$. Тогда как только $\dim_{\mathbb{R}} G_\xi > 1$, то гиперповерхность M сферическая и, следовательно, $\dim_{\mathbb{R}} G_\xi = 5$.

Теорема 2 дает полное описание размерностей групп стабильности вещественно аналитических гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$. Теорема Мозера оставляет следующие возможности для размерностей таких групп: 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Размерность 5 реализуется для гиперквадрики

$$S = \{(z, u + iv) \in \mathbb{C}^2 : v = |z|^2\}.$$

Размерности 4, 3 и 2 запрещаются теоремой 2. Размерность 1 реализуется для гиперповерхности

$$\{(z, u + iv) \in \mathbb{C}^2 : v = |z|^2 + |z|^8\}.$$

Нулевая размерность — это общий случай (см. теорему 3).

В первоначальном варианте этой статьи теорема 2 оставляла незапрещенной размерность 2. А. В. Лобода заметил, что для реализации размерности 2 необходимо, чтобы параметр λ обладал свободой, но это означает, что многочлен H_λ имеет весьма специальный вид, который не

допускает никакой свободы для параметра a (см. § 3, стр. 264). Автор благодарен ему за это важное замечание.

ТЕОРЕМА 3. Пусть M — невырожденная вещественно аналитическая гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^2$ и $\{c_{mn}(n)\}$ — коэффициенты ее нормальной формы в окрестности некоторой точки $\xi \in M$. Тогда если точка ξ неомбилическая, т. е. $c_{42}(0) \neq 0$, то G_ξ состоит не более чем из двух преобразований.

Если же добавить условие

$$(c_{42} \cdot c_{25} + 3c_{24} \cdot c_{43})|_{u=0} \neq 0,$$

то можно утверждать, что группа G_ξ не содержит преобразований, отличных от тождественного.

Из аналогичных ранее известных результатов следует отметить результат Бернса, Шнайдера и Уэллса (⁴). Они показали, что в пространстве функций, определяющих строго псевдовыпуклые области, множество функций, определяющих области без автоморфизмов, является множеством второй категории Бэра.

Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю А. Г. Витушкину.

§ 1. Изучение младших компонент отображения

Рассмотрим в комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ ($n \geq 1$) с координатными функциями $z^1, \dots, z^n$, $w = u + iv$ вещественно аналитическую гиперповерхность M . Пусть ρ — ее определяющая функция, т. е. ρ — вещественнозначная вещественно аналитическая функция в некоторой области $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$, такая, что

$$M = \{\xi \in V : \rho(\xi) = 0\},$$

причем $\text{grad } \rho \neq 0$ в точках M . Пусть, далее, $0 \in V$ и $\rho(0) = 0$, т. е. гиперповерхность M содержит начало координат. Равенство $\rho(\xi) = 0$ в окрестности точки 0 можно разрешить относительно одной из вещественных координат и, после некоторой линейной замены, уравнение M примет вид

$$v = F(z, \bar{z}; u), \quad (1)$$

где $z = (z^1, \dots, z^n)$, F — вещественнозначная вещественно аналитическая функция и $dF|_0 = 0$.

Относительно гиперповерхности M делаем следующее предположение. Ее форма Леви в точке 0

$$\langle z, z \rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^n h_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad \text{где } h_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right|_0,$$

невырождена, т. е. $\det(h_{\alpha\beta}) \neq 0$.

Введем в пространстве сходящихся степенных рядов от переменных $z, \bar{z}$ и u следующее разложение:

$$G(z, \bar{z}; u) = \sum_{k,l} G_{kl}(z, \bar{z}; u),$$

где ряд G_{kl} таков, что

$$G_{kl}(t_1 z, t_2 \bar{z}; u) = t_1^{k,l} t_2^{k,l} G_{kl}(z, \bar{z}; u)$$

для всех комплексных чисел t_1 и t_2 . Это разложение мы будем называть δ -разложением, а G_{kl} — (k, l) δ -компонентой G .

Пусть $\mathfrak{F}$ — пространство сходящихся вещественных степенных рядов от $z, \bar{z}$ и u без постоянных и линейных членов, подпространство $\mathfrak{N}$ состоит из рядов вида

$$R = \sum_{\min(k,l) \leq 1} R_{kl} + r_{11} \langle z, z \rangle + (r_{10} + r_{01}) \langle z, z \rangle^2 + r_{00} \langle z, z \rangle^3,$$

а подпространство $\mathfrak{N}$ определим так:

$$\mathfrak{N} = \{N \in \mathfrak{N} : N_{kl} = 0, \text{ если } \min(k, l) \leq 1, \operatorname{tr} N_{22} = \operatorname{tr}^2 N_{32} = \operatorname{tr}^3 N_{33} = 0\}.$$

Операция tr — это линейный оператор в пространстве $\mathfrak{F}$, переводящий ряды типа (k, l) в ряды типа $(k-1, l-1)$ (определение этой операции см. (3), стр. 232). Сформулируем необходимые нам свойства оператора tr в виде следующей леммы.

ЛЕММА 1 (см. (3), стр. 233). а) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}$, т. е. всякий ряд $F \in \mathfrak{F}$ однозначно представим в виде $F = R + N$, где $R \in \mathfrak{N}$, $N \in \mathfrak{N}$.

б) Это разложение инвариантно относительно линейных преобразований, сохраняющих форму $\langle z, z \rangle$. В частности, если $N(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}$ и $\mathcal{U} \in SU(n)$, то $N(\mathcal{U}z, \overline{\mathcal{U}z}) \in \mathfrak{N}$.

с) Подпространство $\mathfrak{N}$ является идеалом в $\mathfrak{F}$.

Отметим также, что для $n=1$ условия $\operatorname{tr} N_{22} = \operatorname{tr}^2 N_{32} = \operatorname{tr}^3 N_{33} = 0$ означают, что $N_{22} = N_{32} = N_{33} = 0$.

Осуществляя голоморфные замены координат в окрестности точки 0, сохраняющие вид уравнения (1), можно менять функцию F . Сформулируем основной результат работы Мозера.

ЛЕММА 2 (см. (3), стр. 234, теорема 2.2). Уравнение гиперповерхности M голоморфной заменой координат можно преобразовать к виду

$$v = \langle z, z \rangle + N(z, \bar{z}; u), \text{ где } N \in \mathfrak{N}. \quad (2)$$

Такая замена называется приведением M к нормальной форме.

Итак, пусть гиперповерхность M приведена к нормальной форме и (2) — ее уравнение. Пусть, далее, h — автоморфизм этой гиперповерхности, оставляющий неподвижным начало координат, т. е. $h : V \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ —

голоморфное отображение такое, что

$$\det h'|_0 \neq 0, \quad (3)$$

$$h(0) = 0, \quad (4)$$

$$h(M) \cap V \subset M. \quad (5)$$

Первые n координатных функций h обозначим через f , последнюю — через g , т. е.

$$h = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Тогда из (5) следует тождество:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} g(z, u + i(\langle z, z \rangle + N)) = \\ & = \langle f(z, u + i(\langle z, z \rangle + N)), f(z, u + i(\langle z, z \rangle + N)) \rangle + \\ & + iN(f(z, u + i(\langle z, z \rangle + N)), \bar{f}(z, u + i(\langle z, z \rangle + N)), \operatorname{Reg}(z, u + i(\langle z, z \rangle + N))). \end{aligned} \quad (6)$$

Это тождество есть аналитическая запись того факта, что как только аргумент в отображении h удовлетворяет уравнению (2), значения этого отображения удовлетворяют тому же уравнению. Чтобы сделать возможным вычисления, связанные с этим тождеством, введем в пространстве $\mathfrak{F}$ следующее разложение:

$$F(z, \bar{z}; u) = \sum_k F_k(z, \bar{z}; u),$$

где

$$F_k(tz, t\bar{z}; t^2u) = t^k F_k(z, \bar{z}; u)$$

для всех комплексных чисел t . Это разложение мы назовем ε -разложением. Аналогичное разложение введем в пространстве сходящихся степенных рядов от z и w :

$$g(z, w) = \sum_k g_k(z, w),$$

где многочлен g_k таков, что

$$g_k(tz, t^2w) = t^k g_k(z, w)$$

для всех комплексных чисел t .

Уравнение (2) запишем так:

$$v = \langle z, z \rangle + \sum_k H_k(z, \bar{z}; u),$$

где H_k — k -ая ε -компонента ряда N . Из условия $N \in \mathfrak{N}$ следует, что первой ненулевой компонентой N может быть только $H_4 = N_{22}(z, \bar{z})$, а при $n=1$ только H_6 . Запишем в этих обозначениях тождество (6):

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} ig(z, u + i(\langle z, z \rangle + H_4 + \dots)) + \\ & + \langle f(z, u + i(\langle z, z \rangle + H_4 + \dots)), f(z, u + i(\langle z, z \rangle + H_4 + \dots)) \rangle + \\ & + H_4(f(z, u + i(\langle z, z \rangle + H_4 + \dots)), \bar{f}(z, u + i(\langle z, z \rangle + H_4 + \dots))) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим гиперквадрику

$$S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} : v = \langle z, z \rangle\}.$$

Эта поверхность с помощью дробно-линейного отображения

$$Z^\alpha = \frac{2z^\alpha}{w+i}, \quad W = \frac{w-i}{w+i}$$

переводится в поверхность $\langle Z, Z \rangle + W\bar{W} = 1$, которая, если $\langle z, z \rangle = z^1 \bar{z}^1 + \dots + z^n \bar{z}^n$, является единичной сферой пространства $\mathbb{C}^{n+1}$.

Группа автоморфизмов S , оставляющих точку 0 неподвижной, состоит из дробно-линейных отображений

$$h^s = \begin{pmatrix} f^s \\ g^s \end{pmatrix}$$

вида

$$f^s = \lambda' \mathcal{U}'(z + wa)/\Delta, \quad g^s = \pi' |\lambda'|^2 w/\Delta, \quad (8)$$

$$\Delta = 1 - [2i\langle z, a' \rangle + (r' + i\langle a', a' \rangle)w],$$

где $\lambda' \in \mathbb{C}^1 - \{0\}$, $\pi' = \pm 1$, $\mathcal{U}' \in SU(n, \pi)$, т. е. $\mathcal{U}'$ — линейное преобразование такое, что $\langle \mathcal{U}'z, \mathcal{U}'z \rangle = \pi \langle z, z \rangle$ и $\det \mathcal{U}' = 1$, $a' \in \mathbb{C}^n$, $r' \in \mathbb{R}^1$ (см. (3), стр. 225).

Отметим, что если h^s — автоморфизм гиперповерхности S , то мы имеем тождество, аналогичное тождеству (7):

$$\operatorname{Re} ig^s(z, u + i\langle z, z \rangle) + \langle f^s(z, u + i\langle z, z \rangle), f^s(z, u + i\langle z, z \rangle) \rangle = 0. \quad (9)$$

Тождество (7) мы будем рассматривать как уравнение относительно неизвестного отображения h . Отделяя ε -компоненты тождества и последовательно приравнивая их к нулю, мы будем получать уравнения относительно последовательных ε -компонент отображения h .

Уравнения, полученные из младших компонент тождества (7), оказываются недостаточными для однозначного определения соответствующих компонент отображения h . Возникает потребность во введении параметров. Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, что если

вводить эти параметры согласованно с системой параметров, задающих автоморфизм S , то младшие компоненты отображения h окажутся равными соответствующим компонентам отображения h^* .

Переходя к вычислениям, обозначим k -ю ε -компоненту тождества (7) через Φ_k . Имеем:

$$\Phi_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Первый шаг: $\Phi_1 = \operatorname{Re} i g_1, g_1 = \alpha z$. Получаем $\alpha = 0$, т. е. $g_1 = 0$.

Второй шаг: $\Phi_2 = \operatorname{Re}(i g_2 + \langle f_1, f_1 \rangle) |_{v=\langle z, z \rangle}$,

$$f_1 = Az, \quad g_2 = \alpha \omega + \beta(z),$$

где A — линейный оператор в $\mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}^1$, β — квадратичная форма от z . Подставляя, получаем:

$$\Phi_2 = -\operatorname{Im} \alpha \cdot u - \operatorname{Re} \alpha \langle z, z \rangle + \operatorname{Re} i \beta(z) + \langle Az, Az \rangle.$$

Отделяя ε -компоненты Φ_2 , находим:

$$(2, 0) \quad \beta(z) = 0,$$

$$(1, 1) \quad \langle Az, Az \rangle - \operatorname{Re} \alpha \langle z, z \rangle = 0,$$

$$(0, 0) \quad \operatorname{Im} \alpha = 0.$$

Поэтому можно написать:

$$f_1 = \lambda \mathcal{U} z, \quad g_2 = \pi |\lambda|^2 \omega,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}^1$, $\pi = \pm 1$, $\mathcal{U} \in SU(n, \pi)$ (см. (8)).

Отметим, что если $\lambda = 0$, то $\det h'|_0 = 0$, поэтому из (3) следует, что $\lambda \neq 0$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — две голоморфные вектор-функции от $z^1, \dots, z^n$. Тогда из тождества $\langle \varphi(z), z \rangle = \langle \psi(z), z \rangle$ следует, что $\varphi(z) = \psi(z)$.

Доказательство. Имеем:

$$\langle (\varphi - \psi)(z), z \rangle = 0,$$

т. е.

$$\sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta} (\varphi - \psi)^\alpha(z) \bar{z}^\beta = 0.$$

Дифференцируя это тождество по $\bar{z}^{\beta_0}$, получаем:

$$\sum_{\alpha} h_{\alpha\beta_0} (\varphi - \psi)^\alpha(z) = 0.$$

Записывая эти тождества для $\beta_0 = 1, \dots, n$, получаем линейную систему относительно $(\varphi - \psi)(z)$. Ее определитель $\det(h_{\alpha\beta}) \neq 0$, поэтому $(\varphi - \psi)(z) = 0$. Лемма доказана.

Третий шаг: $\Phi_3 = \operatorname{Re}(i g_3 + 2\langle f_2, f_1 \rangle) |_{v=\langle z, z \rangle}$,

$$f_2 = A(z) + B\omega, \quad g_3 = \omega l(z) + \beta(z),$$

где $A(z)$ — векторзначная квадратичная форма от z , $B \in \mathbb{C}^n$, $l(z)$ — линейная и $\beta(z)$ — кубическая форма от z .

Представим $l(z)$ в виде $\langle z, \alpha \rangle$, где $\alpha \in \mathbb{C}^n$. Подставляя, получаем:

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \operatorname{Re}(i(u + i\langle z, z \rangle)\langle z, \alpha \rangle + i\beta(z) + 2\langle A(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle + \\ &\quad + 2(u + i\langle z, z \rangle)\langle B, \lambda \mathcal{U}z \rangle) = \\ &= \operatorname{Re}(iu\langle z, \alpha \rangle - \langle z, z \rangle\langle z, \alpha \rangle + i\beta(z) + 2\langle A(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle + \\ &\quad + 2u\langle B, \lambda \mathcal{U}z \rangle + 2i\langle z, z \rangle\langle B, \lambda \mathcal{U}z \rangle).\end{aligned}$$

Отделяем ε -компоненты:

$$\begin{aligned}(3, 0) \quad & \beta(z) = 0, \\ (2, 1) \quad & -\langle z, z \rangle\langle z, \alpha \rangle + 2\langle A(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle - 2i\langle z, z \rangle\langle \lambda \mathcal{U}z, B \rangle = 0, \\ (1, 0) \quad & i\langle z, \alpha \rangle + 2\langle \lambda \mathcal{U}z, B \rangle = 0.\end{aligned}$$

Имеем: $\langle z, \alpha \rangle = 2i\langle \lambda \mathcal{U}z, B \rangle$, или $\langle z, \alpha \rangle = \langle z, \mathcal{U}^{-1}(-2i\pi\bar{\lambda}B) \rangle$, откуда в силу леммы 3 получаем: $\alpha = \mathcal{U}^{-1}(-2i\pi\bar{\lambda}B)$ или $-2i\pi\bar{\lambda}B = \mathcal{U}\alpha$. Так как $\lambda \neq 0$, то мы можем положить $\alpha = -2i\pi|\lambda|^2a$, где $a \in \mathbb{C}^n$, и тогда получаем $B = \lambda \mathcal{U}a$.

Далее,

$$2\langle A(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle = 2i\langle z, z \rangle\langle \lambda \mathcal{U}z, B \rangle + \langle z, z \rangle\langle z, \alpha \rangle,$$

или

$$\langle A(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle = 2i|\lambda|^2\langle z, z \rangle\langle z, a \rangle.$$

Заменой в этом тождестве z на $\mathcal{U}^{-1}z$ получаем:

$$\langle A(\mathcal{U}^{-1}z), z \rangle = \langle 2i\lambda\langle \mathcal{U}^{-1}z, a \rangle z, z \rangle.$$

Следовательно, $A(\mathcal{U}^{-1}z) = 2i\lambda\langle \mathcal{U}^{-1}z, a \rangle z$ и, окончательно, $A(z) = 2i\lambda\langle z, a \rangle z$.

Таким образом,

$$f_2 = \lambda \mathcal{U}(\omega a + 2i\langle z, a \rangle z), \quad g_3 = 2i\pi|\lambda|^2\omega\langle z, a \rangle.$$

Вычисление Φ_4 уже довольно сложно, поэтому мы приведем его подробно. Введем для этого следующее обозначение. Мы будем писать $(x+1)^7 \rightarrow 7x^6$, чтобы отметить, что, выделяя из выражения $(x+1)^7$ слагаемые с каким-либо определенным свойством, мы получаем $7x^6$. В данном случае это слагаемое степени 6, а в наших вычислениях — это будут слагаемые, содержащие член определенного ε -веса.

Ч е т в е р т ы й ш а г. Слагаемые, входящие в Φ_4 и не содержащие H_4 , — это

$$\operatorname{Re}(ig_4 + 2\langle f_3, f_1 \rangle + \langle f_2, f_2 \rangle)|_{v=\langle z, z \rangle}.$$

Выявим члены (7) ε -веса 4, содержащие H_4 .

$$\operatorname{Re} ig \rightarrow \operatorname{Re} i\pi|\lambda|^2\omega \rightarrow \operatorname{Re} i|\lambda|^2 iH_4(z, \bar{z}) = -\pi|\lambda|^2 H_4(z, \bar{z}),$$

$$H_4(f, \bar{f}) \rightarrow H_4(f_1, \bar{f}_1) = H_4(\lambda \mathcal{U}z, \lambda \bar{\mathcal{U}}z).$$

Итак,

$$\Phi_4 = \operatorname{Re}(ig_4 + 2\langle f_3, f_1 \rangle + \langle f_2, f_2 \rangle) \big|_{v=\langle z, z \rangle} + \\ + H_4(\lambda \mathcal{U}z, \lambda \overline{\mathcal{U}}z) - \pi |\lambda|^2 H_4(z, \bar{z}),$$

$$f_3 = A(z) + \omega B(z), \quad g_4 = \alpha \omega^2 + \beta(z)\omega + \gamma(z),$$

где $A(z)$ — векторзначная форма третьей степени, $B(z)$ — линейный оператор, $\alpha \in \mathbf{C}^1$, $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ — это формы второй и четвертой степени соответственно. Подставляя и отделяя ε -компоненты, получаем:

$$\begin{aligned} (4, 0) \quad & \gamma(z) = 0, \\ (3, 1) \quad & -\langle z, z \rangle \beta(z) + 2\langle A(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle + 4\pi |\lambda|^2 \langle z, z \rangle \langle z, a \rangle^2 = 0, \\ (2, 2) \quad & \operatorname{Re}(-i\alpha \langle z, z \rangle^2 + \langle z, z \rangle 2\operatorname{Re}(i\langle B(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle) + \\ & + H_4(\lambda \mathcal{U}z, \lambda \overline{\mathcal{U}}z) - \pi |\lambda|^2 H_4(z, \bar{z})) = 0, \\ (2, 0) \quad & i\beta(z) + 4i\pi |\lambda|^2 \langle z, a \rangle = 0, \\ (1, 1) \quad & -2\operatorname{Re} \alpha \langle z, z \rangle + 2\operatorname{Re} \langle B(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle = 0, \\ (0, 0) \quad & \operatorname{Re}(i\alpha) + \pi |\lambda|^2 \langle a, a \rangle = 0. \end{aligned}$$

Равенство (0, 0) дает: $\operatorname{Im} \alpha = \pi |\lambda|^2 \langle a, a \rangle$. Положим

$$\alpha = \pi |\lambda|^2 (r + i\langle a, a \rangle), \text{ где } r \in \mathbf{R}^1.$$

Из (2, 0) получаем $\beta(z) = -4\pi |\lambda|^2 \langle z, a \rangle^2$, в силу чего (3, 1) принимает вид:

$$\langle A(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle = -4\pi |\lambda|^2 \langle z, z \rangle \langle z, a \rangle^2,$$

откуда

$$\langle A(\mathcal{U}^{-1}z), z \rangle = \langle -4\lambda \langle z, \mathcal{U}a \rangle^2 z, z \rangle.$$

По лемме 3 получаем:

$$A(\mathcal{U}^{-1}z) = -4\lambda \langle z, \mathcal{U}a \rangle^2 z,$$

или

$$A(z) = -4\lambda \langle z, a \rangle^2 \mathcal{U}z.$$

ЛЕММА 4. Из тождества (2,2) следует, что

$$H_4(\lambda \mathcal{U}z, \lambda \overline{\mathcal{U}}z) = \pi |\lambda|^2 H_4(z, \bar{z}).$$

Доказательство. В силу п. б) леммы 1, $H_4(\mathcal{U}z, \overline{\mathcal{U}}z) \in \mathfrak{R}$, поэтому

$$(H_4(\lambda \mathcal{U}z, \lambda \overline{\mathcal{U}}z) - \pi |\lambda|^2 H_4(z, \bar{z})) \in \mathfrak{N}.$$

Заметим, далее, что остальные слагаемые (2, 2) являются элементами подпространства $\mathfrak{N}$. Отделяя $\mathfrak{N}$ -компоненту (2, 2), получаем искомое соотношение (см. лемму 1, пункт а)). Теперь из (2, 2) следует, что

$$\operatorname{Im} \langle B(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle = \pi |\lambda|^2 (\langle a, a \rangle \langle z, z \rangle + 2\langle z, a \rangle \langle a, z \rangle).$$

Учитывая равенство (1, 1), получаем:

$$\langle B(z), \lambda \mathcal{U}z \rangle = \pi |\lambda|^2 ((r + i\langle a, a \rangle) \langle z, z \rangle + 2i\langle z, a \rangle \langle a, z \rangle),$$

или

$$\langle B\mathcal{U}^{-1}z, z \rangle = \langle \lambda ((r + i\langle a, a \rangle)z + 2i\langle z, \mathcal{U}a \rangle \mathcal{U}a), z \rangle,$$

откуда находим:

$$B\mathcal{U}^{-1}z = \lambda((r + i\langle a, a \rangle) + 2i\langle z, \mathcal{U}a \rangle \mathcal{U}a),$$

или

$$Bz = \lambda \mathcal{U}((r + i\langle a, a \rangle)z + 2i\langle z, a \rangle a).$$

Итак,

$$\begin{aligned} f_3 &= \lambda \mathcal{U}((r + i\langle a, a \rangle)z - 4\langle z, a \rangle^2 z + 2i\langle z, a \rangle \omega a), \\ g_4 &= \pi |\lambda|^2 ((r + i\langle a, a \rangle) \omega^2 - 4\langle z, a \rangle^2 \omega). \end{aligned}$$

Мы получили интересующий нас результат.

ЛЕММА 5. Если в формулах (8) положить $\lambda' = \lambda$, $\pi' = \pi$, $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$, $a' = a$ и $r' = r$, то для $k = 1, 2, 3, 4$ будут выполняться равенства:

$$f_{k-1}^s = f_{k-1}, \quad g_k^s = g_k. \quad (10)$$

Доказательство. В этом можно убедиться непосредственно, отделяя ε -компоненты формул (8).

§ 2. Существование запретов на размерность группы стабильности

При $k > 4$ положение меняется в следующем смысле.

ЛЕММА 6. Пусть $k > 4$. При фиксированных значениях параметров λ , $\mathcal{U}$, a и r равенство $\Phi_k = 0$ позволяет однозначно определить f_{k-1} и g_k .

Эта лемма есть простое следствие работы Мозера ⁽³⁾. Приведем доказательство в обозначениях этой работы:

$$\Phi_k = L(f_{k-1}, g_k) + \text{члены, зависящие от } f_{\mu-1} \text{ и } g_\mu,$$

где $\mu < k$. Уравнение $Lh = F \pmod{\mathfrak{N}}$ обладает единственным решением $h \in \mathfrak{D}_0$ (см. ⁽³⁾, стр. 234). Но при $k > 4$

$$h_k = \begin{pmatrix} f_{k-1} \\ g_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}_0.$$

Лемма доказана.

Таким образом, при $k > 4$ равенство $\Phi_k = 0$ не оставляет свободы для введения новых параметров. Однако, вычисляя f_{k-1} и g_k , мы используем, вообще говоря, не всю информацию, содержащуюся в этом равенстве. Цель этого параграфа есть получение таких дополнительных тождеств, которые дадут связи на введенные ранее параметры.

В том случае, когда гиперповерхность M сферическая, т. е. совпадает с гиперквадрикой S , эти параметры свободны, поэтому мы можем надеяться получить такие связи лишь в случае, когда M несферична.

Итак, пусть M несферична и пусть e — это номер первой ненулевой компоненты в ε -разложении $N(z, \bar{z}; u)$, т. е.

$$v = \langle z, z \rangle + H_e(z, \bar{z}; u) + \dots \quad (11)$$

— уравнение M .

Отметим, что $e \geq 4$, а при $n = 1$ $e \geq 6$.

Обозначим через Φ_k^s k -ю ε -компоненту (9) при $\lambda'=\lambda$, $\pi'=\pi$, $\mathcal{U}'=\mathcal{U}$, $a'=a$ и $r'=r$, а через D_k обозначим сумму тех слагаемых, входящих в состав Φ_k , которые зависят от H_p для какого-либо p .

ЛЕММА 7. Для $k=1, 2, \dots, e-1$ справедливы равенства

$$f_{k-1} = f_{k-1}^s, \quad g_k = g_k^s. \quad (12)$$

Доказательство. Проведем индукцию по k . Для $k=1, 2, 3, 4$ утверждение доказано (см. лемму 5). Пусть для некоторого p такого, что $4 < p < e-1$, выполняются равенства (12) с $k=1, 2, 3, \dots, p-1$. Это значит, с учетом (11), что $\Phi_p=0$ и $\Phi_p^s=0$ будут совпадать как уравнения относительно f_{p-1} и g_p , но по лемме 6 это уравнение обладает лишь единственным решением. Следовательно, (12) выполняется для $k=p$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Имеют место следующие равенства:

$$H_e(\lambda \mathcal{U}z, \lambda \overline{\mathcal{U}z}; |\lambda|^2 u) = \pi |\lambda|^2 H_e(z, \bar{z}; u), \quad (13)$$

$$f_{e-1} = f_{e-1}^s, \quad g_e = g_e^s. \quad (14)$$

Доказательство. Имеем:

$$\Phi_e = \text{Re}(ig_e + 2\langle f_{e-1}, f_1 \rangle + 2\langle f_{e-2}, f_2 \rangle + \dots) |_{v=\langle z, z \rangle} + D_e,$$

$$\Phi_e^s = \text{Re}(ig_e^s + 2\langle f_{e-1}^s, f_1 \rangle + 2\langle f_{e-2}^s, f_2 \rangle + \dots) |_{v=\langle z, z \rangle}.$$

Положим $\tilde{f} = f - f^s$, $\tilde{g} = g - g^s$, тогда из (12), (7) и (9) следует, что

$$\text{Re}(\tilde{ig}_e + 2\langle \tilde{f}_{e-1}, \lambda \mathcal{U}z \rangle) |_{v=\langle z, z \rangle} + D_e = 0.$$

Вычислим D_e :

$$\text{Re } ig \rightarrow \text{Re } i\pi |\lambda|^2 w \rightarrow \pi |\lambda|^2 H_e(z, \bar{z}; u),$$

$$H_e(f, \bar{f}; \text{Re } g) \rightarrow H_e(f, \bar{f}; \text{Re } g_2) = H_e(\lambda \mathcal{U}z, \lambda \overline{\mathcal{U}z}; |\lambda|^2 u).$$

Таким образом,

$$D_e = H_e(\lambda \mathcal{U}z, \lambda \overline{\mathcal{U}z}; |\lambda|^2 u) - \pi |\lambda|^2 H_e(z, \bar{z}; u)$$

и, следовательно, $D_e \in \mathfrak{N}$ (см. лемму 1, п. b)), т. е.

$$\text{Re}[\tilde{ig}_e + 2\langle \tilde{f}_{e-1}, \lambda \mathcal{U}z \rangle] |_{v=\langle z, z \rangle} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{N}}.$$

Но отсюда следует (см. (3), стр. 234), что $\tilde{f}_{e-1}=0$ и $\tilde{g}_e=0$ и, следовательно, $D_e=0$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если форма $\langle z, z \rangle$ является знакоопределенной (т. е. все ее собственные значения одного знака), то $|\lambda|=1$.

Доказательство. Отметим сразу, что $\pi=1$. Далее, пусть в многочлене $H_e(z, \bar{z}; u)$ (m, l) -компонента отлична от нуля. Отделяя (m, l) -компоненту (13), получаем:

$$h_{ml}(\lambda \mathcal{U}z, \overline{\lambda \mathcal{U}z}) (|\lambda|^2 u)^k = |\lambda|^2 h_{ml}(z, \bar{z}) u^k$$

или

$$h_{ml}(\mathcal{U}z, \overline{\mathcal{U}z}) = \mu h_{ml}(z, \bar{z}),$$

где $\mu = \lambda^{1-m-k} \bar{\lambda}^{1-l-k}$. Заметим, что $|\mu| = |\lambda|^{2-e}$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n$ поверхность K , определяемую уравнением $\langle z, z \rangle = \sigma$, где

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle z, z \rangle \text{ определена положительно,} \\ -1, & \text{если } \langle z, z \rangle \text{ определена отрицательно.} \end{cases}$$

Форма $\langle z, z \rangle$ знакоопределена, поэтому поверхность K компактна. Пусть в точке $z_0 \in K$ достигается максимум функции $|h_{ml}(z, \bar{z})|$ на этой поверхности. Получаем:

$$|\mu| = \frac{|h_{ml}(\mathcal{U}z_0, \overline{\mathcal{U}z_0})|}{|h_{ml}(z_0, \bar{z}_0)|} \leq 1,$$

откуда следует, что $|\lambda| \geq 1$.

Таким же образом, из равенства

$$h_{ml}(\mathcal{U}^{-1}z, \overline{\mathcal{U}^{-1}z}) = \mu^{-1} h_{ml}(z, \bar{z})$$

получим, что $|\mu^{-1}| \leq 1$ и $|\lambda| \leq 1$. Следствие доказано.

ЛЕММА 9.

$$\begin{aligned} D_{e+1} = \pi |\lambda|^2 2 \operatorname{Re} \bigg(& -2i \langle z, a \rangle H_e + (u + i \langle z, z \rangle) \partial H_e(a) + \\ & + 2i \langle z, a \rangle \partial H_e(z) + i \langle z, a \rangle (u + i \langle z, z \rangle) \frac{\partial}{\partial u} H_e \bigg) + \\ & + (H_{e+1}(\lambda \mathcal{U}z, \overline{\lambda \mathcal{U}z}; |\lambda|^2 u) - \pi |\lambda|^2 H_{e+1}(z, \bar{z}; u)). \end{aligned} \quad (15)$$

где $\partial H(v)$ — значение линейной формы ∂H на векторе v .

Доказательство. Имеем:

$$\operatorname{Re} i g \rightarrow (a) \rightarrow \operatorname{Re} i \pi |\lambda|^2 w \rightarrow -\pi |\lambda|^2 H_{e+1}(z, \bar{z}; u),$$

$$(b) \rightarrow \operatorname{Re} i (2i \pi |\lambda|^2 \langle z, a \rangle w) \rightarrow -2\pi |\lambda|^2 \operatorname{Re} (i \langle z, a \rangle) H_e(z, \bar{z}; u).$$

Положим

$$\varphi = \lambda^{-1} \mathcal{U}^{-1} f, \quad \psi = |\lambda|^{-2} g,$$

$$\langle f, f \rangle = \pi |\lambda|^2 \langle \varphi, \varphi \rangle \rightarrow \pi |\lambda|^2 \cdot 2 \operatorname{Re} (\langle z, a \rangle \bar{w}) \rightarrow$$

$$\rightarrow -2\pi |\lambda|^2 \operatorname{Re} (i \langle z, a \rangle) \cdot H_e(z, \bar{z}; u),$$

$$H_e(f, \bar{f}; \operatorname{Re} g) = H_e(\lambda \mathcal{U} \varphi, \overline{\lambda \mathcal{U} \varphi}, |\lambda|^2 \psi) = \pi |\lambda|^2 H_e(\varphi, \bar{\varphi}; \operatorname{Re} \psi)$$

(см. (13)). Далее, раскладывая $H_e(\varphi + \Delta\varphi, \bar{\varphi} + \overline{\Delta\varphi}; \operatorname{Re} \psi + \operatorname{Re} \Delta\psi)$ по степеням приращения, замечаем, что члены веса $(e+1)$ выражения $\pi|\lambda|^2 H_e(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 + \dots; \operatorname{Re} \psi_2 + \operatorname{Re} \psi_3 + \dots)$ это

$$\pi|\lambda|^2 \left(\partial H_e(\varphi_1, \bar{\varphi}_1, \operatorname{Re} \psi_2)(\varphi_2) + \bar{\partial} H_e(\varphi_1, \bar{\varphi}_1, \operatorname{Re} \psi_2)(\bar{\varphi}_2) + \frac{\partial}{\partial u} H_e(\varphi_1, \bar{\varphi}_1; \operatorname{Re} \psi_2)(\operatorname{Re} \psi_3) \right) \Big|_{u=\langle z, z \rangle}.$$

Подставляя вычисленные значения φ_1 , φ_2 , ψ_2 и ψ_3 , получаем:

$$\begin{aligned} & \pi|\lambda|^2 \left(\partial H_e(z, \bar{z}; u)(\omega a + 2i\langle z, a \rangle z) + \partial H_e(z, \bar{z}; u)(\overline{\omega a + 2i\langle z, a \rangle z}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial u} H_e(z, \bar{z}; u) 2 \operatorname{Re}(i\omega \langle z, a \rangle) \right) \Big|_{u=\langle z, z \rangle} = \\ & = \pi|\lambda|^2 2 \operatorname{Re} \left(\partial H_e(z, \bar{z}; u)(\omega a + 2i\langle z, a \rangle z) + i\langle z, a \rangle \omega \frac{\partial}{\partial u} H_e(z, \bar{z}; u) \right) \Big|_{u=\langle z, z \rangle}, \\ & H_{e+1}(f, \bar{f}; \operatorname{Re} g) \rightarrow H_{e+1}(f_1, \bar{f}_1; \operatorname{Re} g_2) = H_{e+1}(\lambda \mathcal{U} z, \overline{\lambda \mathcal{U} z}; |\lambda|^2 u). \end{aligned}$$

Суммируя, окончательно получаем (15).

Следствие 2: $\tilde{f}_e$ и $\tilde{g}_{e+1}$ не зависят от r .

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 8, из (7), (9), (12) и (14) получаем:

$$\operatorname{Re}(\tilde{g}_{e+1} + 2\langle \tilde{f}_e, \lambda \mathcal{U} z \rangle) \Big|_{u=\langle z, z \rangle} + D_{e+1} = 0. \quad (16)$$

Но это равенство позволяет определить $\tilde{f}_e$ и $\tilde{g}_{e+1}$ (см. (3), стр. 234). Следствие доказано.

ЛЕММА 10. Если гиперповерхность M несферическая, то параметр r однозначно зависит от λ , π , $\mathcal{U}$ и a .

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 8, из (7), (9), (12) и (14) получаем следующее соотношение в весе $(e+2)$:

$$\operatorname{Re}(\tilde{g}_{e+2} + 2\langle \tilde{f}_{e+1}, \lambda \mathcal{U} z \rangle + 2\langle \tilde{f}_e, f_2 \rangle) \Big|_{u=\langle z, z \rangle} + D_{e+2} = 0.$$

Вычислим слагаемые D_{e+2} , содержащие параметр r :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} ig & \rightarrow \operatorname{Re} i\pi |\lambda|^2 r \omega^2 \rightarrow \operatorname{Re} i\pi |\lambda|^2 \cdot r \cdot 2i(u + i\langle z, z \rangle) H_e(z, \bar{z}; u) \Big|_{u=\langle z, z \rangle} = \\ & = 2\pi |\lambda|^2 u H_e(z, \bar{z}; u) r, \\ H_e(f, \bar{f}; \operatorname{Re} g) & = \pi |\lambda|^2 H_e(\varphi, \bar{\varphi}; R\psi) \rightarrow \\ & \rightarrow \pi |\lambda|^2 \left[\partial H_e(z, \bar{z}; u)(\varphi_3) + \bar{\partial} H_e(z, \bar{z}; u)(\bar{\varphi}_3) + \frac{\partial}{\partial u} H_e(z, \bar{z}; u)(\operatorname{Re} \psi_4) \right] \rightarrow \\ & \rightarrow \pi |\lambda|^2 \operatorname{Re} \left[2(u + i\langle z, z \rangle) \partial H_e(z) + \frac{\partial}{\partial u} H_e(u^2 - \langle z, z \rangle^2) \right] r. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$D_{e+2} = r\pi |\lambda|^2 \operatorname{Re} \left[-2H_e u + 2(u + i\langle z, z \rangle) \partial H_e(z) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial u} H_e(z, \bar{z}; u) (u^2 - \langle z, z \rangle^2) \right] + \text{члены, не содержащие } r.$$

Но по следствию из леммы 8 и так как f_2 не зависит от r , произведение $\langle \tilde{f}_e, \tilde{f}_2 \rangle$ также не зависит от r , поэтому

$$\operatorname{Re}(i\tilde{g}_{e+2} + 2\langle \tilde{f}_{e+1}, \lambda \mathcal{U}z \rangle)|_{v=\langle z, z \rangle} + r\pi |\lambda|^2 \operatorname{Re} [-2H_e u + 2(u + i\langle z, z \rangle) \partial H_e(z)] + \\ + \frac{\partial}{\partial u} H_e(u^2 - \langle z, z \rangle^2) + \text{члены, не содержащие } r = 0. \quad (17)$$

Пусть при фиксированных $\lambda, \pi, \mathcal{U}$ и a существуют два значения $r_1 \neq r_2$, удовлетворяющих тождеству (17). Положим $\hat{r} = r_1 - r_2 \neq 0$, $\hat{f}_{e+1} = \tilde{f}_{e+1}(r_1) - \tilde{f}_{e+1}(r_2)$, $\hat{g}_{e+2} = \tilde{g}_{e+2}(r_1) - \tilde{g}_{e+2}(r_2)$. Вычитая тождество (17) для r_2 из тождества (17) для r_1 , получаем:

$$\operatorname{Re}(i\hat{g}_{e+2} + 2\langle \hat{f}_{e+1}, \lambda \mathcal{U}z \rangle)|_{v=\langle z, z \rangle} = \\ = -\hat{r}\pi |\lambda|^2 \operatorname{Re} \left[-2H_e u + 2(u + i\langle z, z \rangle) \partial H_e(z) + \frac{\partial H_e}{\partial u} (u^2 - \langle z, z \rangle^2) \right]. \quad (18)$$

Далее, заметим, что если h_{ml} — многочлен типа (m, l) , то

$$\partial h_{ml}(z) = m h_{ml}.$$

Поэтому, и в силу пункта (с) леммы 1, правая часть (18) принадлежит $\mathfrak{N}$. Имеем:

$$\operatorname{Re}(i\hat{g}_{e+2} + 2\langle \hat{f}_{e+1}, \lambda \mathcal{U}z \rangle)|_{v=\langle z, z \rangle} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{N}},$$

откуда $\hat{f}_{e+1} = 0$, $\hat{g}_{e+2} = 0$ (см. (3), стр. 234). Таким образом,

$$\operatorname{Re} \left(-2H_e u + 2(u + i\langle z, z \rangle) \partial H_e(z) + \frac{\partial H_e}{\partial u} (u^2 - \langle z, z \rangle^2) \right) = 0. \quad (19)$$

Пусть $H_e = u^p h_p(z, z) + \dots + h_0(z, \bar{z})$, где $h_p(z, \bar{z}) \neq 0$, тогда старшая по u компонента (19) — это

$$\operatorname{Re}(-2h_p + 2\partial h_p(z) + p h_p) u^{p+1} = 0,$$

или

$$(p-2)h_p + \partial h_p(z) + \bar{\partial} h_p(\bar{z}) = 0.$$

Но

$$\partial h_p(z) + \bar{\partial} h_p(\bar{z}) = (\deg h_p)_{(z, \bar{z})} \cdot h_p,$$

поэтому

$$[(p-2) + \deg h_p] \cdot h_p = 0. \quad (20)$$

Так как $h_p \in \mathfrak{N}$, то $\deg h_{p(z, \bar{z})} \geq 4$ и из (20) получаем $h_p = 0$. Противоречие. Значит, $r_1 = r_2$. Лемма доказана.

Пусть G_ξ — группа стабильности точки ξ , т. е. G_ξ состоит из автоморфизмов гиперповерхности M , оставляющих неподвижной точку ξ . Если гиперповерхность M сферическая, то группа G_ξ изоморфна группе автоморфизмов гиперквадрики S и зависит от $(n+1)^2 + 1$ вещественного параметра. Вообще же, как будет показано в теореме 3, для случая $n=1$ типичным является тот случай, когда размерность этой группы равна нулю. В связи с этим представляет интерес следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ — невырожденная вещественно аналитическая гиперповерхность и точка $\xi \in M$. Тогда группа G_ξ не может зависеть от $(n+1)^2$ вещественного параметра.

З а м е ч а н и е. На самом деле будет доказано более сильное утверждение, а именно, что если M несферична, то вещественная размерность G_ξ меньше $(n+1)^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем M в окрестности ξ к нормальной форме. Если M оказалась сферической, то $\dim G_\xi = (n+1)^2 + 1$, если же — несферической, то из условия (13) и леммы 10 следует, что $\dim_{\mathbb{R}} G_\xi < (n+1)^2$. Теорема доказана.

§ 3. Запреты на размерность в $\mathbb{C}^2$

Данный параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M — невырожденная вещественно аналитическая гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^2$ и $\xi \in M$. Тогда как только $\dim_{\mathbb{R}} G_\xi > 1$, то гиперповерхность M сферическая и, следовательно, $\dim_{\mathbb{R}} G_\xi = 5$.

Для дальнейшего нам понадобится провести некоторые рассуждения, касающиеся CR -функций на гиперквадрике S .

Положим $X = \partial(\cdot)(z) + i\langle z, z \rangle \frac{\partial}{\partial u}$, соответственно $\bar{X} = \bar{\partial}(\cdot)(z) - i\langle z, z \rangle \frac{\partial}{\partial u}$. Те свойства операторов X и $\bar{X}$, которые нам понадобятся, сформулируем в виде следующей леммы.

ЛЕММА 11. а) Если φ — CR -функция на S , то $\bar{X}\varphi = X\bar{\varphi} = 0$.

б) Если функция ψ является однородным многочленом от z степени p , чьи коэффициенты являются CR -функциями на S , то $\bar{X}\psi = p\psi$ и $X\bar{\psi} = p\bar{\psi}$.

В частности, линейная форма остается без изменений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) следует из определения CR -функции, п. б) получаем непосредственным вычислением. Вычислим $[\bar{X}, X]$:

$$\begin{aligned} \bar{X}X\varphi &= \left(\bar{\partial}(\cdot)(\bar{z}) - i\langle z, z \rangle \frac{\partial}{\partial u} \right) (\partial\varphi(z) + i\langle z, z \rangle \varphi_u) = \\ &= \partial\bar{\partial}\varphi(z, \bar{z}) + i\langle z, z \rangle \varphi_u + i\langle z, z \rangle \bar{\partial}\varphi_u(\bar{z}) - i\langle z, z \rangle \partial\varphi_u(z) + \langle z, z \rangle^2 \varphi_{uu}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X\bar{X}\varphi &= \left(\partial () (z) + i \langle z, z \rangle \frac{\partial}{\partial u} \right) (\bar{\partial} \varphi (\bar{z}) - i \langle z, z \rangle \varphi_u) = \\
&= \partial \bar{\partial} \varphi (z, \bar{z}) - i \langle z, z \rangle \varphi_{uu} - i \langle z, z \rangle \partial \varphi_u (z) + i \langle z, z \rangle \bar{\partial} \varphi_u (z) + \langle z, z \rangle^2 \varphi_{uu}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Theta = [\bar{X}, X] = \bar{X}X - X\bar{X} = 2i \langle z, z \rangle \frac{\partial}{\partial u}.$$

Вычислим $[\bar{X}, \Theta]$:

$$\begin{aligned}
\bar{X}\Theta\varphi &= \left(\bar{\partial} () (\bar{z}) - i \langle z, z \rangle \frac{\partial}{\partial u} \right) 2i \langle z, z \rangle \varphi_u = \\
&= 2i \langle z, z \rangle \varphi_{uu} + 2i \langle z, z \rangle \bar{\partial} \varphi_u (\bar{z}) + 2 \langle z, z \rangle^2 \varphi_{uu}, \\
\Theta\bar{X}\varphi &= 2i \langle z, z \rangle \frac{\partial}{\partial u} (\bar{\partial} \varphi (\bar{z}) - i \langle z, z \rangle \varphi_u) = 2i \langle z, z \rangle \frac{\partial}{\partial u} \bar{\partial} \varphi (\bar{z}) + 2 \langle z, z \rangle^2 \varphi_{uu}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$[\bar{X}, \Theta] = \bar{X}\Theta - \Theta\bar{X} = 2i \langle z, z \rangle \frac{\partial}{\partial u} = \Theta.$$

Сопряжением этого равенства получаем $[X, \Theta] = \Theta$. Положим $\varphi = \langle f, Cz \rangle$, где f — векторная CR -функция на S (т. е. набор из n CR -функций на S), C — линейный оператор в $\mathbb{C}^n$, и пусть $\psi = \varphi + \bar{\varphi}$, тогда справедлива

ЛЕММА 12. Пусть $\tau = (\bar{X} - 2)(\bar{X} - 1)(X - 1)$, тогда $\tau(\psi) = 0$.

Доказательство. Имеем:

$$X\bar{\varphi} = X \langle Cz, f \rangle = \langle XCz, f \rangle + \langle Cz, \bar{X}f \rangle,$$

но $XCz = Cz$, а $\bar{X}f = 0$, поэтому

$$X\bar{\varphi} = \langle Cz, f \rangle = \varphi, \text{ т. е. } (X - 1)\bar{\varphi} = 0.$$

Аналогично, $(\bar{X} - 1)\varphi = 0$. Далее, имеем: $(X - 1)\psi = (X - 1)\varphi$, но $[\bar{X} - 1, X - 1] = \Theta$, следовательно,

$$(\bar{X} - 1)(X - 1)\psi = (\bar{X} - 1)(X - 1)\varphi = [(X - 1)(\bar{X} - 1) + \Theta]\varphi = \Theta\varphi.$$

Кроме того,

$$(\bar{X} - 1)^2(X - 1)\psi = (\bar{X} - 1)\Theta\varphi = \Theta(\bar{X} - 1)\varphi + \Theta\varphi = \Theta\varphi.$$

Вычитая, получаем:

$$[(\bar{X} - 1)^2(X - 1) - (\bar{X} - 1)(X - 1)]\psi = 0,$$

или, окончательно,

$$(\bar{X} - 2)(\bar{X} - 1)(X - 1)\psi = 0.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть $\tilde{g}_{e+1}$ удовлетворяет равенству (16), тогда

$$\tilde{g}_{e+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } e = 2k + 1, \\ \alpha_1(z)(u + i\langle z, z \rangle), & \text{если } e = 2k, \end{cases}$$

где $\alpha_1(z)$ — линейная форма.

Доказательство проведем для случая $e = 2k$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{f}_e &= A_0(u + i\langle z, z \rangle)^k + A_2(z)(u + i\langle z, z \rangle)^{k-1} + \dots + A_{2k}(z), \\ \tilde{g}_{e+1} &= \alpha_1(z)(u + i\langle z, z \rangle)^k + \alpha_3(z)(u + i\langle z, z \rangle)^{k-1} + \dots + \alpha_{2k+1}(z), \end{aligned}$$

где $\alpha_p(z)$ — форма степени p , $A_p(z)$ — вектор-форма степени p . Из (15) видно, что D_{e+1} не содержит членов типа $(p; 0)$, поэтому должны быть равными и члены этого типа в выражении

$$\operatorname{Re}(i\tilde{g}_{e+1} + 2\langle \tilde{f}_e, \lambda \mathcal{U}z \rangle)|_{u=\langle z, z \rangle}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (2k + 1, 0) &\rightarrow \alpha_{2k+1}(z) = 0, \\ (2k - 1, 0) &\rightarrow \alpha_{2k-1}(z) = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ (3, 0) &\rightarrow \alpha_3(z) = 0, \\ (1, 0) &\rightarrow \alpha_1(z) - \langle \lambda \mathcal{U}z, A_0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Вычислим $\tau(\varphi)$, где

$$\varphi = (\beta(z)w^k + \overline{\beta(z)w^k})|_{u=\langle z, z \rangle}$$

и $\beta(z)$ — линейная форма. Имеем:

$$\begin{aligned} X\varphi &= \beta w^k + 2ik\langle z, z \rangle \beta w^{k-1}, \\ (X - 1)\varphi &= 2ik\langle z, z \rangle \beta w^{k-1} - \bar{\beta} \bar{w}^k, \\ \bar{X}(X - 1)\varphi &= 2ik\langle z, z \rangle \beta w^{k-1} - \bar{\beta} \bar{w}^k + 2\bar{\beta} ik\langle z, z \rangle \bar{w}^{k-1}, \\ (\bar{X} - 2)(X - 1)\varphi &= -2ik\langle z, z \rangle \beta w^{k-1} + \bar{\beta} \bar{w}^k - \bar{\beta} \cdot 2ik\langle z, z \rangle \bar{w}^{k-1} + \\ &+ \beta \cdot 2ik\langle z, z \rangle \bar{w}^{k-1} + \beta \cdot 2ik\langle z, z \rangle \bar{w}^{k-1} + \beta \cdot 2ik\langle z, z \rangle \cdot 2i(k - 1)\langle z, z \rangle \bar{w}^{k-2}, \\ \tau(\varphi) &= (\bar{X} - 1)(\bar{X} - 2)(X - 1)\varphi = 4k(k - 1)\langle z, z \rangle^2 \bar{\beta}(z) \bar{w}^{k-2}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\tau(\varphi)$ есть форма второй степени от z , чьи коэффициенты являются CR -функциями на S , поэтому (см. лемму 11, пункт б)).

$$(X - 2)\tau(\varphi) = 0. \quad (21)$$

Пусть существуют два разных вектора $a_1 \neq a_2$, удовлетворяющих тождеству (16). Вводя обозначения $\hat{a} = a_1 - a_2$, $\hat{f}_e = \tilde{f}_e(a_1) - \tilde{f}_e(a_2)$, $\hat{g}_{e+1} =$

$=\tilde{g}_{e+1}(a_1)-\tilde{g}_{e+1}(a_2)$ и вычитая тождество (16) для a_2 из тождества (16) для a_1 , получаем:

$$\operatorname{Re}(i\hat{g}_{e+1}+|2\langle\hat{f}_e\lambda\mathcal{U}z\rangle)|_{v=\langle z,z\rangle}+\hat{D}_{e+1}=0,$$

где

$$\begin{aligned}\hat{D}_{e+1}=2\pi|\lambda|^2\operatorname{Re}\bigg(&-2i\langle z,\hat{a}\rangle H_e+(u+i\langle z,z\rangle)\partial H_e(\hat{a})+\\&+2i\langle z,\hat{a}\rangle\partial H_e(z)+i\langle z,\hat{a}\rangle(u+i\langle z,z\rangle)\frac{\partial H_e}{\partial u}\bigg).\end{aligned}$$

Пусть $T=(X-2)\tau$, тогда из леммы 13 и (21) следует, что

$$T\hat{D}_{e+1}=0. \quad (22)$$

Если рассматривать это равенство как уравнение относительно вектора a , то оно представляет собой систему линейных уравнений относительно неизвестных

$$\operatorname{Re}\hat{a}^1,\operatorname{Im}\hat{a}^1,\dots,\operatorname{Re}\hat{a}^n,\operatorname{Im}\hat{a}^n.$$

Поэтому совокупность решений есть линейное подпространство в $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$. Пусть это подпространство содержит комплексную прямую

$$\{\hat{a}=t\hat{a}_0,\text{ где }t\in\mathbb{C}^1,\hat{a}_0\neq 0\},$$

тогда, вводя в равенство (22) переменную t и отделяя члены степени $(0,1)$ по t , получаем:

$$\begin{aligned}T\bigg(&-2i\langle z,\hat{a}_0\rangle H_e+(u-i\langle z,z\rangle)\bar{\partial}H_e(\hat{a}_0)+\\&+2i\langle z,\hat{a}_0\rangle\partial H_e(z)+i\langle z,\hat{a}_0\rangle(u+i\langle z,z\rangle)\frac{\partial H_e}{\partial u}\bigg)=0.\end{aligned}$$

Пусть, далее, $x=\partial(\quad)(z)$, $d=\langle z,z\rangle\frac{\partial}{\partial u}$ и $x_k=x-kE$, где E — тождественный оператор, тогда

$$T=(x_2+id)(\bar{x}_2-id)(\bar{x}_1-id)(x_1+id).$$

ЛЕММА 14. Если $\alpha(z)$ — линейная форма, то

$$x_k(\alpha(z)\varphi)=\alpha(z)x_{k-1}\varphi.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}x_k(\alpha(z)\varphi)&=x(\alpha(z)\varphi)-k\alpha(z)\varphi=\\&=\alpha(z)\varphi+\alpha(z)x\varphi-k\alpha(z)\varphi=\alpha(z)(x-(k-1))\varphi=\\&=\alpha(z)x_{k-1}\varphi.\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Соответственно имеем:

$$\alpha(z)x_k\varphi=x_{k+1}(\alpha(z)\varphi).$$

Разложим T по степеням оператора d :

$$\begin{aligned} T &= (x_2 + id)(\bar{x}_2 - id)(\bar{x}_1 - id)(x_2 + id) = \\ &= (x_2\bar{x}_2 + id\bar{x}_2 - ix_2d + d^2)(x_1\bar{x}_1 - idx_1 + id\bar{x}_1 + d^2) = \\ &= (x_2\bar{x}_2 + i(\bar{x}_3 - x_2)d + d^2)(x_1\bar{x}_1 + i(x_1 - x_2)d + d^2) = \\ &= x_2\bar{x}_2x_1\bar{x}_1 + i(x_2\bar{x}_2(\bar{x}_1 - x_2) + x_2\bar{x}_2(\bar{x}_3 - x_2))d + \\ &+ (x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 - (\bar{x}_3 - x_2)(\bar{x}_2 - x_3))d^2 + i((\bar{x}_3 - x_2) + (\bar{x}_3 - x_4))d^3 + d^4, \end{aligned}$$

т. е.

$$T = l_0 + l_1d + l_2d^2 + l_3d^3 + d^4,$$

где

$$\begin{aligned} l_0 &= (x-2)(\bar{x}-2)(x-1)(\bar{x}-1), \\ l_1 &= 2i(x-2)(\bar{x}-2)(\bar{x}-x), \\ l_2 &= ((x-2)(\bar{x}-2) + (x-3)(\bar{x}-3) - (\bar{x}-x)^2 + 1), \\ l_3 &= 2i(\bar{x}-x). \end{aligned}$$

В дальнейшем полагаем $n=1$. Пусть

$$P = u \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad Q = iz(2x - \bar{x} + \kappa - 2), \quad R = -zd,$$

где $\kappa = u \frac{\partial}{\partial u}$, тогда (22) можно записать так:

$$T(P+Q+R)(H_e) = 0.$$

$T(P+Q+R)$ можно представить в виде

$$T(P+Q+R) = ul_0 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + z(A_0 + A_1d + A_2d^2 + A_3d^3 + A_4d^4 - d^5).$$

где операторы A_i переводят моном $cz^m\bar{z}^pu^k$ в моном того же типа, т. е. такой моном является для них собственным вектором. Положим

$$G = \left(\frac{1}{z} \right) T(P+Q+R),$$

тогда

$$G = \frac{u}{|z|^2} A_{-1} + A_0 + A_1d + A_2d^2 + A_3d^3 + A_4d^4 - d^5.$$

Вычислим A_{-1} , A_0 и A_1 :

$$A_{-1} = \bar{z}l_0 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = (x-2)(x-1)(\bar{x}-2)(\bar{x}-3)\bar{x},$$

$$A_0 = \left(\frac{1}{z} \right) [l_0(Q) + l_1d(P)],$$

$$l_0(Q) = (x-2)(\bar{x}-2)(x-1)(\bar{x}-1)[iz(2x-\bar{x}+\kappa-2)] = \\ = iz(x-1)x(\bar{x}-2)(\bar{x}-1)(2x-\bar{x}+\kappa-2),$$

$$d(P) = z\bar{z} \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = z\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (1+\kappa) = z\bar{x}(\kappa+1),$$

$$l_1d(P) = z \cdot 2i(x-1)(\bar{x}-2)(\bar{x}-x-1)\bar{x}(\kappa+1).$$

В результате получаем:

$$A_0 = i(x-1)(\bar{x}-2)[x(\bar{x}-1)(2x-\bar{x}+\kappa-2) + 2(\bar{x}-x-1)\bar{x}(\kappa+1)],$$

$$A_1d = \left(\frac{1}{z}\right)[l_0(R) + l_1d(Q) + l_2d^2(P)],$$

$$l_0(R) = (x-2)(\bar{x}-2)(x-1)(\bar{x}-1)(-zd) = \\ = -z(x-1)x(\bar{x}-2)(\bar{x}-1)d,$$

$$d(Q) = iz(2x-\bar{x}+\kappa-2)d,$$

$$l_1d(Q) = -2z(x-1)(\bar{x}-2)(\bar{x}-x-1)(2x-\bar{x}+\kappa-2)d,$$

$$d^2(P) = z^2 \cdot \bar{z}^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(u \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = z^2 \cdot \bar{z}^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\kappa+2) \frac{\partial}{\partial u} = \\ = z^2 \bar{z} \bar{x} (\kappa+2) \frac{\partial}{\partial u} = z(\bar{x}-1)(\kappa+2)d,$$

$$l_2d^2(P) = z[(x-1)(\bar{x}-2) + (x-2) + (x-2)(\bar{x}-3) - \\ - (\bar{x}-x-1)^2 + 1](\bar{x}-1)(\kappa+2)d,$$

так что

$$A_1 = (((x-1)(\bar{x}-2) + (x-2)(\bar{x}-3) - (\bar{x}-x-1)^2 + 1)(\bar{x}-1)(\kappa+2) - \\ - (x-1)x(\bar{x}-2)(\bar{x}-1) - 2(x-1)(\bar{x}-2)(\bar{x}-x-1)(2x-\bar{x}+\kappa-2)).$$

Имеем: $G(H_e) = 0$.

Пусть

$$H_e = u^s(h_{42}z^4\bar{z}^2 + h_{24}z^2\bar{z}^4) + \dots + (h_{m2}z^m \cdot \bar{z}^2 + \dots + h_{2m}z^2 \cdot \bar{z}^m).$$

Будем вычислять коэффициенты $G(H_e)$. Обозначим через $A_i(m, p)$ множитель, который появляется при мономе $z^m\bar{z}^p$ после применения к нему оператора A_i , а через $G(m, p)$ — коэффициент при $z^m\bar{z}^p$ в $G(H_e)$.

Каждый коэффициент $G(H_e)$ является линейной комбинацией коэффициентов h_{mp} , поэтому, приравнивая эти коэффициенты нулю, мы получим линейные уравнения, связывающие h_{mp} . Наша ближайшая цель — доказательство того, что $h_{42} = 0$. Это можно сделать, используя то, что оператор G действует на симметричные мономы H_e несимметричным образом. Это позволяет нам получить дополнительные уравнения, не вводя новых неизвестных.

Имеем:

$$\begin{aligned} G(2, 4) &= h_{35}A_{-1}(3, 5) + h_{24}A_0(2, 4), \\ A_{-1}(3, 5) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0(2, 4) &= i \cdot 1 \cdot 2 \cdot [2 \cdot 3(4 - 4 + s - 2) + 2(4 - 2 - 1)4(s + 1)] = \\ &= 2i[6(s - 2) + 8(s + 1)] = 4i(7s - 2). \end{aligned}$$

Получаем, сокращая на 4:

$$15h_{35} + i(7s - 2)h_{24} = 0. \quad (23)$$

Далее,

$$\begin{aligned} G(5, 3) &= h_{64}A_{-1}(6, 4) + h_{53}A_0(5, 3) + h_{42}A_1(5, 3), \\ A_{-1}(6, 4) &= 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 160, \\ A_0(5, 3) &= i \cdot 4 \cdot 1 \cdot [5 \cdot 2(10 - 3 + s - 1 - 2) + 2(3 - 5 - 1)3s] = \\ &= 4i[10(s + 4 - 18s)] = -32i(s - 5), \\ A_1(5, 3) &= \{[4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 9 + 1] \cdot 2(s + 1) - 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 + \\ &+ 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3(10 - 3 + s - 1 - 2)\} = -8(s + 1) - 40 + 24(s + 4) = 16(s + 3). \end{aligned}$$

Сокращая на 16, получаем:

$$10h_{64} - 2i(s - 5)h_{53} + (s + 3)h_{42} = 0. \quad (24)$$

Далее,

$$\begin{aligned} G(3, 5) &= h_{46}A_{-1}(4, 6) + h_{35}A_0(3, 5) + h_{24}A_1(3, 5), \\ A_{-1}(4, 6) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 27 \cdot 16, \\ A_0(3, 5) &= i \cdot 2 \cdot 3[3 \cdot 4(6 - 5 + s - 1 - 2) + 2(5 - 3 - 1)5s] = \\ &= 6i[12(s - 2) + 10s] = 12i(11s - 12), \\ A_1(3, 5) &= \{[2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 1 + 1]4(s + 1) - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 - \\ &- 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1(6 - 5 + s - 1 - 2)\} = 32(s + 2) - 72 - 12(s - 2) = 4(5s - 4). \end{aligned}$$

Сокращая на 4, получаем:

$$27 \cdot 4h_{46} + 3i(11s - 12)h_{35} + (5s - 4)h_{24} = 0. \quad (25)$$

Равенства (23), (25) и равенство, полученное сопряжением (24), есть система трех линейных уравнений относительно неизвестных h_{46} , h_{35} и h_{24} . Выпишем ее матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 15 & i(7s - 2) \\ 10 & 2i(s - 5) & (s + 3) \\ 27 \cdot 4 & 3i(11s - 12) & (5s - 4) \end{pmatrix}.$$

Сокращая первый столбец на 2 и вычисляя определитель, получаем:

$$\Delta(s) = 3(-19 \cdot 7 \cdot s^2 - 657 \cdot s + 2 \cdot 575).$$

Заметим, что $\Delta(0) \neq 0$ и $\Delta(1) \neq 0$, но для $s \geq 2$ $657s > 2 \cdot 575$, поэтому для $s \geq 2$ $\Delta(s) < 0$. Таким образом, показано, что $\Delta(s) \neq 0$ для $s = 0, 1; 2, 3, \dots$, и поэтому $h_{42} = 0$.

Из сравнения компонент тождества (16) при $n=1$ и $e=2k$ типа $(1, 0)$, $(2, 1)$ и $(3, 2)$ получаем в обозначениях леммы 13:

$$\alpha + \bar{A}_0 = 0,$$

$$A_2 - 2ik\bar{A}_0 = 0,$$

$$i(k-1)A_2 = 4ah_{42}.$$

Отсюда, в силу полученного условия $h_{42} = 0$, следует, что $\alpha = 0$. Таким образом, независимо от четности e $g_{e+1} = 0$. Теперь из леммы 12 получаем:

$$\tau(P + Q + R)(H_e) = 0.$$

Разложим оператор τ по степеням d :

$$\begin{aligned} \tau &= (\bar{x}_2 - id)(\bar{x}_1 - id)(x_1 + id) = (\bar{x}_2 - id)[\bar{x}_1 x_1 + i(\bar{x}_1 - x_2)d + d^2] = \\ &= \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_1 + i[x - x - (\bar{x} - 2)(x - 2) + 1]d + (2\bar{x} - x - 1)d^2 - id^3. \end{aligned}$$

Введем следующий оператор:

$$\Gamma = \left(\frac{1}{z}\right) \tau(P + Q + R).$$

Его, как и оператор G , можно записать в виде

$$\Gamma = \frac{u}{|z|^2} B_{-1} + B_0 + B_1 d + B_2 d^2 + B_3 d^3 + id^4,$$

где

$$B_{-1} = \bar{z}(\bar{x}_1 - 2)(\bar{x}_1 - 1)(x - 1) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = (\bar{x} - 3)(\bar{x} - 2)\bar{x}(x - 1).$$

Вычисляя коэффициент при $z\bar{z}^{m-1}$ в $\Gamma(H_e)$ получим:

$$\Gamma(1, m-1) = h_{2m} B_{-1}(2, m) = h_{2m}(m-3)(m-2)m.$$

И если $m \geq 4$, то из тождества $\Gamma(H_e) = 0$ следует, что $h_{m2} = 0$. Докажем теперь индукцией по p , что $h_{2+p, m+p} = 0$.

Пусть $h_{2+q, m+q} = 0$ для $q < p$, тогда

$$\begin{aligned} \Gamma(1+p, m+p-1) &= B_{-1}(2+p, m+p)h_{2+p, m+p} = \\ &= (m+p-3)(m+p-2)(m+p)(p+1)h_{2+p, m+p}. \end{aligned}$$

Из $\Gamma(H_e) = 0$ получаем, что $h_{2+p, m+p} = 0$. Тем самым показано, что $H_e = 0$. Противоречие, т. е. пространство решений (22) относительно $\bar{a}$ не более, чем одномерно.

Подведем итог. Если гиперповерхность M несферическая, то количество степеней свободы, приходящихся на параметр λ , не превосходит единицы (см. следствие 1), на параметр a , как показано в этом параграфе, — тоже не больше единицы, параметр же r свободой не обладает (см. лемму 10). Следовательно, размерность G_{ξ} в этом случае не превосходит двух.

Пусть $\dim_{\mathbf{R}} G_{\xi} = 2$. Это значит, что тождество (13) действительно оставляет одну степень свободы для λ . А это может быть только тогда, когда

$$H_e = u^s L_{pp} z^p \bar{z}^p + u^{s-1} L_{p-1p-1} z^{p-1} \bar{z}^{p-1} + \dots + L_{kk} z^k \bar{z}^k,$$

где $L_{pp} \neq 0$. Но в таком случае правая часть (16) принадлежит $\mathfrak{R}$ и поэтому $\tilde{f}_e = \tilde{g}_{e+1} = 0$. Получаем:

$$2\operatorname{Re} \{\bar{a} [P + Q + R] (H_e)\} = 0.$$

Отделяя в этом равенстве компоненту, старшую по u , находим:

$$u^{s+1} \cdot L_{pp} \cdot p 2 \operatorname{Re} \{\bar{a} [z^p \bar{z}^{p-1} + z^{p-1} \bar{z}^p]\} = 0.$$

откуда следует, что $a = 0$ и у нас остается всего одна степень свободы на всю группу G_{ξ} . Теорема 2 доказана.

§ 4. Группа стабильности неомбилической точки

Точка $\xi \in M$ называется омбилической, если касание сферической поверхностью в этой точке более высокого порядка, чем это обеспечивает нормальная форма.

Пусть $n = 1$ и

$$v = |z|^2 + c_{42}(u) z^4 \bar{z}^2 + c_{24}(u) z^2 \bar{z}^4 + \sum_{\substack{m+l \geq 7 \\ \min(m,l) \geq 2}} c_{ml}(u) z^m \bar{z}^l$$

— уравнение M в нормальной форме, тогда точка 0 является омбилической для этой поверхности, если $c_{42}(0) = 0$.

Обозначим $c_{42}(0)$ через h , $c_{52}(0)$ — через p и $c_{43}(0)$ — через q .

ТЕОРЕМА 3. Пусть M — невырожденная вещественно аналитическая гиперповерхность пространства $\mathbf{C}^2$ и $\xi \in M$ — ее неомбилическая точка, т. е. $h \neq 0$, тогда группа G_{ξ} состоит не более, чем из двух преобразований.

Далее, если, к тому же, $h\bar{p} + 3\bar{h}q \neq 0$, то $G_{\xi} = \{E\}$, т. е. не существует автоморфизма гиперповерхности, сохраняющего точку ξ неподвижной и отличного от тождественного.

Доказательство. Так как точка ξ неомбилическая, то $e = 6$ и

$$H_e = h z^4 \bar{z}^2 + \bar{h} z^2 \bar{z}^4. \quad (26)$$

В качестве следствия соотношения (13) получаем $\lambda^3 \cdot \bar{\lambda} = 1$. Это уравнение имеет два решения 1 и -1 . Покажем, что каждому из этих двух значений λ соответствует не более одного значения a .

Записывая (16), получаем:

$$\operatorname{Re}(i\tilde{g}_7 + 2\bar{\lambda} \cdot \tilde{f}_6\bar{z})|_{v=|z|^2} = 2\operatorname{Re}\bar{a} \left[-2izH_6 - iz\bar{z} \frac{\partial H_6}{\partial \bar{z}} + 2iz^2 \frac{\partial H_6}{\partial z} + u \frac{\partial H_6}{\partial \bar{z}} \right] + (H_7(\lambda z, \bar{\lambda} z) - H_7(z, \bar{z})). \quad (27)$$

Пусть существуют два значения a , удовлетворяющих равенству (27): a_1 и a_2 . Положим

$$\hat{a} = a_1 - a_2, \quad \hat{f}_6 = \tilde{f}_6(a_1) - \tilde{f}_6(a_2), \quad \hat{g}_7 = \tilde{g}_7(a_1) - \tilde{g}_7(a_2).$$

Вычитая равенство (27) для a_2 из равенства (27) для a_1 , получаем:

$$\operatorname{Re}(i\hat{g}_7 + 2\bar{\lambda}\hat{f}_6\bar{z})|_{v=|z|^2} = 2\operatorname{Re}\bar{\hat{a}} \left[-2izH_6 - iz\bar{z} \frac{\partial H_6}{\partial \bar{z}} + 2iz^2 \frac{\partial H_6}{\partial z} + u \frac{\partial H_6}{\partial \bar{z}} \right].$$

Подставляя сюда (26), находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i\hat{g}_7 + 2\bar{\lambda}\hat{f}_6\bar{z})|_{v=|z|^2} = \\ = 2\operatorname{Re}\bar{\hat{a}} [4ihz^5\bar{z}^2 - 2i\bar{h}z^3 \cdot \bar{z}^4 + 2uhz^4\bar{z} + 4u\bar{h}z^2 \cdot \bar{z}^3]. \end{aligned} \quad (28)$$

Положим

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}\hat{f}_6\bar{z} &= Az^6\bar{z} + Bz^4\bar{z}w + Cz^2\bar{z}w^2 + D\bar{z}w^3, \\ \frac{i}{2}\hat{g}_7 &= \alpha zw^3 + \beta \cdot z^3w^2 + \gamma z^5\bar{w} + \delta z^7. \end{aligned}$$

Правая часть тождества (28) не содержит членов типа $(7, 0)$, $(5, 0)$ и $(3, 0)$, поэтому, приравнявая нулю соответствующие компоненты левой части, получаем: $\beta = \gamma = \delta = 0$. Вычисляя, далее коэффициенты компонент левой части типов $(5, 2)$ и $(4, 1)$, находим:

$$(5, 2) \rightarrow iB, \quad (4, 1) \rightarrow B.$$

Приравнявая их к соответствующим компонентам правой части, получим

$$4i\bar{h}\bar{a} = iB, \quad 2\bar{h}\bar{a} = B. \quad (29)$$

Но $h \neq 0$, поэтому (29) означает, что $\hat{a} = 0$.

Теперь для завершения доказательства первой части утверждения теоремы осталось воспользоваться леммами 8 и 10.

Далее, учитывая, что

$$H_7 = pz^5\bar{z}^2 + qz^4\bar{z}^3 + \bar{q}z^3\bar{z}^4 + \bar{p}z^2\bar{z}^5.$$

записываем тождество (27) для $\lambda = -1$. Получаем:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(\tilde{ig}_7 + 2\bar{\lambda}\tilde{f}_6\bar{z})|_{v=|z|^2} = \\ & = 2\operatorname{Re}[\bar{a}(4ihz^5\bar{z}^2 - 2i\bar{h}z^3\bar{z}^4 + 2uhz^4\bar{z} + 4u\bar{h}z^2\bar{z}^3) - 2pz^5\bar{z}^2 - 2qz^4\bar{z}^3]. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} 2\bar{\lambda}\tilde{f}_6\bar{z} &= Az^6\bar{z} + Bz^4\bar{z}w + Cz^2\bar{z}w^2 + D\bar{z}w^3, \\ \frac{i}{2}\tilde{g}_7 &= \alpha zw^3 + \beta z^3w^2 + \gamma z^5w + \delta z^7. \end{aligned}$$

Как и раньше, из сравнения компонент типа (7, 0), (5, 0) и (3, 0) имеем: $\beta = \gamma = \delta = 0$. Оставшиеся компоненты дают равенства:

$$\begin{aligned} (6, 1) \quad & A = 0, \\ (5, 2) \quad & iB = 4ih\bar{a} - 2p, \\ (4, 3) \quad & -C + iD - i\alpha = 2iha - 2q, \\ (4, 1) \quad & B = 2h\bar{a}, \\ (3, 2) \quad & 2iC - 3\bar{D} - 3\alpha = 4ha, \\ (2, 1) \quad & C - 3i\bar{D} + 3i\alpha = 0, \\ (1, 0) \quad & \bar{D} + \alpha = 0. \end{aligned}$$

Из равенств (5, 2) и (4, 1) получаем:

$$p = ih\bar{a}. \quad (30)$$

Равенства (4, 3), (3, 2), (2, 1) и (1, 0) — это система четырех линейных уравнений относительно трех неизвестных C , $\bar{D}$ и α . Исключая неизвестные, получаем соотношение на правые части, которое выглядит так:

$$ha + 3iq = 0,$$

что вместе с (30) дает окончательно

$$\bar{p}h + 3qh = 0.$$

Теорема доказана.

Поступило
20.XI.1978

Литература

- ¹ Cartan E., Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes. I, Ann. Math. Pura Appl., (4) 11 (1932), 17—90 (Oeuvres II, 2, 1231—1304).
- ² Tresse A., Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = w(x, y, y')$, Preisschr. Fürstlich Jablon. Ges., Leipzig, Hirzel, 1896.
- ³ Chern S. S., Moser J. K., Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math., 133, № 3—4 (1974), 219—271.
- ⁴ Burns I., Shnider S., Wells R., Deformation of strongly pseudoconvex domains, preprint, 1974.