ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.К. БЕЛОШАПКА

Аннотация. Дается определение аналитической сложности аналитической функции двух переменных. Доказано, что класс функций фиксированной сложности есть дифференциально-алгебраическое множество. Построен дифференциальный полином, определяющий функции первого класса. Описан алгоритм получения соотношений, определяющих произвольный класс. Приведены примеры функций порядка сложности нуль, один, два и бесконечность. Показано, что формальный порядок сложности формул Кардано и Феррари значительно выше их аналитической сложности. Классы сложности оказываются инвариантными относительно некоторой бесконечномерной псевдогруппы преобразований. В связи с этим описаны орбиты действия этой псевдогруппы в струях порядка один, два и три. Понятие порядка сложности распространяется на полские 3-ткани. Обнаружено, что ткани порядка сложности один - это шестиугольные ткани. Ставится ряд вопросов.

Главным героем данного повествования является дифференциальный полином дифференциального порядка три и алгебраической степени четыре

$$\Delta_1(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z''_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) \tag{1}$$

который мы рассматриваем с трех точек зрения.

1. Классовая иерархия

Используя сколь угодно богатый набор функций лишь одного переменного нельзя получить в виде суперпозиции функцию двух переменных. Необходима хотя бы одна функция двух переменных. По общему мнению, простейшей такой функцией является функция $x + y$. Запас функций двух переменных x и y, который при этом получается можно описать как иерархию классов, определяемых индуктивно

$$Cl_0 \subset Cl_1 \subset Cl_2 \subset Cl_n \subset \ldots \mathbf{Cl},$$

Date: 24 мая 2007 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 05-01-0981 и НШ-2040.2003.1.

где Cl_0 - это функции одного переменного (x или y), Cl_1 - функции вида $c(a(x)+b(y))$, далее Cl_{n+1} состоит из функций вида $C(A_n(x,y)+B_n(x,y)$, где C - функция одного переменного, а A_n и B_n - функции из Cl_n, тогда **Cl** - это объединение всех классов с конечными номерами. Теперь сделаем два уточнения. Первое: мы будем иметь дело с аналитическими функциями. Второе: представимость в виде суперпозиции будем понимать как локальную представимость в окрестности точки общего положения. Например, функцию $tg(\sqrt{x}+ln(y))$ следует признать функцией первого класса несмотря на все оговорки связанные как с областью определения, так и с многозначностью.

Нулевой класс можно задать соотношением вида

$$Cl_0 = \{z : \Delta_0(z) = z'_x z'_y = 0\}$$

Нетрудно получить аналогичный критерий локальной принадлежности ростка функции первому классу. Действительно, если $z = c(a(x)+b(y))$, то $z'_x = c'a'$, $z'_y = c'b'$, откуда $z'_y/z'_x = b'(y)/a'(x)$, поэтому производная $ln(z'_y/z'_x)$ по xy равна нулю

$$\delta_1(z) = (ln(z'_y/z'_x))''_{xy} = 0 \tag{2}$$

Отделяя числитель этого рационального выражения получаем

$$\Delta_1(z) = z'_x z'_y(z'''_{xxy}z''_y - z'''_{xyy}z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0 \tag{3}$$

И наоборот, решениями (2) или (3) являются только ростки функций первого класса. Действительно, из (2) следует, что $ln(z'_y/z'_x) = ln(B(y)/A(x))$. Причем, если предположить, что $z(x,y)$ не принадлежит Cl_0, то $A(x)$ и $B(y)$ не равны нулю. Распрямим теперь заменой прсременной x векторное поле $A(x)\frac{\partial}{\partial x}$ и заменой прсременной x векторное поле $B(y)\frac{\partial}{\partial y}$. Тогда в новых переменных (X,Y) имеем $z'_X = z'_Y$ и, поэтому $z = c(X+Y)$ или окончательно $z = c(a(x)+b(y))$. Итак, принимая во внимание приведенное рассуждение и теорему единственности для аналитических функций, получаем

Утверждение 1: Следующие условия эквивалентны.
(1) Некоторый росток аналитической функции $z(x,y)$ является ростком первого класса.
(2) Все ростки аналитической функции $z(x,y)$ являются ростками первого класса.
(3) $\Delta_1(z) = 0$ для некоторого ростка аналитической функции z.
(4) $\Delta_1(z) = 0$ для всех ростков аналитической функции z.

Наличие аналогичного дифференциально-алгебраического критерия принадлежности функции произвольному классу можно пояснить следующим образом. Пусть $U^{(k)}$ пространство k струй функций двух переменных, т.е. пространство наборов вида

$(x, y, z, z'_x, z'_y, \dots$ производные порядка не выше $k)$. С ростом k количество производных растет квадратично, а количество производных функций одного переменного, входящих в общее выражение для функции k-го класса - линейно. Выражение производных функции z через производные функций одного переменного - полиномиальное. Это означает, что начиная с некоторого k класс представляет собой алгебраическое подмножество $U^{(k)}$. Если $pr^{(k)}$ - отображение продолжения функции, т.е. отображение, ставящее в соответствие функции ее образ в $U^{(k)}$, то можем сформулировать

Утверждение 2: $pr^{(k)}(Cl_n)$ - это алгебраическое подмножество $U^{(k)}$, причем, начиная с некоторого $K(n)$ - собственное.

Итак, каждый класс имеет определяющий его набор дифференциально-полиномиальных соотношений, которые мы обозначим $\Delta_n(z) = 0$. Принимая во внимание теорему единственности получаем следствие.

Следствие 3: Если один росток аналитической функции принадлежит Cl_n, то и все остальные - тоже.

Коль скоро каждый класс содержит все классы с меньшими номерами, то полиномы $\Delta_n(z)$ принадлежат дифференциальному идеалу порожденному полиномами $\Delta_m(z)$, при $m < n$ и соотношения $\Delta_n(z) = 0$ являются дифференциально-алгебраическими следствиями соотношений $\Delta_m(z) = 0$.

Определение 4: Говорим, что аналитическая функция $z(x, y)$ имеет порядок сложности n, если z содержится в $Cl_n \setminus Cl_{n-1}$. Если функция не попала в $\mathbf{Cl}$ говорим, что ее порядок сложности равен бесконечности.

В терминах соотношений определяющих класс порядок сложности функции определить очень просто.

Утверждение 5: Порядок сложности функции $z(x, y)$ равен n в том и только том случае, если $\Delta_n(z) = 0$, а $\Delta_{n-1}(z) \neq 0$.

Теперь вернемся к самому началу и зададим вопрос, а что изменится, если заменить базовую функцию $x + y$ на другую аналитическую функцию $\phi(x, y)$? Обозначим иерархию, порожденную функцией $\phi(x, y)$ как

$$Cl_0(\phi) \subset Cl_1(\phi) \subset Cl_2(\phi) \subset Cl_n(\phi) \subset \dots \mathbf{Cl}(\phi)$$

Можно сформулировать вполне очевидное утверждение

Утверждение 6: Пусть имеется две иерархии $\mathbf{Cl}(\phi)$ и $\mathbf{Cl}(\psi)$. Тогда если $\phi \in Cl_1(\psi)$, то для всех n имеет место включение $Cl_n(\phi) \subset Cl_n(\psi)$.

Следствие 7: Если $\phi \in Cl_1(\psi)$ и $\psi \in Cl_1(\phi)$, то для всех n имеет место совпадение классов $Cl_n(\phi) = Cl_n(\psi)$.

В частности, иерархии, порожденные разными арифметическими действиями совпадают ввиду следующих соотношений $xy = exp(ln(x) + ln(y))$ и $x + y = ln(exp(x)exp(y))$.

Рассмотрим несколько примеров.

(1) Многочлен $x^2 + y^2$ имеет, очевидно, порядок сложности один, а многочлен $x^2 + xy$ - два. Действительно, $\Delta_1(x^2 + xy) = 2$, т.е. сложность больше одного, а то что она не выше двух - видно непосредственно.

Вопрос 8: Для полиномов наряду с аналитической сложностью можно рассмотреть полиномиальную. Т.е. строить такую же иерархию, используя полиномы от одного переменного. Совпадут ли эти классы? Или совсем конкретно. Пусть полином $z(x, y)$ имеет аналитическую сложность порядка один. Существует ли представление $z = c(a(x) + b(y))$, где (a, b, c) - полиномы?

(2) А.Островский, [2] показал, что обобщенная ζ-функция Римана

$$\zeta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$$

не может удовлетворять ни какому полиномиально-дифференциальному соотношению, поэтому ее аналитическая сложность равна бесконечности.

Если ввести в пространстве аналитических функций какую-либо разумную топологию, то стандартные рассуждения показывают, что **Cl** - это довольно тощее подмножество (1-я категория по Бэру, т.е. счетное объединение нигде не плотных подмножеств). Однако экзистенциальный статус этого великого множества никому не известных функций вызывает сомнение. Есть точка зрения, что их и нет вовсе. С другой стороны, многочлены, рациональные функции, все элементарные функции (в образующие можно добавить и все специальные функции одного переменного), безусловно попадают в **Cl**. Противостояние тонкого культурного слоя - **Cl**, т.е. Космоса и окружающего его Хаоса - это похоже на античную космогонию. В некотором смысле, это рождение из Хаоса. Наша иерархия возникает не без участия Хаоса, ведь мы используем *все* функции одного переменного. Но, с другой стороны, возникновение нашей иерархии - это не похоже на античное самопорождение. Главным событием является появление функции $x+y$ и это ближе к христанскому богословию.

(3) Пусть функция z задана соотношением $z^m + xz + y = 0$. Если $m = 1$, то порядок сложности - один. Покажем, что для всех степеней $m \geq 2$ порядок равен двум. Действительно, дифференцируя определяющее соотношение получаем $z = z'_x/z'_y$, тогда $\delta_1(z) = 0$ принимает вид $(ln(z))''_{xy} = 0$, но тогда $(ln(z))''_{xy} = (z'_x/z)'_y = z''_{yy}$ и $z = P(x) + Q(x)y$, т.е. для каждого x функция z линейна по y. Это возможно лишь при $m = 1$. Значит если $m \geq 2$, то порядок не меньше двух. С другой стороны, после замены $Z = z/y^{\frac{1}{m}}$, $t = xy^{\frac{1}{m-1}}$ уравнение принимает вид $Z^m + tZ + 1 = 0$, решением которого является алгебраическая функция

одного переменного $Z(t)$. В результате получаем представление исходной функции в виде $z = y^{\frac{1}{m}} Z(xy^{\frac{1}{m-1}})$. Поскольку обе функции $y^{\frac{1}{m}}$ и $Z(xy^{\frac{1}{m-1}})$ содержатся в первом классе, то их произведение - во втором.

Полученный результат находится в некотором противоречии с формальной сложностью известных формул для корней уравнений. Для квадратного уравнения - все в порядке. Формула

$$z = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 - 4y})$$

имеет формальный порядок сложности - два. Однако если $m = 3$, то

$$z = \frac{1}{6}(-108x + 12\sqrt{12x^3 + 81y^2})^{1/3} - 2x(-108x + 12\sqrt{12x^3 + 81y^2})^{-1/3},$$

а эта формула, как легко убедиться, имеет формальный порядок четыре. При $m = 4$ (не буду приводить формулу) формальный порядок равен восьми (!). Логического противоречия, конечно, нет. Просто формулы Кардано и Феррари решают другую задачу и, с нашей точки зрения понимания сложности, они являются весьма неэкономными.

Как вычислить дифференциальные полиномы Δ_n, которые задают следующие классы - Cl_n? У этой задачи есть известный аналог. Пусть кривая $z_1 = f(t),\ z_2 = g(t)$ задана параметрически. Как перейти от параметрических уравнений к уравнению на z_1 и z_2? - Нужно исключить параметр t. Если, к тому же, f и g - многочлены, то можно воспользоваться современной версией теории исключений. Для этого надо в кольце многочленов от (z_1, z_2, t) рассмотреть идеал, порожденный соотношениями $z_1 - f(t) = 0,\ z_2 - g(t) = 0$, ввести на переменных порядок так, чтобы t оказалась старшей переменной, распространить его на мономы, вычислить (алгоритм Бухбергера) стандартный базис (базис Гребнера) этого идеала. Тогда, в соответствии с общей теорией [3], список элементов этого базиса открывается полиномом, который не содержит t. Кривая - его нулевое множество. Наша ситуация вполне аналогична описанной. Соотношение $z = C(A_{n-1}(x, y) + B_{n-1}(x, y))$ - это параметрическое представление произвольной функции из Cl_n, оно определяется некоторым набором функций одного переменного $t = (a_1, b_1, c_1, \dots)$. Рассмотрим это соотношение как образующую дифференциального идеала в дифференциальном кольце, где формальными переменными являются функция z со всеми своими производными и функции из набора t со всеми своими производными. В этом кольце следует ввести порядок переменных так, чтобы z и ее производные были младше t и ее производных и распространить этот порядок на дифференциальные мономы. Алгоритм Колчина-Ритта строит дифференциальный базис Гребнера [3]. В соответствии с теорией, список элементов базиса открывается полиномами, не содержащими параметров. Это и есть искомые выражения Δ_n.

К сожалению, сложность этого алгоритма столь высока, что не ясно, реализуем ли он практически хотя бы для вычисления Δ_2.

2. Симметрии и инварианты

Построенная выше иерархия классов обладает некоторой очевидной симметрией. А именно, если $P(x)$, $Q(y)$ и $R(z)$) - локально обратимые аналитические замены своего единственного переменного, функция $z(x,y) \in Cl_n$ и если выражение $R(z(P(x),Q(y))$ определяет какую-либо функцию, то она принадлежит тому же классу Cl_n. Такие замены образуют псевдогруппу [4], которую мы обозначим G. Поскольку G действует гладкими заменами, то это действие имеет естественное продолжение в пространство струй. Координаты пространства ℓ-струй можно рассмотреть как координаты конечномерного пространства. Размерность этого пространства $D(\ell) = 2 + (1 + 2 + \cdots + (\ell+1)) = 2 + (\ell+1)(\ell+2)/2$, выражения для производных порядка не выше ℓ - это полиномы, которые зависят от производных замены порядка также не выше ℓ, а их количество это $d(\ell) = 3(\ell+1)$. С этой точки зрения наши замены образуют локальную группу Ли размерности $d(\ell)$, действующую в линейном пространстве размерности $D(\ell)$. Вот начальный список размерностей

$$\begin{array}{llllll} D(0)=3, & D(1)=5, & D(2)=8, & D(3)=12, & D(4)=17, & \dots \\ d(0)=3, & d(1)=6, & d(2)=9, & d(3)=12, & d(4)=15, & \dots \end{array}$$

Если векторное поле

$$v = p(x)\frac{\partial}{\partial x} + q(y)\frac{\partial}{\partial y} + r(z)\frac{\partial}{\partial z}$$

порождает локальную 1-параметрическую группу аналитических преобразований в пространстве 0-струй, то продолжение этого действия на струи более высокого порядка - это также 1-параметрические группы со своими образующими $pr^{(\ell))}v$. Эти образующие имеют вид (см.[1])

$$pr^{(1)}v = v + (r'(z) - p'(x))z'_x\frac{\partial}{\partial z'_x} + (r'(z) - q'(y))z'_y\frac{\partial}{\partial z'_y}$$

$$pr^{(2)}v = pr^{(1)}v + (r''(z'_x)^2 + r'z_{xx} - p''z_x - 2p'z''_{xx})\frac{\partial}{\partial z''_{xx}} +$$

$$(r''z'_xz'_y + r'z''_{xy} - p'z''_{xy} - q'z''_{xy})\frac{\partial}{\partial z''_{xy}} + (r''(z'_y)^2 + r'z_{yy} - q''z_y - 2q'z''_{yy})\frac{\partial}{\partial z''_{yy}}$$

$$pr^{(3)}v = pr^{(2)}v + ((p'''z'_x + 3p''z''_{xx} + 3p'z'''_{xxx}) + (r'''(z'_x)^3 + 3r''z'_xz''_{xx} + r'z'''_{xxx}))\frac{\partial}{\partial z'''_{xxx}} +$$

$$((p''z''_{xy} + 2p'z'''_{xxy}) + (q'z'''_{xxy}) + (r'''(z'_x)^2z_y + r''(2z'_xz''_{xy} + z_{xx}z_y) + r'z'''_{xxy}))\frac{\partial}{\partial z'''_{xxy}} +$$

$$((q''z''_{xy} + 2q'z'''_{xyy}) + (p'z'''_{xyy}) + (r'''(z'_y)^2z_x + r''(2z'_yz''_{xy} + z_{yy}z_x) + r'z'''_{xyy}))\frac{\partial}{\partial z'''_{xyy}} +$$

$$((q'''z'_y + 3q''z''_{yy} + 3q'z'''_{yyy}) + (r'''(z'_y)^3 + 3r''z'_yz''_{yy} + r'z'''_{yyy}))\frac{\partial}{\partial z'''_{yyy}}$$

и так далее. Фиксируем порядок струи ℓ. Величины

$$(p, p', \dots, p^{(\ell)}, q, q', \dots, q^{(\ell)}, r, r', \dots, r^{(\ell)})$$

можно считать независимыми параметрами. Каждому из них соответствует инфинитезимальная образующая локальной группы Ли. Размерность орбиты - это ранг соответствующей матрицы. Для $\ell = 1$ эта матрица выглядит так

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z'_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z'_y \\ 0 & 0 & 0 & z_x & z_y \end{pmatrix}$$

Матрица имеет размер 6×5, что соответствует тому что локальная группа размерности 6 (параметры (p, p', q, q', r, r')) действует в пространстве размерности 5 (параметры (x, y, z, z_x, z_y)). Данная матрица имеет блочную структуру - прямым слагаемым выделяется единичная матрица размера 3×3. Это соответствует тому, что явная зависимость от (p, q, r) имеется только в 0-струе. Таким образом такое же прямое слагаемое будет присутствовать и в матрицах, построенных для произвольных ℓ. От сюда, в частности, следует утверждение

Утверждение 9: Любой инвариант продолженного действия не зависит явно от (x, y, z).

Таким образом, интерес представляет усеченная локальная группа (параметры $(p', \dots, p^{(\ell)}, q', \dots, q^{(\ell)}, r', \dots, r^{(\ell)})$), действующая на пространстве усеченных струй (т.е. без (x, y, z)). Ей соответствует усеченная матрица, которая содержит всю информацию о ранге системы образующих. Для $\ell = 1$ это матрица размера 3×2, ее ранг равен 2 вне $\{z_x z_y = 0/ = Cl_0$,а на Cl_0 ранг не выше 1. Орбита точки общего положения - открыта, поэтому инвариантов - нет. Cl_0 - это особая орбита.

Пусть теперь $\ell = 2$, усеченная матрица имеет вид

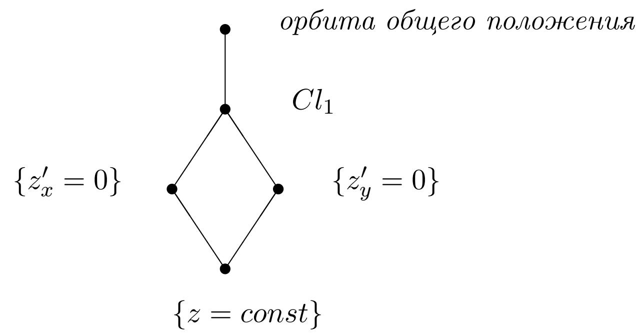
$$\begin{pmatrix} z'_x & 0 & 2z''_{xx} & z''_{xy} & 0 \\ 0 & z'_y & 0 & z''_{xy} & 2z''_{yy} \\ z'_x & z'_y & z''_{xx} & z''_{xy} & z''_{yy} \\ 0 & 0 & z'_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z'_y \\ 0 & 0 & (z'_x)^2 & z'_x z'_y & (z'_y)^2 \end{pmatrix}$$

Вне тогоже нулевого класса $\{z_x z_y = 0\}$ ее ранг максимален и равен 5, на Cl_0 он не выше 2. Орбита точки общего положения - открыта, инвариантов - нет.

Следующий шаг - $\ell = 3$, размер усеченной матрицы 9×9

$$\begin{pmatrix} z'_x & 0 & 2z''_{xx} & z''_{xy} & 0 & 3z'_x & 2z'''_{xxy} & z'''_{xyy} & 0 \\ 0 & z'_y & 0 & z''_{xy} & 2z''_{yy} & 0 & z'''_{xxy} & 2z'''_{xyy} & 3z'''_{yyy} \\ z'_x & z'_y & z''_{xx} & z''_{xy} & z''_{yy} & z'''_{xxx} & z'''_{xxy} & z'''_{xyy} & z'''_{yyy} \\ 0 & 0 & z'_x & 0 & 0 & 3z''_{xx} & z''_{xy} & z'''_{xxy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z'_y & 0 & 0 & z''_{xy} & 3z''_{yy} \\ 0 & 0 & {z'_x}^2 & z'_x z'_y & {z'_y}^2 & 3z'_x z''_{yy} & 2z'_x z''_{xy} + z'_y z''_{xx} & 2z'_y z''_{xy} + z'_x z''_{yy} & 3z'_y z''_{xx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z'_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z'_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {z'_x}^3 & {z'_x}^2 z'_y & z'_x {z'_y}^2 & {z'_y}^3 \end{pmatrix}$$

определитель равен $2\ (z'_x)^4 (z'_y)^4 \Delta_1(z)$. Это и есть вторая точка зрения на полином (1). Он задает особую орбиту в 3-струе. Таким образом, орбита точки общего положения открыта, инвариантов - нет. Две особые орбиты это Cl_0 и Cl_1. Воспользуемся обозначениями работы [5]: точка, расположенная выше изображает орбиту, чье замыкание содержит орбиту, изображаемую точкой, расположенной ниже. Тогда описанное действие дает следующую картину примыкания орбит.



Тому, что Cl_0 распался на две орбиты соответствует тот факт, что $\Delta_0(z)$ распадается на два неприводимых множителя, тогда как $\Delta_1(z)$ - неприводим. Пусть $\ell(n)$ - это дифференциальный порядок $\Delta_n(z)$. Если все остальные классы неприводимы, то можно предположить, что общая картина примыкания орбит для действия в $\ell(n)$-струе представляет собой линейный (за исключением нижнего звена) граф, вершинами которого являются все классы вплоть до Cl_n плюс орбита точки общего положения.

3.Ткани

Ткани были введены в математический обиход В.Бляшке [6]. 3-ткань на плоскости, либо в области на плоскости - это три семейства гладких плоских кривых $\{u_1(x,y) = const,\ u_2(x,y) = const,\ u_3(x,y) = const\}$, таких что якобиан любой пары функций не обращается в нуль. Ткани, полученные друг из друга гладкой заменой координат на плоскости, полагаются эквивалентными. Поскольку других тканей у нас нет, то ткань - это плоская аналитическая 3-ткань. Аналитичность - это аналитичность функций, кривых и замен. Каждая ткань локально может быть представлена в виде

$$\{x = const, \quad y = const, \quad z(x,y) = const, \quad \text{где } z \notin Cl_0\} \tag{4}$$

В цитированной работе Бляшке развита дифференциально-геометрическая теория тканей. С тканью связывается традиционный набор объектов: дифференциальные формы, связность, кривизна и пр. Форма кривизны ткани - это 2-форма на плоскости $\Omega = k(x,y)dx \wedge dy$, которая определяется одним скалярным коэффициентом - кривизной $k(x,y)$. Форма кривизны имеет геометрическое определение, если две ткани эквивалентны посредством некоторой замены, то та же замена связывает формы кривизны. Для тканей, представленных в виде (4) эквивалентность - это действие псевдогруппы G, рассмотренной выше.

Имеет место знаменательное совпадение. Для ткани, представленной в виде (4), кривизна $k = \delta_1(z)$ ([6], гл.1, параграф 9). Поэтому

Утверждение 10: Функция $z(x,y)$ имеет первый порядок сложности тогда и только тогда, когда соответствующая ей ткань вида (4) имеет нулевую кривизну.

Ткань, чья кривизна тождественно равна нулю, имеет локальное представление в виде трех семейств параллельных прямых. Такая ткань называется шестиугольной. Наше определение порядка сложности функции можно распространить на ткани.

Определение 11: Говорим, что ткань имеет порядок сложности n, если это порядок сложности функции z в представлении (4).

Определение корректно, т.е. эквивалентные ткани имеют одинаковый порядок сложности, потому что действие псевдогруппы G не меняет порядка сложности определяющей функции. Теперь мы можем сформулировать

Следствие 12: Ткани первого порядка сложности - это шестиугольные ткани и только они.

Вопрос 13: Какое геометрическое свойство характеризует ткани второго порядка сложности?

При этом вопрос содержателен даже для прямолинейных тканей, т.е. тканей, образованных тремя семействами прямых линий. Любопытные примеры прямолинейных тканей дает зависимость решения алгебраического уравнения от двух его коэффициентов. Пусть, например, $z(x,y)$ - решение уравнения $z^m + xz + y = 0$, тогда линии уровня - прямые и мы имеем прямолинейную ткань. Как было показано выше, порядок сложности при $m \geq 2$ равен двум.

Вопрос 14:(a) Чему равен порядок сложности прямолинейной ткани, заданной уравнением $z^m + xz^2 + yz + 1 = 0$?
(b) Рациональные функции и определяемые ими ткани имеют конечный порядок сложности. Существуют ли алгебраические функции (алгебраические ткани) бесконечного порядка сложности?

Список литературы

[1] P.Olver, Application Lie groups to differential equations.
[2] A.Ostrovski, Uber Dirichletsche Raihen und algebraishe Differentialgleichungen, Math.Z.,1920, 8, P.241-298.
[3] E.Mansfield, Differential Grobner bases, Ph.D.Thesis, University of Sydney, 1991, http://www.kent.ac.uk/ims/personal/elm2/index.html
[4] S.Kobayashi, K.Nomizu, Foundation of Differential Geometry, v.1-2, Interscience Publishers, 1963.
[5] H.Kraft, Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, 1985.
[6] W.Blashke, Einfuhrung in die Geometrie der Waben, Birkhauser, Basel und Stuttgart.

(В.К. Белошапка) Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия
E-mail address: `vkb@strogino.ru`