ТИПИЧНОЕ CR-МНОГООБРАЗИЕ КАК $\{e\}$-СТРУКТУРА

В.К. БЕЛОШАПКА

Аннотация. В работе показано, что "типичная"CR-структура редуцируется к $\{e\}$-структуре. На основе полученных, в результате этой редукции, инвариантных реперов (аналог репера Дарбу классической дифференциальной геометрии) дается простое доказательство аналога теоремы Витушкина о продолжении ростка для весьма широкого класса вещественных подмногообразий комплексных пространств.

Как учат нас классики, ключ к пониманию объекта - это знание его сингулярностей, "особых точек". Если мы занимаемся не индивидуальным объектом, а классом таких объектов, то такими сингулярностями становятся некие особые, редкие объекты, обладающие уникальными, в данном классе, свойствами. Знание этих особых объектов дает правильную точку зрения на типичный объект класса. Вот, например, "произвольный" росток трехмерной невырожденной вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ вовсе не имеет голоморфных симметрий, трехмерную группу имеют однородные поверхности Э.Картана, они образуют однопараметрическое семейство, больше - только у сферы, ее группа восьмимерна. Выберем сферу в качестве эталона, на который "произвольная"поверхность "хочет быть похожей". При этом сферу удобно записать в некомпактном представлении $\operatorname{Im} w = |z|^2$ (одна точка проективным преобразованием отправлена на бесконечность), тогда "произвольная" поверхность - это возмущение сферы $\operatorname{Im} w = |z|^2 + \varepsilon(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w)$. Стремление выбрать локальные голоморфные координаты так, чтобы сделать уравнение поверхности максимально похожим (в каком-либо разумном смысле) на уравнение сферы, приводит нас к нормальным координатам и к уравнению в нормальной форме $\operatorname{Im} w = |z|^2 + n(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w)$. Выбор нормальных координат однозначен с точностью до автоморфизма сферы, сохраняющего начало (стабилизатор точки сферы 5-мерен). Эта неоднозначность неизбежна, пока класс содержит объект со столь высокой симметрией. Если изъять из класса симметричные объекты, то выбор нормализации можно сделать однозначным. Это можно осуществить следующим образом. Воспользуемся нормализацией предложенной в работе [2], тогда младшие члены нормального уравнения имеют

Date: 29 декабря 2005 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 05-01-0981 и НШ-2040.2003.1.

вид

$$\operatorname{Im} w = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(c_{42}(\operatorname{Re} w) z^4 \bar{z}^2 + c_{52}(\operatorname{Re} w) z^5 \bar{z}^3 + c_{43}(\operatorname{Re} w) z^4 \bar{z}^3) + \dots$$

Если мы наложим условие $c_{42}(0) \neq 0$ (говорят, что поверхность *неомбилична* в начале координат), то стабилизатор точки содержит не более двух преобразований, а если еще одно условие $c_{42}(0)\bar{c}_{52}(0)+3c_{43}(0)\bar{c}_{42}(0) \neq 0$ (т.е. поверхность сильно неомбилична), то стабилизатор становится тривиальным [7], а нормальную форму можно уточнить так, что она станет единственной (специальная нормальная форма). Эти два условия определяют на вещественно аналитической гиперповерхности два плотных открытых подмножества, являющихся дополнениями к собственным аналитическим подмножествам, если только наша поверхность не сфера. В терминах G-структур [3] нашу процедуру можно описать следующим образом. Исходно невырожденная гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$ представляла собой $\mathbf{H}$-структуру, где $\mathbf{H}$ - это пятимерный стабилизатор точки на сфере [2]. На множестве неомбилических точек (наше первое условие) эта $\mathbf{H}$-структура редуцируется до $\mathbf{Z}_2$-структуры, а на множестве сильно неомбилических точек, она редуцируется до $\{\mathbf{e}\}$-структуры, т.е. представляет собой инвариантный репер в касательном рассслоении (абсолютный параллелизм). Построить такой репер на сильно неомбилической гиперповерхности можно без труда. Действительно, положим

$$\theta_1(\xi) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \theta_2(\xi) = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \theta_3(\xi) = \frac{\partial}{\partial u}$$

где $(z = x+iy,\ w = u+iv)$ - координаты в точке ξ, которые до 7-го весового порядка совпадают с единственными специальными формальными нормальными координатами в этой точке. Зависимость от точки определяется классом гиперповерхности, для аналитической она аналитическая, для гладкой - гладкая. Если имеется две таких гиперповерхности - Γ, $\tilde{\Gamma}$ и биголоморфное отображение первой на вторую, то его дифференциал переводит репер первой $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ в репер второй $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3)$.

Этот репер можно дополнить полем

$$\nu(\xi) = \frac{\partial}{\partial v},$$

которое порождает нормальное расслоение к нашей гиперповерхности. Полученная четверка полей вполне аналогична реперу Дарбу в геометрии поверхностей пространства $\mathbf{R}^3$.

Итак, констатируем: CR-структура на сильно неомбилическом трехмерном подмногообразии двумерного комлексного многообразия редуцируется к $\mathbf{e}$-структуре. Особый объект - в данном случае сфера - характеризуется богатыми симметриями, общий, типичный объект - богатой системой инвариантов.

Трехмерная вещественная гиперповерхность в двумерном комплексном многообразии является прообразом и источником аналогий для более многомерных ситуаций. Порождающее d-мерное вещественное подмногообразие M комплексного пространства размерности N, в первую очередь, характеризуется своим типом. Это пара (n, K), где n - CR-размерность, т.е. комплексная размерность комплексной касательной, а K - CR-коразмерность, которая, с одной стороны, есть вещественная коразмерность в объемлющем пространстве, а с другой, - коразмерность комплексной касательной в вещественном касательном пространстве. Подразумевается, что тип не зависит от точки и что n и K положительны. При этом $N = n + K$ и $d = 2n + K$. Есть еще один параметр, который нам понадобится, это ℓ - длина алгебры Леви-Танаки, которая определяется так. Это номер распределения, на котором стабилизируется возрастающая цепочка распределений вещественных подпространств, которая начинается с D_1 - распределения комплексных касательных и каждое следующее распределение получено в виде линейной оболочки предыдущего и скобок содержащихся в нем векторных полей. Причем можно полагать, что пространства из последнего распределения D_ℓ - это всё касательное пространство, т.к. общий случай к этому сводится.

Недавно, в работе [5], были построены модельные многообразия, которые являются "особыми"для класса вполне невырожденного вещественного подмногообразия произвольного типа (n, K) в том же смысле, в котором упомянутая выше сфера является особой среди ростков многообразий типа $(1, 1)$. Условие полной невырожденности означает следующее: скобками векторных полей из комплексной касательной мы не просто получаем всю касательную, но получаем ее за минимально возможное, при данных n и K, число опрераций. Ясно, что в таком случае ℓ не является независимым параметром, а вычисляется через тип. Минимальное значение ℓ это два и при фиксированном n параметр ℓ логарифмически медленно и неограниченно растет с ростом K. В отличие от типа (1,1) модельная поверхность не обязана быть единственной. В общем случае мы имеем конечномерное семейство попарно не эквивалентных модельных поверхностей, которое можно описать, как фактор-пространство пространства многочленов специального вида, по действию некоторой линейной группы [8]. Причем вся совокупность ростков вполне невырожденных многообразий данного типа делится на подтипы, каждый из которых подчинен своей модельной поверхности. Эта модельная поверхность (касательная модельная поверхность) $Q = Q(M_\xi)$ связана с ростком M_ξ наподобие соприкасающегося параболоида классической дифференциальной геометрии. Группа голоморфных симметрий модельной поверхности - это группа Ли являющаяся подгруппой группы бирациональных преобразований пространства.

Ее алгебра Ли это подалгебра полиномиальных векторных полей с естественной градуированной структурой вида

$$g = g_{-\ell} + \cdots + g_{-1} + g_0 + g_1 + \cdots + g_d = g_- + g_0 + g_+.$$

При этом подгруппа G_-, соответствующая подалгебре g_- действует на Q свободно без неподвижных точек и естественно отождествляется с самой модельной поверхностью Q. А алгебра Ли g_-, которая тогда становится касательным пространством, отождествляется с ее алгеброй Леви-Танаки, причем g_{-1} становится комплексной касательной и порождает всю подалгебру g_-. Группа G_0, соответствующая подалгебре g_0, это линейная подгруппа стабилизатора, имеющая явное описание, которая изоморфна некоторой подгруппе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Относительно подгруппы G_+, соответствующей g_+, известно следующее. Если $\ell = 2$, то d может принимать значения нуль, один и два. Для подавляющего большинства типов росткам общего положения соответствуют модельные поверхности, для которых $d = 0$, но двойка, во всех изученных ситуациях достижима. При $\ell \geq 3$ не известно ни одного примера с $d > 0$. Недавно И.Коссовским [4] было доказано, что если $\ell = 3$, то d всегда нуль, т.е. подгруппа G_+ - тривиальна. Представляется правдоподобным, что это верно для всех $\ell \geq 3$. Если это так, то алгебра Ли автоморфизмов любой модельной поверхности при $\ell > 2$ имеет вид $g = g_{-\ell} + \cdots + g_{-1} + g_0 = g_- + g_0$. И поскольку размерность g_- неизменна и равна размерности многообразия $d = 2n + K$, то единственной переменной, в смысле размерности, остается компонента g_0. Для некоторых редких типов G_0 может совпадать с полной линейной группой $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, но для подавляющего большинства типов и для модельных поверхностей, соответствующих росткам общего положения, она сводится к $\mathbb{R}^*$. Такие модельные поверхности называются жесткими, росток будем называть жестким, если жесткой является его касательная модельная поверхность. Наша ближайшая цель - показать, что CR-структура жесткого ростка (т.е. почти любого ростка) почти всегда (исключение - лишь модельная поверхность) редуцируется до $\{\mathbf{e}\}$-структуры. Для этого мы напомним некоторые конструкции и результаты работы [5].

Модельная поверхность произвольного типа (n, K) строится в результате некоторого рекуррентного процесса. Это процесс вычисления некоторой последовательности данных. Вот список данных с номером m: прямое разложение пространства многочленов веса m в сумму пространства гармонических форм $\mathcal{H}_m$ и его дополнения пространства нормализованных многочленов веса m - $\mathcal{CH}_m$, k_m размерность пространства $\mathcal{CH}_m$, пространство $\mathbb{C}^{k_m}$ с координатами $w_m = u_m + iv_m$. Отметим, что веса, возникающим при этом переменным, назначаются так: $[z] = [\bar{z}] = 1, \quad [u_m] = [w_m] = m$. Процесс заканчивается на ℓ-м шаге. Условием окончания процесса является попадание коразмерности K в диапазон

$$k_2 + \cdots + k_{\ell-1} < K \leq k_2 + \cdots + k_\ell$$

При этом избыток коразмерности $k = K - (k_2 + \cdots + k_{\ell-1})$ может изменяться в пределах от 1 до k_ℓ. В результате модельная поверхность типа (n, K) это поверхность Q в $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{k_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{k_{\ell-1}} \oplus \mathbb{C}^k$, заданная соотношениями

$$\begin{gathered} \mathrm{v}_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) \\ \cdots \\ \mathrm{v}_{\ell-1} = \Phi_{\ell-1}(z, \bar{z}, u_2, \ldots, u_{\ell-2}) \\ \mathrm{v}_\ell = \Phi_\ell(z, \bar{z}, u_2, \ldots, u_{\ell-1}) \end{gathered}$$

или просто $v = \Phi(z, \bar{z}, u)$. Здесь координаты Φ_j при $j = 2, ..., \ell - 1$ -это вещественный базис пространства $\mathcal{C}H_j$, а координаты Φ_ℓ - линейно независимые элементы $\mathcal{C}H_\ell$. Любой вполне невырожденный росток обратимой полиномиальной заменой может быть записан в виде

$$\begin{gathered} \mathrm{v}_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + F_{23}(z, \bar{z}, u) + \ldots \\ \cdots \\ \mathrm{v}_{\ell-1} = \Phi_{\ell-1}(z, \bar{z}, u_2, \ldots, u_{\ell-2}) + F_{\ell-1,\ell}(z, \bar{z}, u) + \ldots \\ \mathrm{v}_\ell = \Phi_\ell(z, \bar{z}, u_2, \ldots, u_{\ell-1}) + F_{\ell,\ell+1}(z, \bar{z}, u) + \ldots \end{gathered}$$

Здесь через $F_{p,q}$ обозначена компонента веса q из разложения F_p, т.е. члена из правой части уравнения для v_p дополнительного к Φ_p.Теперь, если обозначить через $F^{(s)}$ столбец вида $(F_{2,s+2}, F_{3,s+3}, \ldots, F_{\ell,s+\ell})$, тогда уравнение ростка можно записать в виде $v = \Phi(z, \bar{z}, u) + F^{(1)} + F^{(2)} + \ldots$, который мы будем называть стандартным.

По определению алгебра Ли $\operatorname{aut} Q$ инфинитезимальных автоморфизмов Q состоит из векторных полей с коэффициентами, голоморфными в окрестности начала координат вида

$$2 \operatorname{Re}(A \frac{\partial}{\partial z} + B_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + \cdots + B_\ell \frac{\partial}{\partial w_\ell})$$

с условием касания

$$\mathcal{L}(f, g) = (\operatorname{Re}(iB + 2\Phi'_z A + \Phi'_u B)|_{w=u+i\Phi} = 0 \tag{1}$$

Алгебра Ли соответствующая стабилизатору нуля $\operatorname{aut}_0 Q$ - это подалгебра $\operatorname{aut}_0 Q$ состоящая из полей, обращающихся в нуль в начале координат. Оказывается, что уравнение (1) имеет лишь полиномиальные решения ограниченного веса. Если распространить введенные веса на векторные поля на $\mathbb{C}^{n+K}$ условием $[\frac{\partial}{\partial z}] = [\frac{\partial}{\partial \bar{z}}] = -1, \quad [\frac{\partial}{\partial w_j}] = [\frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}] = -j$, то алгебра $\operatorname{aut} Q$ становится градуированной алгеброй Ли. Справедливо следующее утверждение: вместе с каждым полем алгебра содержит каждую его однородную градуированную компоненту. Жесткость модельной поверхности означает, что $\operatorname{aut}_0 Q = g_0$ одномерна и порождается полем

$$2\,\mathrm{Re}(z\frac{\partial}{\partial z}+2w_2\frac{\partial}{\partial w_2}+\dots+\ell w_\ell\frac{\partial}{\partial w_\ell}) \tag{2}$$

т.е. одномерное пространство, порожденное (2) - это пересечение ядра оператора $\mathcal{L}$ с подпространством полей, обращающихся в нуль в начале координат. Расмотрим $\mathcal{L}$ как линейный оператор, отображающий пространство V наборов из $n+K$ формальных степенных рядов от (z,w) в пространство $\mathcal{F}$ наборов из K формальных степенных рядов от $(z,\bar z,u)$. Пространство $\mathcal{F}$ представим в виде прямой суммы $\mathrm{Im}\,V\oplus\mathcal{N}$ образа опрератора $\mathcal{L}$ и прямого дополнения к образу. Дополнение выбираем соблюдая следующие условия. Во-первых, выбор производим отдельно в каждой весовой компоненте, а во-вторых, требуя обращения в нуль тех или иных мономов. Ясно, что так выбранное дополнение будет инвариантно относительно однопараметрической подгруппы преобразований вида $z\mapsto tz, w_2\mapsto t^2w_2,\dots,w_\ell\mapsto t^2w_\ell$, где $t\in\mathbb{R}^*$, которая представляет собой стабилизатор жесткой модельной поверхности.

После этого стандартными рассуждениями [2] получаем следующее утверждение.

Утверждение 1: (1) Уравнение вполне невырожденного ростка, чья касательная модельная поверхность является жесткой формальной заменой переменных (z,w), можно привести к нормальной форме $v=\Phi(z,\bar z,u)+N(z,\bar z,u)$, где $N\in\mathcal{N}$.
(2) Это приведение $(z\mapsto f(z,w),\quad w\mapsto g(z,w))$ однозначно с точностью до выбора одного вещественного параметра $t=\frac{\partial f^1}{\partial z^1}(0,0)$.
(3) Если $(z\mapsto f(z,w),\quad w\mapsto g(z,w))$ отображение одной нормальной формы в другую, то $f(z,w)=tz,\quad g(z,w)=(t^2w_2,\dots,t^\ell w_\ell)$.
(4) Единственной нормальной формой уравнения модельной поверхности является $v=\Phi(z,\bar z,u)$.

Пусть нормальное уравнение ростка поверхности имеет вид

$$\begin{gathered}
\mathrm{v}_2=\Phi_2(z,\bar z)+N_{23}(z,\bar z,u)+N_{24}+\dots\\
\dots\\
\mathrm{v}_{\ell-1}=\Phi_{\ell-1}(z,\bar z,u_2,\dots,u_{\ell-2})+N_{\ell-1,\ell}(z,\bar z,u)+\dots\\
\mathrm{v}_\ell=\Phi_\ell(z,\bar z,u_2,\dots,u_{\ell-1})+N_{\ell,\ell+1}(z,\bar z,u)+\dots
\end{gathered}$$

или $v=\Phi(z,\bar z,u)+N^{(1)}+N^{(2)}+\dots$. Если росток эквивалентен модельной поверхности, то это означает, что все компоненты нормального уравнения обратились в нуль, такой росток мы, по аналогии с типом (1,1), называем *сферическим*. Ясно, что если росток вполне невырожденной вещественно аналитической поверхности в некоторой ее точке оказался сферическим, то он сферичен и во всех остальных точках. Если же это не так и m - номер первой отличной от нуля компоненты $N^{(m)}$, то

говорим, что росток *несферичен* и m - это его порядок несферичности в данной точке. Очевидно, что все однопараметрическое семейство нормальных уравнений ростка имеет один и тот же порядок несферичности, т.е. это инвариантная характеристика. Относительно зависимости компонент $N^{(j)}$ от уравнений исходного ростка можно сделать следующее
Замечание 2: *(1)* Весовая j-струя нормализованного уравнения $\{N^{(1)},\dots,N^{(j)}\}$ зависит лишь от весовой j-струи исходного уравнения $\{F^{(1)},F^{(2)},\dots,F^{(j)}\}$ и вещественного параметра t, причем зависимость от струи является вещественно аналитической, а от параметра t - полиномиальной.
(2) Замена вида $z\mapsto tz, \quad w\mapsto (t^2w_2,\dots,t^\ell w_\ell)$. меняет нормальное уравнение ростка $v=\Phi(z,\bar z,u)+N^{(1)}+N^{(2)}+\dots$ на уравнение
$v=\Phi(z,\bar z,u)+tN^{(1)}+t^2N^{(2)}+\dots$

Если многообразие является несферическим, то в точке, где порядок несферичности не выше m, можно наложить еще одно условие. Обозначим через $||N||_m$ сумму модулей всех коэффициентов всех компонент m-струи $\{N^{(1)},N^{(2)},\dots,N^{(j)}\}$, а теперь, пользуясь оставшейся степенью свободы, потребуем выполнения условия $||N||_m=1$. Такую нормальную форму будем называть специальной нормальной формой порядка m. Специальная нормальная форма определена однозначно, с точностью до преобразования ($z\mapsto tz,\ w_2\mapsto t^2w_2,\dots,w_\ell\mapsto t^\ell w_\ell$), где t либо 1, либо (-1). Чтобы избавиться от $\mathbf{Z}_2$-симметрии надо сформулировать условие, исключающее из нашей совокупности "типичных"ростков ростки, для которых преобразование ($z\mapsto -z,\ w_2\mapsto w_2,\ w_3\mapsto -w_3,\dots,w_\ell\mapsto(-1)^\ell w_\ell$) является автоморфизмом. Ростки с такой симметрией это ростки, в уравнении которых присутствуют компоненты $N^{(j)}$ лишь с четными номерами j. Такие ростки будем называть четными. Номер m первой отличной от нуля нечтной компоненты будем называть порядком нечетности. Для ростка, не являющегося четным, можно ввести дополнительное требование к нормальной форме. Потребуем, чтобы младший, в смысле лексикографического порядка, отличный от нуля моном младшей отличной от нуля нечетной компоненты имел аргумент коэффициента заключенный в полуинтервале $[0,\pi)$. Это условие лишает процедуру построения нормальной формы последней неоднозначности. Т.е. теперь у нас есть две специальные нормальные формы: одна не использует нечетность, а вторая использует. Мы не будем вводить особый термин, из контекста всегда ясно о какой форме идет речь. Сформулируем очевидное утверждение.

Утверждение 3: (1) Любой несферический росток, не являющийся четным формальной заменой приводится к специальной нормальной форме некоторого порядка.
(2) Это приведение единственно.
(3) Если несферичность и нечетность ростка имеют порядок не выше

m, то m-струя его уравнения в специальной нормальной форме m-го порядка аналитически зависит от m-струи исходного уравнения ростка.

Если у нас есть вещественно аналитическое вполне невырожденное многообразие M, несферическое порядка m и без четных точек (т.е. не являющееся четным ни в одной точке), то у нас теперь есть возможность выбрать голоморфно инвариантный репер касательного расслоения. Для этого достаточно в каждой точке $\xi \in M$ записать росток M_ξ в координатах, которые совпадают со специальными нормальными координатами $(z = x + iy, \ w = u + iv)$ до порядка m и рассмотреть стандартный репер касательного пространства в цетре ростка, т.е. $E = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \ \frac{\partial}{\partial y_n}, \ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_K}\}$. К этому можно добавить, что $NE = \{\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_K}\}$ представляет собой голоморфно инвариантный репер нормального расслоения. Зависимость реперов от точки - аналитическая. Итак, имеет место

Теорема (о редукции): (1)На вещественно аналитическом вполне невырожденном многообразии M, несферическом и не являющееся четным ни в одной точке имеются: голоморфно инвариантный, *аналитически зависящий от точки* репер касательного расслоения, и такой же репер нормального расслоения. В частности, CR-структура на таком многообразии редуцируется к $\{\mathbf{e}\}$-структуре.
(2) Если не накладывать условия отсутствия четных точек, то можно утверждать, что над многообразием имеется двулистное накрытие, слоем которого является инвариантная пара реперов касательного пространства.

Тривиальность касательного расслоения, как известно, это определенное ограничение на топологическое строение такого многообразия.

Теперь мы применим построенный инвариантный репер к задаче продолжения голоморфных отображений в духе теоремы Витушкина [1]. Наша точка зрения на эту задачу заключается в следующем. Как показывает опыт здесь имеется два источника трудностей. Первая связана со стремлением охватить в едином подходе как особые многообразия с богатыми группами симметрий, так и типичные, у которых симметрий нет вовсе. Вторая характерна для аналитического подхода с использованием нормальных форм и координат, - это проблемы связанные со сходимостью тех или иных формальных рядов [2]. Первую трудность мы исключаем, рассматривая только "типичные"многообразия ($\mathbf{Z}_2$-симметрия допускается). Вторую тем, что мы используем формальную нормальную форму, не занимаясь вопросами ее сходимости.

Перед формулировкой основного результата дадим следующее определение. Число $\varepsilon > 0$ будем называть *запасом аналитичности* функции или отображения Φ в точке ξ если Φ имеет представление в виде суммы степенного ряда в полидиске радиуса ε с центром в ξ, а на замкнутом полидиске радиуса $\varepsilon/2$ не превосходит $1/\varepsilon$. Запасом аналитичности поверхности M в точке ξ будем называть запас аналитичности функции F, т.ч. $M = \{v - F(z, \bar{z}, u) = 0\}$, в окрестности ξ, где F имеет нулевой дифференциал в ξ. Вот наша версия теоремы о ростке.

Теорема (о ростке): Пусть M и $\tilde{M}$ два жестких вполне невырожденных несферических вещественно аналитических подмногообразия комплексных пространств X и $\tilde{X}$, K и $\tilde{K}$ - компактные подмножества M и $\tilde{M}$ соответственно. Пусть ξ и $\tilde{\xi}$ точки принадлежащие K и $\tilde{K}$, а ψ - росток обратимого голоморфного отображения M_ξ в $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$, переводящий ξ в $\tilde{\xi}$. Тогда запас аналитичности отображения ψ - это положительная величина, зависящая лишь от набора M, K, $\tilde{M}$ и $\tilde{K}$.

Доказательство: На компакте K порядок несферичности точек - ограничен некоторой величиной m, иначе найдется точка, в которой росток многообразия и, тем самым, все многообразие - сферично. Если многообразие M несферично порядка m, то поскольку величина $||N||_m(\xi)$ ограничена на K сверху и снизу положительными константами, то тоже самое можно сказать и о значениях абсолютной величины множителя t, который используется для преобразования нормальной формы в специальную. Таким образом запас аналитичности инвариантной пары реперов

$$\Theta^+ = (\Theta_1^+, \ldots, \Theta_{2n+K}^+), \qquad \Theta^- = (\Theta_1^-, \ldots, \Theta_{2n+K}^-)$$

в произвольной точке K зависит лишь от M и K. Симметричным образом тоже самое можно утверждать и об инвариантной паре реперов на $\tilde{K}$ -

$$\tilde{\Theta}^+ = (\tilde{\Theta}_1^+, \ldots, \tilde{\Theta}_{2n+K}^+), \qquad \tilde{\Theta}^- = (\tilde{\Theta}_1^-, \ldots, \tilde{\Theta}_{2n+K}^-)$$

.

Для каждой из четырех пар вида $(\Theta, \tilde{\Theta})$, где Θ - это один из двух реперов на первом многообразии, а $\tilde{\Theta}$ - на втором, построим некоторое вещественно аналитическое отображение ϕ первого ростка во второй, действуя следующим образом. Положим $\psi(\xi) = \tilde{\xi}$. Если $x(t_1)$ и $\tilde{x}(t_1)$ - это интегральные кривые полей Θ_1 и $\tilde{\Theta}_1$, проходящие при $t_1 = 0$ через ξ и $\tilde{\xi}$ соответственно, то положим $\psi(x(t_1)) = \tilde{x}(t_1)$. Далее пусть $x(t_1, t_2)$ и $\tilde{x}(t_1, t_2)$ - интегральные кривые полей Θ_2 и $\tilde{\Theta}_2$, такие что $x(t_1, 0) = x(t_1)$ $\tilde{x}(t_1, 0) = \tilde{x}(t_1)$, тогда положим $\psi(x(t_1, t_2)) = \tilde{x}(t_1, t_2)$. И так далее. После последнего (2n+K)-го шага мы получаем, что отображение ψ определено на полной окрестности точки ξ, которую оно обратимо отображает на полную окрестность точки $\tilde{\xi}$. При этом запас аналитичности прямого и обратного отображения зависит только от запасов аналитичности пар реперов. Заметим теперь следующее. Если ростки M_ξ и $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ были голоморфно эквивалентны, то там, где имеется голоморфное отображение, оно обязано совпасть с одним из четырех построенных. А вещественно аналитическое отображение, голоморфное в малой окрестности - голоморфно там, где оно аналитично. Это завершает доказательство.

Из этой теоремы, как и в [6], можно получить массу следствий. Во всех этих следствиях речь идет о вполне невырожденных жестких несферических вещественно аналитических подмногообразиях комплексных пространств и о ростках голоморфных локально обратимых отображений.

Следствия: (1) Если оба подмногообразия M и $\tilde{M}$ компактны, то запас аналитичности ростка любого отображения M_ξ в $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ - оценивается снизу константой, зависящей лишь от пары многообразий.
(2) Группа глобальных автоморфизмов компактного подмногообразия M - компактна (в естественной топологии равномерной сходимости на компактах) группа Ли голоморфных преобразований M. (3) Если $\tilde{M}$ - компактно, то ψ продолжается по всем путям на M.
(4) Если $\tilde{M}$ - компактно, а M односвязно, то ψ продолжается до голоморфного, локально обратимого отображения M в $\tilde{M}$.
(5) Если как M так и $\tilde{M}$ - компактны и односвязны, то ψ продолжается до голоморфной эквивалетности между M и $\tilde{M}$.

Любая ситуация, в которой какое-либо из этих заключений оказывается неверным, указывет на то, что построенная выше $\{\mathbf{e}\}$-структура подверглась вырождению. При наличии несферичности, очевидная причина - это утрата полной невырожденности. Т.е. мы имеем дело с особенностью. Особенности нашей $\{\mathbf{e}\}$-структуры это тема отдельного рассмотрения.

Если касательное расслоение многообразия нетривиально, то такие особенности возникают с неизбежностью.

Список литературы

[1] Витушкин А.Г. Голоморфные отображения и геометрия поверхностей. Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т.7, Москва 1985, С.167-226.

[2] Chern S.S., Moser J.K., Real hypersurfaces in complex manifold, Acta Math.(1974) V.133, No.3-4, P.219-271.

[3] S.Sternberg, Lectures on Differential Geometry, N.J.,1964

[4] Гаммель Р., Коссовский И., Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен "жесткости", Труды Математического института им. Стеклова, т.253, 2006 г., С.30-45.

[5] Белошапка В.К., Универсальная модель вещественного подмногообразия, Матем.заметки, т.75, № 4, С.507, 2004.

[6] Белошапка В.К., Ежов В.В., Шмальц Г. Теорема Витушкина для CR-многообразий энгелева типа, Труды МИАН, т.253, 2006 г., С.7-13.

[7] Белошапка В.К., О размерности группы автоморфизмов аналитической гиперповерхности, Известия АН СССР, сер.мат., 1979, т.43, N 2, С.243-266.

[8] Moduli Space of Model Real Submanifolds, Russian Journal of Math.Physics, Vol.13, № 3, 2006, pp.245-252.

(В.К. Белошапка) Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия

E-mail address: vkb@strogino.ru