ГОЛОМОРФНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^3$

В.К. БЕЛОШАПКА, В.В. ЕЖОВ, Г. ШМАЛЬЦ

Аннотация. В работе методом модельной поверхности изучаются четырехмерные вещественные подмногообразия $\mathbb{C}^3$. Доказано, что размерность группы голоморфных симметрий произвольного ростка четырехмерного аналитического многообразия не превосходит пяти, если только она конечна (имеется лишь два исключительных случая бесконечной размерности). Вычислена оболочка голоморфности модельной поверхности. Построена нормальная форма уравнения произвольного ростка и на ее основе дана голоморфная классификация вполне невырожденных ростков. Показано, что вполне невырожденная CR-структура накладывает сильные ограничения на топологическое строение многообразия, в частности, нельзя вполне невырожденно вложить четырехмерную сферу S^4 в трёхмерное комплексное многообразие.

1. Введение

Основным объектом изучения в данной работе является четырехмерное вещественное подмногообразие трехмерного комплексного пространства. Росток такой поверхности, если он является порождающим, можно квалифицировать как росток типа (1,2): единица - это комплексная размерность комплексной касательной (CR-размерность), а двойка - вещественная коразмерность. В $\mathbb{C}^3$ имеется лишь два типа порождающих ростков с положительной CR-размерностью - (1,2)и (2,1). Росток типа (2,1), т.е. росток пятимерной поверхности, принадлежит классу гиперповерхностей, который изучен достаточно хорошо. Данная работа продолжает изучение четырехмерных вещественных подмногообразий $\mathbb{C}^3$ начатое в [2]. Там было показано, что четырехмерная поверхность Q заданная в пространстве с координатами $(z,\ w_2 = u_2 + \mathrm{i}\, v_2,\ w_3 = u_3 + \mathrm{i}\, v_3)$ двумя уравнениями

$$v_2 = |z|^2, \qquad v_3 = 2\,\mathrm{Re}\, z^2 \bar{z}$$

является „хорошей моделью“ ростка типа (1,2), а „произвольную“ поверхнхость этого типа следует рассматривать как „случайное возмущение“ этой модельной поверхности. Сформулируем основные результаты работы [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке ARC Discovery Project grant DP0450725 и РФФИ, гранты 0015-96-008 и 02-01-01-291.

Пусть в пространстве $\mathbb{C}^3$ с координатами $(z,\ w_2 = u_2 + \mathrm{i}\, v_2,\ w_3 = u_3 + \mathrm{i}\, v_3)$ имеется росток гладкой четырехмерной порождающей поверхности M_ξ. Его можно задать двумя вещественными уравнениями

$$
\begin{aligned}
v_2 &= F_2(z, \bar{z}, u_2, u_3) \\
v_3 &= F_3(z, \bar{z}, u_2, u_3)
\end{aligned}
$$

Теперь мы потребуем выполнения некоторого условия невырожденности. Это конкретизация, в ситуации (1,2), условия *полной невырожденности ростка* [3]. Его можно формулировать как в координатных терминах, так и в инвариантных.

Дадим, сначала, инвариантную формулировку. Наш росток и любой его представитель имеет одномерную комплексную касательную, которая в полной касательной имеет вещественную коразмерность два. Пусть Z - росток векторного поля типа (1,0), которое в каждой точке принадлежит комплексификации комплексной касательной. Тогда условие полной невырожденности означает, что двукратные скобки полей Z и $\bar{\mathrm{Z}}$ порождают в каждой точке всю комплексифицированную касательную. Это условие можно разделить на две части. Первая - означает, что скобка $[\mathrm{Z}, \bar{\mathrm{Z}}]$ не содержится в комплексификации комплексной касательной. Это условие, как правило, называют невырожденностью по Леви. Второе условие заключается в том, что значения второй скобки $[\mathrm{Z}, [\mathrm{Z}, \bar{\mathrm{Z}}]]$ выходят за рамки пространства порожденного Z, $\bar{\mathrm{Z}}$ и $[\mathrm{Z}, \bar{\mathrm{Z}}]$. Получить всю касательную быстрее, чем на втором шаге, по числу скобок, мы не могли. Условие, тем самым, сводится к тому, что мы получили ее максимально быстро.

Чтобы дать координатную формулировку, назначим координатам и их вещественным частям веса следующим образом: $[z] = 1,\ [w_2] = [u_2] = 2,\ [w_3] = [u_3] = 3$, а через $\mathrm{O}(m)$ будем обозначать ряды, состоящие из мономов веса m и выше. Тогда полная невырожденность ростка M_ξ типа (1,2) означает, что после подходящей квадратично-треугольной замены уравнения имеют вид

$$
\operatorname{Im} w_2 = |z|^2 + \mathrm{O}(3), \qquad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + \mathrm{O}(4) \tag{1}
$$

При этом наличие в первом уравнении монома вида $|z|^2$ - это следствие условия невырожденности формы Леви, а наличие во втором $2\operatorname{Re}(z^2\bar{z})$ - это вторая часть условия полной невырожденности. Как известно, условие вырождения формы Леви на вещественно аналитическом многообразии - это аналитическое условие. Чтобы убедится в этом нужно локально ввести в рассмотрение еще два поля с аналитическими коэффициентами, дополняющими Z и $\bar{\mathrm{Z}}$ в точке до четырехмерной комплексифицированной касательной. Тогда определена нормальная проекция и условие Леви-вырождения это условие равенства нулю этой проекции (два скалярных аналитических соотношения), поэтому Md_1 это аналитическое подмножество M. Таким же образом можно убедится, что вторая часть условия полной невырожденности на $M \setminus Md_1$- тоже аналитическое условие (одно скалярное соотношение). Поэтому Md_2 - это аналитическое подмножество $M \setminus Md_1$.

Поверхность $Q = \{v_2 = |z|^2, \quad v_3 = 2\operatorname{Re}(z^2\bar{z})\}$ является хорошей модельной поверхностью вполне невырожденного ростка типа (1,2), что выражается в выполнении ряда утверждений.

1. Всякий вполне невырожденный росток может быть представлен в виде (1).

2. Группа автоморфизмов Q это 5-мерная группа Ли квадратично-треугольных преобразований, порожденная преобразованиями вида

$$(\text{-}3) \quad z \mapsto z, \quad w_2 \mapsto w_2, \quad w_3 \mapsto w_3 + q_3, \quad q_3 \in \mathbb{R}$$

$$(\text{-}2) \quad z \mapsto z, \quad w_2 \mapsto w_2 + q_2, \quad w_3 \mapsto w_3, \quad q_2 \in \mathbb{R}$$

$$(\text{-}1) \quad z \mapsto z + p, \quad w_2 \mapsto w_2 + 2\,\mathrm{i}\,\bar{p}z + \mathrm{i}\,|p|^2$$

$$w_3 \mapsto w_3 + 4(\operatorname{Re} p)w_2 + 2\,\mathrm{i}(2|p|^2 + \bar{p^2})z + 2\,\mathrm{i}\,\bar{p}z^2 + 2\,\mathrm{i}\operatorname{Re} p^2\bar{p}, \quad p \in \mathbb{C}$$

$$(0) \quad z \mapsto \lambda z, \quad w_2 \mapsto \lambda^2 w_2, \quad w_3 \mapsto \lambda^3 w_3, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

действующая на Q транзитивно. Соответствующая ей алгебра Ли векторных полей в естественной градуировке имеет структуру $\mathfrak{g}_{-3} + \mathfrak{g}_{-2} + \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0$ (нумерация автоморфизмов соответствует весам порождающих их полей).

3. Пятимерная алгебра Ли этой группы параметризует совокупность обратимых голоморфных отображений любого вполне невырожденного ростка типа (1,2) в другой фиксированный росток. В частности, группа автоморфизмов любого невырожденного ростка этого типа не может иметь размерность больше чем пять.

В данной работе изучение модельной поверхности Q и четырехмерных поверхностей в $\mathbb{C}^3$ будет продолжено. А именно

(1) Будет показано, что поверхность Q обладает самой богатой группой симметрий не только в классе вполне невырожденных поверхностей типа (1,2), а в классе всех вещественно аналитических четырехмерных ростков в $\mathbb{C}^3$ с конечномерными группами автоморфизмов и, в связи с этим, дается некая грубая классификация всех таких ростков (теорема 1).

(2) Будет вычислена оболочка голоморфности модельной поверхности Q, которая, как оказывается, имеет вид прямого произведения шара в простанстве $\mathbb{C}^2$ на комплексную прямую $\mathbb{C}^1$ (теорема 3).

(3) Будет построена нормальная форма ростка вполне невырожденного четырехмерного многообразия типа (1,2) и, на ее основе, дана голоморфная классификация этих ростков (теорема 4).

(4) Будет показано, что локально любое гладкое CR-многообразие типа (1,2) “сферическое конечного порядка” (см. определение 7) обладает CR-инвариантным репером касательного расслоения,

т.е. данная CR-структура редуцируется к $\{e\}$-структуре, а касательное расслоение - тривиально (теорема 9).

2. Доказательство гипотезы о размерности для многообразий типа (1,2)

Как это было показано в [2], поверхность Q имеет группу голоморфных автоморфизмов размерности 5 и эта пятерка оценивает размерность локальной группы любого вполне невырожденного ростка. Обсудим подробнее условие полной невырожденности.

Пусть M - гладкое вещественное подмногообразие линейного комплексного пространства типа $(1,2)$ в $\mathbb{C}^3$, TM - его касательное расслоение, $T^{\mathbb{C}}M$ - расслоение его комплексных касательных, $\mathbb{C}(TM)$ и $\mathbb{C}(T^{\mathbb{C}}M)$ - их комплексификации, ξ - точка M. Тогда TM_ξ имеет вещественную размерность 4, $T^{\mathbb{C}}M_\xi$ имеет вещественную размерность 2, $\mathbb{C}(TM)_\xi$ и $\mathbb{C}(T^{\mathbb{C}}M_\xi)$ - имеют комплексные размерности 4 и 2 соответственно. Пусть X и $Y = JX$ - два гладких векторных поля, определенные в окрестности ξ и представляющие локальный репер $T^{\mathbb{C}}M$, тогда поля $Z = X - \mathrm{i}\,Y$ и $\bar{Z} = X + \mathrm{i}\,Y$ являются полями типа $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно, причем Z и $\bar{Z}$ представляют локальный репер $\mathbb{C}(T^{\mathbb{C}}M)$. Если многообразие M - вещественно аналитическое, то локальные реперы можно выбирать среди полей с вещественно аналитическими коэффициентами.

В этих терминах условие полной невырожденности означает, что четыре векторных поля Z, $\bar{Z}$, $[Z,\bar{Z}]$, $[Z,[Z,\bar{Z}]]$ образуют в окрестности точки ξ локальный репер $\mathbb{C}(TM)$, и индуцируют фильтрацию $D_1 \subset D_2 \subset D_3 = \mathbb{C}(TM)$, где $D_1 = \mathrm{span}(Z,\bar{Z})$, $D_2 = \mathrm{span}(Z,\bar{Z},[Z,\bar{Z}])$, $D_3 = \mathrm{span}(Z,\bar{Z},[Z,\bar{Z}],[Z,[Z,\bar{Z}]])$ ($[,]$ означает скобку векторных полей).

Препятствий к выполнению этого условия имеется два. Во-первых, может оказаться, что в центре ростка вектор $[Z,\bar{Z}](\xi)$ содержится в $\mathrm{span}(Z,\bar{Z})(\xi) = \mathbb{C}(T^{\mathbb{C}}M_\xi)$. Тогда возникает альтернатива. Либо $[Z,\bar{Z}]$ содержится в $\mathrm{span}(Z,\bar{Z})$ на открытом подмножестве M, содержащем ξ (а тем самым, в силу аналитичности, и на всем M) и тогда распределение комплексных касательных оказывается интегрируемым по Фробениусу, многообразие M в окрестности ξ эквивалентно прямому произведению $\mathbb{C}\oplus\mathbb{R}^2$, а группа автоморфизмов ростка имеет бесконечную размерность. Либо множество точек Md_1, где произошло вырождение - это собственное вещественно аналитическое подмножество M. Во-вторых, такая же неприятность могла произойти при взятии второй скобки, т.е. в центре ростка вектор $[Z,[Z,\bar{Z}]](\xi)$ содержится в $\mathrm{span}(Z,\bar{Z},[Z,\bar{Z}])(\xi)$. И тогда возникает аналогичная альтернатива. Либо это имеет место на полномерной окрестности ξ и тогда распределение $\mathrm{span}(Z,\bar{Z},[Z,\bar{Z}])$ оказывается интегрируемым по Фробениусу, все пространство $\mathbb{C}^3$ распадается на два прямых слагаемых $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^1$, так что многообразие M в окрестности ξ оказывается эквивалентным прямому произведению трехмерной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ на вещественную прямую в $\mathbb{C}^1$, а группа автоморфизмов ростка так же имеет бесконечную размерность. Либо множество Md_2, где произошло такое вырождение - это собственное вещественно аналитическое подмножество $M \setminus Md_1$.

Теорема 1. *Для любого вещественно аналитического ростка M_ξ четырехмерной поверхности в $\mathbb{C}^3$ и локальной группы голоморфных автоморфизмов этого ростка $\operatorname{Aut} M_\xi$ имеет место следующая альтернатива.*
Либо размерность этой группы не превосходит 5-ти.
Либо она равна бесконечности и это может произойти в двух случаях.
Первый: росток M_ξ эквивалентен произведению комплексной прямой на двумерное вещественное пространство,
второй: росток эквивалентен произведению трехмерной вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ на вещественную прямую в $\mathbb{C}^1$.

Доказательство. Если вырождения произошли на полномерных множествах, то, как показано выше, мы имеем бесконечномерную группу и приведенную классификацию. Если же оба множества Md_1 и Md_2 - собственные, то рассмотрим в окрестности V точки ξ произвольные 6 векторных полей, порождающих голоморфные автоморфизмы. Рассмотрим эти поля в произвольной точке из $V \setminus (Md_1 \cup Md_2)$. В этой точке M - вполне невырождено, а, следовательно, эти поля связаны линейным соотношением с постоянными коэффициентами. Но это поля с вещественно аналитическими коэффициентами, поэтому линейная зависимость имеет место во всей окрестности V, т.е. и в самой точке ξ. Теорема доказана. $\square$

3. Построение голоморфной оболочки многообразия Q

Во-первых, определим семейство плоских одномерных голоморфных дисков. Это семейство будет зависеть от трех вещественных параметров (r, d_2, d_3), где $r \geq 0$, а d_2 и d_3 - произвольные вещественные. Положим

$$\delta(r, d_2, d_3) = \{z = t, \quad w_2 = d_2 + \mathrm{i}\, r^2, \quad w_3 = d_3 + 2\,\mathrm{i}\, r^2 t\}, \text{ где } |t| \leq r$$

$$B = \{(z, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 : \ v_2 \geq |z|^2\}$$

Группа голоморфных автоморфизмов Q содержит следующее семейство “сдвигов”, параметризованных параметром $p \in \mathbb{C}$.

$$s_p = \{z' = z + p, \quad w_2' = w_2 + 2\,\mathrm{i}\,\bar{p} z + \mathrm{i}\,|p|^2,$$
$$w_3' = w_3 + 4(\operatorname{Re} p) w_2 + 2\,\mathrm{i}\,\bar{p} z^2 + 2\,\mathrm{i}(2|p|^2 + \bar{p}^2) z + \mathrm{i} \operatorname{Re} p^2 \bar{p}\}$$

Непосредственно проверяется следующая

Лемма 2. *(1) Граница диска $\delta(r, d_2, d_3)$, т.е. образ окружности $|t| = r$ содержится в Q.*
(2) Данное семейство дисков связно и содержит постоянные диски

(отображение в точку Q).
(3) Объединение семейства дисков $\{\delta(r, d_2, d_3)\}$ - это часть гиперповерхности $\Gamma = \{v_3 = 2v_2 \operatorname{Re} z\}$, принадлежащая B.
(4) B является выпуклой, а следовательно и голоморфно выпуклой областью.
(5) Указанное семейство автоморфизмов переводит B в себя.

Теорема 3. *Оболочкой голоморфности многообразия Q является внутренность области B.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $\xi = (a, b, c) \in B$. Покажем, что найдется такое p, что соответствующий "сдвиг" переведет эту точку в точку, принадлежащую Γ. Для этого подставим формулы, определяющие "сдвиг" в уравнение Γ. Получим условие на p. После приведения подобных членов оно принимает вид.

$$2(\operatorname{Im} b - |a|^2)(\operatorname{Re} p) = 2(\operatorname{Im} b)(\operatorname{Re} a) - \operatorname{Im} c$$

Выбирая в качестве p любое p_0, являющееся решением этого уравнения мы получаем необходимый нам "сдвиг" s_{p_0}. Подвергая исходное семейство дисков $\{\delta(r, d_2, d_3)\}$ обратному преобразованию s_{-p_0}, мы получаем семейство, проходящее через точку ξ. Оно стягивается в точку, принадлежащую Q и это доказывает (принцип непрерывности, см. [13]), что любая функция, голоморфная в окрестности Q, продолжается в ξ, т.е. в B. А в силу выпуклости B, дальнейшее голоморфное расширение - невозможно. Теорема доказана. □

4. Построение нормальной формы

Перед формулировкой основного результата дадим следующее определение. Число $\varepsilon > 0$ будем называть *запасом аналитичности* функции или отображения Φ в точке ξ если Φ имеет представление в виде суммы степенного ряда в полидиске радиуса ε с центром в ξ, а на замкнутом полидиске радиуса $\varepsilon/2$ не превосходит $1/\varepsilon$. Запасом аналитичности поверхности M в точке ξ будем называть запас аналитичности функции F, т.ч. $M = \{v - F(z, \bar{z}, u) = 0\}$ в окрестности ξ.

Итак, мы можем сформулировать теорему о приведении к нормальной форме.

Теорема 4. *Любой вполне невырожденный росток вида (1) голоморфным преобразованием*

$$z^* = z^*(z, w), \quad w_2^* = w_2^*(z, w), \quad w_3^* = w_3^*(z, w),$$

сохраняющим начало координат и таким, что

$$\frac{\partial z^*}{\partial z}(0) = 1, \quad \frac{\partial w^*}{\partial z}(0) = 0, \quad \frac{\partial w^*}{\partial w}(0) = \mathrm{id}$$

может быть приведен к нормальной форме

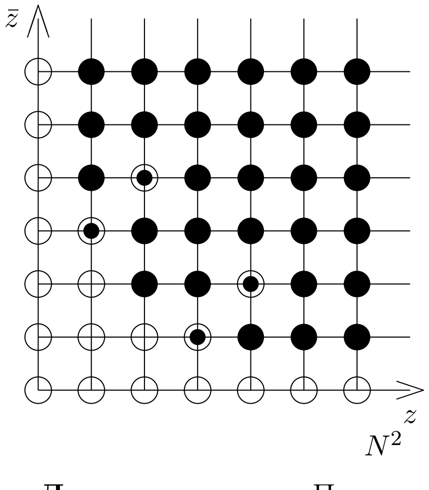
$$v_2 = |z|^2 + N^2(z, \bar{z}, u_2, u_3)$$
$$v_3 = 2\,\mathrm{Re}\, z^2\bar{z} + N^3(z, \bar{z}, u_2, u_3),$$

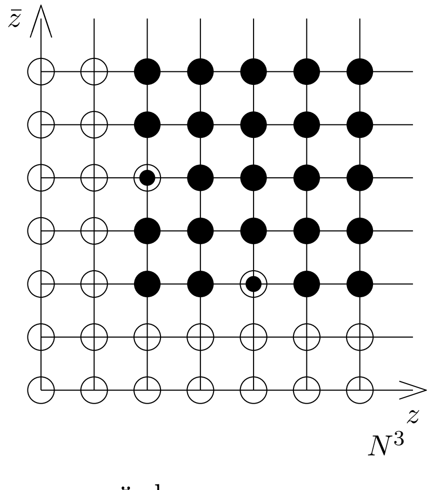
где степенные ряды $N^j(z, \overline{z}, u) = \sum_{k,\ell} N^j_{k,\ell}(u_2, u_3) z^k \bar{z}^\ell$, $j = 2, 3$ *удовлетворяют условиям:*

$$N^j(z, 0, u) = 0, \text{ т.е. } N^j_{k,0} = 0, \quad k \geq 0, \quad j = 2, 3$$
$$\frac{\partial N^3}{\partial \bar{z}}(z, 0, u) = 0, \text{ т.е. } N^3_{k,1} = 0, \quad k \geq 1$$
$$N^2_{11} = 0,\ N^2_{21} = 0, \quad N^2_{31}|_{u_2=0} = 0, \quad \mathrm{Im}\, N^2_{42}|_{u_2=0} = 0, \quad \mathrm{Im}\, N^3_{42}|_{u_2=0} = 0.$$

При этом запас аналитичности как нормализующего преобразования, так и нормализованной поверхности, оценивается снизу положительной константой, зависящей лишь от запаса аналитичности исходной поверхности.

Следующие диаграммы показывают члены каких бистепеней отсутствуют в нормальной форме (пустой кружок), какие - присутствуют с условием (полупустой кружок) и какие - без условий (полный кружок).





Доказательство. Построение нормальной формы вполне невырожденного ростка типа (1,2) является уточнением процесса вычисления компонент отображения, описанного в работе [2]. Этот процесс есть, по существу, комбинация теоремы о неявной функции и теоремы Коши-Ковалевской и использовался во многих работах (см. например [5]).

Будем искать голоморфное нормализующее преобразование ростка в виде композиции двух преобразований,

(2) $\quad z \mapsto z + f_0(w_2, w_3),\ w_2 \mapsto w_2 + g_0(w_2, w_3), w_3 \mapsto w_3 + h_0(w_2, w_3),$
$\quad f_0(0) = h_0(0) = g_0(0) = \mathrm{d}g_0(0) = \mathrm{d}h_0(0) = 0,$

применяемого сначала, такого что

$$\Gamma = \{(z,w)|z = f_0(u), w_2 = u_2 + g_0(u), w_3 = u_3 + h_0(u)\} \subset M,$$

и преобразования

$$z \mapsto z + zf_1(w_2,w_3) + z^2 f(z,w_2,w_3) = z + \sum_{k\geq 1} f_k(w_2,w_3)z^k \tag{3}$$

$$w_2 \mapsto w_2 + zg(z,w_2,w_3) = w_2 + \sum_{k\geq 1} g_k(w_2,w_3)z^k$$

$$w_3 \mapsto w_3 + zh(z,w_2,w_3) = w_3 + \sum_{k\geq 1} h_k(w_2,w_3)z^k,$$

Преобразование (2) распрямляет 2-мерную вещественную поверхность Γ, т.е. переводит Γ в плоскость $\{(z,w)|\, z = \operatorname{Im} w_2 = \operatorname{Im} w_3 = 0\}$. Запишем исходное уравнение M в виде

$$\begin{aligned} -v_2 + |z|^2 + F^2(z,\bar z,u_2,u_3) &= 0, \\ -v_3 + 2\operatorname{Re} z^2\bar z + F^3(z,\bar z,u_2,u_3) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $F^2 = \mathrm{O}(3)$, $F^3 = \mathrm{O}(4)$. Условие $\Gamma \subset M$ означает, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g_0 =& |f_0|^2 + F^2(f_0,\overline{f}_0,\operatorname{Re} g_0,\operatorname{Re} h_0), \\ \operatorname{Im} h_0 =& 2|f_0|^2(\operatorname{Re} f_0) + F^3(f_0,\overline{f}_0,\operatorname{Re} g_0,\operatorname{Re} h_0). \end{aligned}$$

Эти уравнения однозначно определяют $\operatorname{Im} g_0$ и $\operatorname{Im} h_0$ через $X = \big(f_0,\overline{f_0},\operatorname{Re} g_0,\operatorname{Re} h_0\big)$. Промежуточное уравнение, полученное после применения (2) в новых координатах, обозначения которых мы для простоты не меняем, принимает вид

$$-v_2 + |z|^2 + G^2(z,\bar z,u_2,u_3) = 0, \tag{5}$$

$$-v_3 + 2\operatorname{Re} z^2\bar z + G^3(z,\bar z,u_2,u_3) = 0, \tag{6}$$

где $G^2 = \mathrm{O}(3)$, $\quad G^3 = \mathrm{O}(4)$ и обе эти функции не содержат свободных от $(z,\bar z)$ членов, т.е. $G^j(0,0,u) \equiv 0$ при $j = 2,3$, что соответствует условию $\Gamma \subset M$. Работая со степенными рядами от $(z,\bar z,u)$, мы будем использовать их разложения в суммы мономов вида $z^k\bar z^\ell$ с коэффициентами, зависящими от u. Такое слагаемое мы будем называть компонентой степени (k,ℓ) соответствующего ряда. Уравнения (5), (6) таким образом можно разложить по бистепеням в виде

$$-v_2 + |z|^2 + \sum_{k,\ell} G^2_{k\ell} z^k \bar z^\ell = 0,$$

$$-v_3 + 2\operatorname{Re} z^2\bar z + \sum_{k,\ell} G^3_{k\ell} z^k\bar z^\ell = 0.$$

Учитывая, что уравнения (5), (6) получены после применения (2) мы получаем, что коэффициенты $G^j_{k\ell}$, $\ j = 2,3$ аналитически зависят от

u, X и частных производных X порядка, не превосходящего $k+\ell$. Это непосредственно следует из вида преобразования (2).

Неизвестные функции (f_1, f, g, h) мы выразим из тождеств

$$(7)\quad -\operatorname{Im}(w_2+zg)+|z+zf_1+z^2f|^2+ G^2(z+zf_1+z^2f, \bar{z}+\bar{z}\bar{f}_1+\overline{z^2f}, \operatorname{Re}(w_2+zg), \operatorname{Re}(w_3+zh))\Big|_M = 0$$

и

$$(8)\quad -\operatorname{Im}(w_3+zh)+2\operatorname{Re}(z+zf_1+z^2f)|z+zf_1+z^2f|^2+ G^3(z+zf_1+z^2f, \bar{z}+\bar{z}\bar{f}_1+\overline{z^2f}, \operatorname{Re}(w_2+zg), \operatorname{Re}(w_3+zh))\Big|_M = 0,$$

полученных подстановкой (3) в (5) и сужением на M в нормальной форме.

Наше построение нормализующего отображения будет осуществлятся в виде ряда последовательных уточнений параметров отображений (2) и (3).

Шаг 1. Определение g:

Рассмотрим тождество (7) и положим в нём $\bar{z}=0$. В результате получается уравнение

$$(9)\qquad \frac{1}{2\,\mathrm{i}}zg = G^2(z+zf_1+z^2f, 0, u_2+\frac{1}{2}zg, u_3+\frac{1}{2}zh),$$

обе части которого делятся на z, поскольку z входит множителем в zf_1, z^2f, zg, zh, а независимой от z компонеты G^2 не содержит. Сокращая на z обе части (9), мы, по теореме о неявной функции, находим g как аналитическую функцию от аргументов (z, u, f, f_1, h). Подставляя полученное выражение для g при фиксированных f, f_1 и h в преобразование (3) и подставляя (3) в уравнение (5) мы добиваемся того, что $N^2(z, 0, u)\equiv 0$, т.е. уравнение для новой переменной v_2 в нормальной форме не содержит голоморфной по z компоненты.

Шаг 2. Определение h:

Подставим полученное на предыдущем шаге выражение для g в тождество (8) и положим в этом тождестве $\bar{z}=0$. В результате получается уравнение

$$(10)\qquad \frac{1}{2\,\mathrm{i}}zh = G^3(z+zf_1+z^2f, 0, u_2+\frac{1}{2}zg, u_3+\frac{1}{2}zh),$$

обе части которого делятся на z. Сократив на z, по теореме о неявной функции определяем h как аналитическую функцию аргументов (z, u, f, f_1).

Подставляя полученное выражение для $h(z, w)$ при фиксированных f, f_1 в преобразование (3), добиваемся того, что $N^3(z, 0, u)\equiv 0$.

Шаг 3. Определение f_1 и f:

После подстановки выражений для g и h и применения (3) к уравнению (5) замечаем, что оба тождества (7) и (8) делятся как на z так и на $\bar{z}$. Разделим оба уравнения на $\bar{z}$ и рассмотрим второе уравнение:

$$\text{(11)}\quad \frac{1}{\bar{z}}\left(-v_3-\frac{1}{2\,\mathrm{i}}(zh-\bar{z}\bar{h})+2\,\mathrm{Re}(z+zf_1+z^2f)^2(\overline{z+zf_1})\right)+$$

$$\frac{1}{\bar{z}}G^3(z+zf_1+z^2f,\overline{z+zf_1},u_2+\frac{1}{2}zg,u_3+\frac{1}{2}zh)=-\frac{1}{\bar{z}}v_3+z^2+\frac{1}{\bar{z}}N^3(z,\bar{z},u_2,u_3).$$

Положим в этом уравнении $\bar{z}=0$. Приравнивая компоненту второй степени по z к единице и полагая $f_1(0)=0$, находим $\mathrm{Re}\, f_1$ и $\mathrm{Im}\, f_1$ как функции от u при фиксированном f. Подставляя эти выражения в (11)и вычитая линейную по z компоненту, мы получим, что остающееся выражение делится на z^3. Разделив на z^3, мы получаем выражение от (z,u,f), производная которого по f в нуле равна 2. Приравнивая это выражение к нулю и вычитая линейную по z компоненту, мы получим уравнение, определяющее по теореме о неявной функции f, как функцию, аналитическую от (z,u). Подставляя получившееся для f выражение в (8), добиваемся того, что $\frac{\partial(N^3-N^3_{11})}{\partial\bar{z}}(z,0,u)\equiv 0$.

Шаг 4. Определение $\mathrm{Re}\, f_0, \mathrm{Im}\, f_0, \mathrm{Re}\, g_0, \mathrm{Re}\, h_0$. Для определения этих компонент нам понадобится повторить шаги 1-3 и более явно пересчитать компоненты младших степеней по z в (3). Вспоминая, что уравнения в нормальной форме получаются применением композиции (2) и (3) к исходному уравнению (4), мы можем вычислить компоненты малых степеней по z в правой части (3) через параметры X и их производные из условий, что в окончательном уравнении в нормальной форме компоненты $N^j_{k0}, N^3_{k1},\ j=2,3, 1\le k\le 4$ равны нулю. Запишем композицию (2) и (3) в виде:

(12)

$$z\mapsto z+f_0(w_2,w_3)+z\tilde{f}(z,w_2,w_3)=z+f_0(w_2,w_3)+\sum_{k\ge1}\tilde{f}_k(w_2,w_3)z^k$$

$$w_2\mapsto w_2+g_0(w_2,w_3)+z\tilde{g}(z,w_2,w_3)=w_2+g_0(w_2,w_3)+\sum_{k\ge1}\tilde{g}_k(w_2,w_3)z^k$$

$$w_3\mapsto w_3+h_0(w_2,w_3)+z\tilde{h}(z,w_2,w_3)=w_3+h_0(w_2,w_3)+\sum_{k\ge1}\tilde{h}_k(w_2,w_3)z^k$$

В частности, выделяя в нормальной форме обоих уравнений голоморфные компоненты по z, из системы уравнений, соответствующих условиям $N^2_{10}=0, N^2_{k0}=0, 2\le k\le 4,\ N^3_{10}=0, N^3_{20}=0\ N^3_{k0}=0, 3\le$

$k \leq 4$по теореме о неявной функции получаем, что

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_1(u_2,u_3) =&2\,\mathrm{i}\,\overline{f}_0+\theta(u;X,\tilde{f}_1(u),\overline{\tilde{f}_1}(u)),\\
\tilde{g}_k(u_2,u_3) =&\theta(u;X,\tilde{f}_j(u),\overline{\tilde{f}_j}(u)), j<k\leq 4,\\
\tilde{h}_1 =&\theta(u;X,\tilde{f}_1,\overline{\tilde{f}_1}),\\
\tilde{h}_2 =&2\,\mathrm{i}\,\overline{f}_0+\theta(u;X,\tilde{f}_1,\overline{\tilde{f}_1},\tilde{f}_2,\overline{\tilde{f}_2})\\
\tilde{h}_k =&\theta(u;X,\tilde{f}_j(u),\overline{\tilde{f}_j}(u)),\ j<k,\ k=3,4.
\end{aligned} \tag{13}
$$

где θ здесь и ниже обозначает аналитическую функцию, равную нулю при нулевых значениях её аргументов и такую что её производная по последним аргументам (стоящим после ;) равна нулю при $X=0$. Отметим также, что в правой части (13) отсутствуют производные X, поскольку каждый член, содержащий производную X, непременно содержит v_2 или v_3 в качестве множителя и потому делится на $|z|^2$ согласно условиям нормальной формы.

Для выражения компонент $\operatorname{Re}\tilde{f}_1$ и $\operatorname{Im}\tilde{f}_1$ мы воспользуемся условием $N^3_{21}=0$. Применяя к (4) сквозное отображение (12), получаем, что

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\tilde{f}_1 =& \frac{1}{3}\frac{\partial\operatorname{Re}h_0}{\partial u_3}+\theta(u,X;X')\\
\operatorname{Im}\tilde{f}_1 =&\theta(u,X;X').
\end{aligned} \tag{14}
$$

Условимся здесь и ниже через X', X'' обозначать полный набор первых и вторых производных по u_2 и u_3 функций, входящих в X.

Для выражения компонент $\operatorname{Re}\tilde{f}_2$ и $\operatorname{Im}\tilde{f}_2$ мы воспользуемся условием $N^3_{31}=0$. Применяя к (4) сквозное отображение (12), получаем, что

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\tilde{f}_2 =& \frac{\partial\operatorname{Im}f_0}{\partial u_2}+\theta(u,X;X')\\
\operatorname{Im}\tilde{f}_2 =& \frac{\partial\operatorname{Re}f_0}{\partial u_2}+\theta(u,X;X').
\end{aligned} \tag{15}
$$

Для выражения компонент $\operatorname{Re}\tilde{f}_3$ и $\operatorname{Im}\tilde{f}_3$ мы воспользуемся условием $N^3_{41}=0$. Применяя к (4) сквозное отображение (12), получаем, что

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\tilde{f}_3 =& \frac{\partial\operatorname{Im}f_0}{\partial u_3}+\theta(u,X;X')\\
\operatorname{Im}\tilde{f}_3 =& \frac{\partial\operatorname{Re}f_0}{\partial u_3}+\theta(u,X;X').
\end{aligned} \tag{16}
$$

Для выражения компоненты $\tilde{f}_4$ мы воспользуемся условием $N^3_{51}=0$. Применяя к (4) сквозное отображение (12), получаем, что

$$
\tilde{f}_4=\theta(u,X;X'). \tag{17}
$$

Рассмотрим компоненты N_{11}^3, N_{11}^2 и N_{21}^2, полученные сквозным отображением (12) применённым к (4). Используя равенства (13) и (14) получаем, что равенство нулю этих компонент равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{Re}\, h_0}{\partial u_2}(u_2,u_3) = L(u,X;X'_{u_2}) + \theta(u,X)\\
&\frac{\partial \mathrm{Re}\, g_0}{\partial u_2}(u_2,u_3) - \frac{2}{3}\frac{\partial \mathrm{Re}\, h_0}{\partial u_3}(u_2,u_3) = L(u,X;X'_{u_2}) + \theta(X)\\
&\frac{\partial f_0}{\partial u_2}(u_2,u_3) + \mathrm{i}\,\frac{\partial \mathrm{Re}\, g_0}{\partial u_3}(u_2,u_3) = L(u,X;X') + \theta(X),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где функция L линейна по своему последнему аргументу, и производная каждой правой части по переменым из набора X' равна нулю при $X = 0$. Разрешив (18) как линейную систему относительно

$$(\mathrm{Re}\, h_0)'_{u_2}, (\mathrm{Re}\, g_0)'_{u_2}, (\mathrm{Re}\, f_0)'_{u_2}, (\mathrm{Im}\, f_0)'_{u_2},$$

мы получим зквивалентную, но уже явную систему:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{Re}\, h_0}{\partial u_2}(u_2,u_3) = \theta(u,X)\\
&\frac{\partial \mathrm{Re}\, g_0}{\partial u_2}(u_2,u_3) = \frac{2}{3}\frac{\partial \mathrm{Re}\, h_0}{\partial u_3}(u_2,u_3) + \theta(u,X)\\
&\frac{\partial f_0}{\partial u_2}(u_2,u_3) = -\,\mathrm{i}\,\frac{\partial \mathrm{Re}\, g_0}{\partial u_3}(u_2,u_3) + L(u,X;X'_{u_3}) + \theta(u,X),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где в каждой из правых частей не содержатся производные по u_2.

К системе (19) применима теорема Коши-Ковалевской ([11], стр. 14), согласно которой $f_0, \mathrm{Re}\, g_0, \mathrm{Re}\, h_0$ являются аналитическими функциями от u, если только аналитичны функции $f_0(0,u_3), \mathrm{Re}\, g_0(0,u_3), \mathrm{Re}\, h_0(0,u_3)$, являющиеся начальными условиями (19).

Для определения этих начальных данных приравняем к нулю $N_{31}^2(0,u_3)$, $\mathrm{Im}\, N_{42}^3(0,u_3)$ и $\mathrm{Im}\, N_{42}^2(0,u_3)$. Равенство нулю этих компонент при $u_2 = 0$ с учётом подстановок (13)- (17)равносильно системе дифференциальных уравнений:

(20)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{Re}\, f_0}{\partial u_3}(0,u_3) = L(u,X;X') + \theta(u,X)\Big|_{u_2=0}\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{Re}\, h_0}{\partial u_3^2}(0,u_3) = 6\,\frac{\partial^2 \mathrm{Re}\, g_0}{\partial u_2 \partial u_3}(0,u_3) + L(u,X;X'') + q(u,X;X') + L(u,X;X') + \theta(u,X)\Big|_{u_2=0}\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{Re}\, g_0}{\partial u_3^2}(0,u_3) = L(u,X;X'') + q(u,X;X') + L(u,X;X') + \theta(u,X)\Big|_{u_2=0},
\end{aligned}
$$

где функция L линейна по своему последнему аргументу, функция q квадратична по последнему аргументу, и все функции L, q, θ равны 0 при $X = 0$.

Продифференцировав первое уравнение (20) по u_3, выразив все стоящие в правой части производные по u_2 через производные по u_3 с помощью уравнений (19) и разрешив все три уравнения относительно $\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f_0}{\partial u_3^2}(0, u_3)$, $\frac{\partial^2 \operatorname{Re} h_0}{\partial u_3^2}(0, u_3)$, $\frac{\partial^2 \operatorname{Re} g_0}{\partial u_3^2}(0, u_3)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, решения которой аналитичны.

Тем самым, построенное приведение к нормальной форме голоморфно. Без ограничения общности можно поэтому предполагать, что исходное уравнение ростка (4) задано в нормальной форме. Это обеспечивает выполнение равенств $\frac{\partial f_0}{\partial u_2}(0) = \frac{\partial f_0}{\partial u_3}(0) = 0$, и поэтому преобразование одной нормальной формы в другую, при условии $\frac{\partial z*}{\partial z}(0) = 1$, имеет тождественную матрицу Якоби.

Прослеживая все шаги изложенного построения, нетрудно убедиться, что, т.к. отображение получено в результате применения теорем о неявной функции и о существовании решения системы дифференциальных уравнений, запасы аналитичности построенной нормализации и нормализованного ростка зависят лишь от запаса аналитичности исходного ростка и одного вещественного параметра - $\frac{\partial \operatorname{Re} h_0}{\partial u_3}(0, 0)$. □

Замечание 5. *Отметим, что если исходное уравнение M (4) задано в нормальной форме, то всякое нормализующее M отображение единственным образом представимо в виде композиции нормализации с тождественной матрицей Якоби и растяжения вида*

$$z \mapsto \lambda z, \quad w_2 \mapsto \lambda^2 w_2, \quad w_3 \mapsto \lambda^3 w_3, \quad \lambda \neq 0 \tag{21}$$

Действительно, (21) – единственное линейное преобразование, сохраняющее модельную поверхность Q. Как нетрудно проверить, оно также сохраняет и нормальную форму. А поскольку линейная часть всякого приведения к нормальной форме обязана сохранять модельную поверхность, то оно будет являться композицией (21) и преобразования с тождественной матрицей Якоби. Таким образом, если $(z \mapsto z^*, w \mapsto w^*)$ - это обратимое голоморфное отображение одной нормальной формы в другую, то $z^* = \lambda z$, $w_2^* = \lambda^2 w_2$, $w_3^* = \lambda^3 w_3$.

На процесс построения нормальной формы ростка

$$\begin{aligned} v_2 &= |z|^2 + F_3^2 + \cdots, \\ v_3 &= 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + F_4^3 + \cdots \end{aligned}$$

можно смотреть как на рекуррентный процесс вычисления компонент отображения

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + f_2 + \cdots , \\ w_2 &\mapsto w_2 + g_3 + \cdots , \\ w_3 &\mapsto w_3 + h_4 + \cdots \end{aligned}$$

нормированного условием $(f_1, g_2, h_3) = (z, w_2, w_3)$, и компонент нормальной формы , где на m-м шаге, решая линейные уравнения мы получаем (f_{m-1}, g_m, h_{m+1}) и $N_m = (N^2_m, N^3_{m+1})$. Сформулируем следующие, вполне очевидные, свойства этого рекуррентного процесса.

Замечание 6. (1) *Коэффициенты весовой m-струи нормализованного уравнения $\mathcal{N}_m = (N_4, \ldots, N_m)$ зависят лишь от весовой m-струи исходного уравнения $\mathcal{F}_m = (F_4, \ldots, F_m)$, причем эта зависимость является вещественно аналитической (а точнее - рациональной).*
(2) *Если снять условие нормировки замены, т.е. считать что $(f_1, g_2, h_3) = (\lambda z, \lambda^2 w_2, \lambda^3 w_3)$, то коэффициенты N_m будут вещественно-полиномиально зависеть от λ.*
(3) *Если замена приводит уравнение ростка к виду $v_2 = |z|^2 + N^2_m + \mathrm{O}(m+1), \quad v_3 = 2\,\mathrm{Re}\, z^2\bar{z} + N^3_{m+1} + \mathrm{O}(m+2)$, где компоненты N^2_m и N^3_{m+1} имеют нормальную форму, то любая другая нормальная форма этого ростка имеет вид $v_2 = |z|^2 + \lambda^{m-2} N^2_m + \mathrm{O}(m+1), \quad v_3 = 2\,\mathrm{Re}\, z^2\bar{z} + \lambda^{m-2} N^3_{m+1} + \mathrm{O}(m+2)$*

5. Построение специальной нормальной формы и инвариантного CR-репера

Начнем с определения.

Определение 7. *Будем говорить, что росток вполне невырожденного многообразия M_ξ в точке ξ типа (1,2) - сферичен (по аналогии с ситуацией (1,1)) порядка m, если росток имеет уравнение вида $v_2 = |z|^2 + N^2_m + \mathrm{O}(m+1), \quad v_3 = 2\,\mathrm{Re}\, z^2\bar{z} + N^3_{m+1} + \mathrm{O}(m+2)$, где $N_m = (N^2_m, N^3_{m+1}) \neq 0$.*

Условие сферичности порядка не меньше, чем m в терминах компонент нормального уравнения имеет вид $N_4 = \cdots = N_{m-1} = 0$. И если M вещественно аналитическое вполне невырожденное многообразие, и M^m его подмножество, состоящее из точек, в которых порядок сферичности не меньше m, то, в силу замечания 6, M^m - аналитическое подмножество.

Если порядок сферичности ограничен на всем многообразии M, то такое многообразие мы будем называть многообразием конечного порядка сферичности. Максимальный порядок, в таком случае, называется порядком многообразия. Компактное несферическое вещественно аналитическое многообразие обязано, очевидно, иметь конечный порядок.

Если в некоторой точке порядок не больше, чем m, то это означает, что m-струя весового разложения правой части нормализованного уравнения ростка $J_m N = \sum_4^m (N_j^2, N_{j+1}^3)$ не есть тождественный нуль. Для класса несферических ростков можно, воспользовавшись оставшейся степенью свободы в выборе нормальных координат, предложить доприведение вида $z \mapsto tz \quad w_2 \mapsto t^2 w_2 \quad w_3 \mapsto t^3 w_3$, так что эта специальная нормальная форма оказывается единственной, с точностью до преобразования вида $z \mapsto -z \quad w_2 \mapsto w_2 \quad w_3 \mapsto -w_3$.

Сформулируем правило построения дополнительной нормировки так, чтобы оно работало для всех несферических ростков, чей порядок сферичности не превосходит m. Рассмотрим совокупность коэффициентов m-струи правой части нормальных уравнений ростка $V(J_m N)$ как ненулевой вектор некоторого вещественного линейного пространства и выберем λ так, чтобы длина этого вектора стала равной единице. Это можно сделать, т.к. длина этого вектора функция $|t|$, строго возрастающая от нуля при $t = 0$ до плюс бесконечности. Такую нормальную форму будем называть специальной нормальной формой m-го порядка. Переход от одной нормальной форме к другой возможен только при $t = \pm 1$. Заметим, что отображение при $t = -1$ меняет ориентацию многообразия.

Будем называть m-мерой несферичности вложенного ростка наибольшее число $\delta > 0$, такое что $\delta \le ||J_m N|| \le \frac{1}{\delta}$, где $||J_m N||$ - норма m-струи нормальной формы вложенного ростка, полученной нормализацией при $\lambda = 1$.

Сказанное выше доказывает следующее утверждение.

Теорема 8. *(a) Если M_ξ - несферический росток в нормальной форме, то отображением вида $(\lambda z, \lambda^2 w_2, \lambda^3 w_3)$ его можно привести к специальной нормальной форме, описанной выше.*
(b) Два таких приведения могут отличаться лишь заменой вида $(\pm z, w_2, \pm w_3)$, т.е два несферических ростка M_ξ и $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$, имеющие в специальных нормальных координатах правые части N и $\tilde{N}$ соответственно, голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из двух соотношений $N(z, \bar{z}, u_2, u_3) = \tilde{N}(z, \bar{z}, u_2, u_3)$ или $N(-z, -\bar{z}, u_2, -u_3) = \tilde{N}(z, \bar{z}, u_2, u_3)$.
(c) Если ε - запас аналитичноси исходного ростка M_ξ, (как в теореме 4), являющегося сферическим порядка не больше, чем m и δ - m-мера несферичности, то запас аналитичности ростка отображения приводящего M_ξ к специальной нормальной форме m-го порядка зависит лишь от ε и δ).

Далее, имеет место

Теорема 9. *На вполне невырожденном вещественно аналитическом многообразии M конечного порядка сферичности имеется инвариантная пара реперов.*

Доказательство. Определим значения векторных полей $X_1, \dots, X_4$ в точке p. Для этого перейдем к уточненным специальным координатам $z = x + \mathrm{i}\, y, w_1, w_2$ в p. И зададим два репера. В качестве первого репера возьмем

$$X_1^0|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_0, \quad X_2^0|_p = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_0, \quad X_3^0|_p = [X_1^0, X_2^0]|_0, \quad X_4^0|_p = [X_1^0, X_3^0]|_0,$$

а в качестве второго

$$X_1^1|_p = -\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_0, \quad X_2^1 = -\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_0, \quad X_3^1|_p = [X_1^1, X_2^1]|_0, \quad X_4^1|_p = [X_1^1, X_3^1]|_0.$$

Пусть m - это порядок сферичности многообразия, тогда для построения указанных реперов достаточно использовать приведение к нормальной форме до m-го порядка. Коэффициенты полиномиальной замены, осуществляющей такую частичную нормализацию аналитически зависят от коэффициентов m-струи (по нашей градуировке) ростка. Это означает, что построенные поля зависят от точки аналитически. Если многообразие подверглось голоморфному отображению, то имеется лишь две возможности: каждый репер перешел в себя, или же они поменялись местами. □

Следствие 10. *(a) Если гладкое ориентируемое четырехмерное многообразие M допускает вложение в трехмерное комплексное многообразие в качестве вполне невырожденного подмногообразия конечного порядка, то касательное расслоение TM - тривиально.*
(b)Если многообразие ориентируемо и отображение сохраняет ориентацию, то оно сохранит каждый из этих реперов.

Тривиальность касательного расслоения не позволяет вполне невырожденно вложить в $\mathbb{C}^3$ четырехмерную сферу. Однако формулы Лая [8], [6] запрещают вложение этой сферы без RC-особых точек, т.е. любое вложение обязано иметь точки, где касательная является двумерной комплексной гиперплоскостью. В связи с этим интересно было бы построить пример компактного четырехмерного подмногообразия $\mathbb{R}^6$ без RC-особых точек и с нетривиальным касательным расслоением. В соответствии с формулами Лая такое многообразие обязано иметь нулевую эйлерову характеристику и нулевую сигнатуру.

Минимальный возможный порядок сферичности, как это видно из теоремы 4, равен четырем. Росток общего положения, т.е. росток в точке $\xi \in M^4 \setminus M^5$ имеет следующий вид

$$v_2 = |z|^2 + \mathrm{O}(5)$$
$$v_3 = 2\operatorname{Re} z^2\bar{z} + 2B_1 \operatorname{Re} z^4\bar{z} + 2B_2 \operatorname{Re} z^3\bar{z}^2 + 2B_3 \operatorname{Im} z^3\bar{z}^2 + \mathrm{O}(6)$$

где $B_j \in \mathbb{R}$ и не все равны нулю . Такой росток и точку естественно называть неомбилическими, M^5, таким образом, состоит из омбилических точек.

Можно сформулировать весьма правдоподобную гипотезу. Если окрестность некоторой точки (1,2)-многообразия состоит из омбилических точек, то многообразие сферичено (локально эквивалентено Q). Если это так, то для несферического аналитического (1,2)-многообразия M имеет место соотношение $M = M^4$, при этом M^5 – множество омбилических точек – его собственное аналитическое подмножество и $M \setminus M^5$ -множество неомбилических точек - открытое плотное подмножество. Аналогичное утверждение для гиперповерхностей доказано в [5].

Н.Г.Кружилин, ознакомившись с первоначальным вариантом статьи, высказал ряд ценных замечаний, приведщих к существенному улучщениию данной работы, за что авторы ему признательны.

Список литературы

[1] Витушкин А.Г. Голоморфные отображения и геометрия поверхностей. Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т.7, Москва 1985, С.167-226.

[2] Beloshapka V.K., CR-Varieties of the type (1,2) as Varieties of “Super-High” Codimension, Russian Journal of Mathematical Physics, 1998, v.5, N.2, p.399–404.

[3] Белошапка В.К., Универсальная модель вещественного подмногообразия, Математические заметки, т.75, вып.4, 2004, С.507–522.

[4] Baouendi M.S., Ebenfelt P., Rothschild L.P., Convergence and finite determination of formal CR mappings, J. Amer. Math. Soc. v.13 (2000), no. 4, 697–723.

[5] Chern S.S., Moser J.K., Real hypersurfaces in complex manifold, Acta Math. (1974) V.133, No.3-4, P.219–271.

[6] Домрин А.В., О числе RC- особых точек 4-х мерного вещественного многообразия в 5-мерном комплексном прстранстве. Матем.заметки,1995, Т.57, N 2, С.240-245.

[7] Damour S., Merker J., Sur la convergence d’applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles, Bull. Sci. Math v.126 (2002), no. 10, 831–854.

[8] Lai H.F. Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds. Trans.Amer.Math.Soc.1972, V.172,P.1-33.

[9] Лобода А.В., Однородные невырожденные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии, Функц. анал. и прилож. т. 36 , вып. 2, 2002, С. 80–83.

[10] Лобода А.В., Порождающие вещественно-аналитические многообразия коразмерности 2 в $\mathbb{C}^4$, Известия АН ССР, сер. мат. т. 52 , 1988, С. 970–990.

[11] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. 3-е изд. ГИФМЛ, Москва, (1961)

[12] Poincaré, H. Les fonctions anlytiques de deux variables et la representation conforme. Rend. Circ. Mat. Palermo, v. 23 (1907), 185–220.

[13] Шабат Б.В., Введение в комплексный анализ ч. II, Наука, М. 1985.

(В.К. Белошапка) Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия

E-mail address: vkb@strogino.ru

(V.V. Ezhov) School of Mathematics and Statistics, University of South Australia, Mawson Lakes Boulevard, Mawson Lakes, 5095 South Australia

E-mail address: vladimir.ejov@unisa.edu.au

(Gerd Schmalz) School of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of New England, Armidale, NSW 2351, Australia//Uniwersytet Warmińsko-Mazurski, Wydział Matematyki-Informatyki, ul. Żołnierska 14, 10-561 Olsztyn, Poland

E-mail address: gerd@turing.une.edu.au