Контрпример к гипотезе о размерности.

Белошапка В.К.

26 декабря 2005 г.

[1] [2]

В работе строится пример всюду вырожденной девятимерной вещественной поверхности в $\mathbf{C}^7$ типа (2,5) с 16-мерной группой голоморфных симметрий и показывается, что максимум размерностей групп голоморфных симметрий по всем вполне невырожденным модельным поверхностям данного типа равен 14. Таким образом максимум размерностей по всем росткам с конечномерными группами достигается на вырожденной поверхности и построенная поверхность является контрпримером к гипотезе о размерности, которая подвергается коррекции.

В работе [1] с ростком каждого вполне невырожденного вещественного подмногообразия комплексного пространства была связана касательная вещественно полиномиальная модельная поверхность, некий аналог соприкасающегося параболоида. Например, если исходный росток - это росток вещественной гиперповерхности в $\mathbf{C}^2$, заданный уравнением $\operatorname{Im} w = |z|^2$+мономы степени три и выше, то модельная поверхность - это параболоид, заданный уравнением $\operatorname{Im} w = |z|^2$, проективно эквивалентный стандартной трехмерной сфере. Модельные поверхности замечательны во многих отношения, в частности, группа голоморфных автоморфизмов модельной поверхности обладает естественной структурой группы Ли, сама эта поверхность естественно отождествляется с подгруппой этой группы, а локальная группа голоморфных автоморфизмов

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 05-01-0981 и НШ-2040.2003.1

[2]119899 Москва, Воробьевы горы, Московский государственный университет, механико-математический факультет, vkb@strogino.ru

ростка исходной вполне невырожденной поверхности, локально вкладывается в группу автоморфизмов модельной. При этом если поверхность не совпадает со своей касательной модельной поверхностью, то это вложение в качестве собственного подмногообразия. Таким образом, модельная поверхность симметричнее исходного вполне невырожденного ростка. Это утверждение почти автоматически распространяется на ростки, вполне невырожденные в точке общего положения, но не распространяется на ростки, не являющиеся вполне невырожденными всюду. Однако для произвольного ростка вещественно аналитической поверхности размерности d и коразмерности K без каких-либо предположений о невырожденности представлялась правдоподобной следующая альтернатива: либо размерность локальной группы бесконечна, либо она не превосходит максимума размерностей модельных поверхностей тех же размерности и коразмерности (он всегда конечен). Эта гипотеза, как нетрудно видеть, справедлива для трехмерных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^2$. В [2], [3] она была доказана для четырехмерных и пятимерных поверхностей в $\mathbf{C}^3$. Цель данной работы - показать, что в данной формулировке гипотеза нарушается для девятимерных поверхностей в $\mathbf{C}^7$.

Примером такой поверхности является поверхность, заданная в $\mathbf{C}^7$ уравнениями

$$\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2, \quad \operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_3 = |z_2|^2 2 \operatorname{Re} z_2,$$
$$\operatorname{Im} w_4 = |z_2|^2 2 \operatorname{Im} z_2, \quad \operatorname{Im} w_5 = |z_2|^4 \tag{1}$$

Эта поверхность представляет собой прямое произведение двух модельных поверхностей: трехмерной сферы $\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2$ в $\mathbf{C}^2$ и шестимерной модельной поверхности в $\mathbf{C}^5$ вида

$$\operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_3 = |z_2|^2 2 \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} w_4 = |z_2|^2 2 \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Im} w_5 = |z_2|^4 \tag{2}$$

Размерность группы первой поверхности, как хорошо известно, - восемь и второй ([4]) - тоже восемь. Можно показать, что группа этого произведения есть прямое произведение групп, но, даже не апеллируя к этому, можно утверждать, что ее размерность не меньше шестнадцати.

Оба сомножителя имеют одномерную комплексную касательную, т.е. первая - это поверхность типа (1,1), а вторая типа (1,4), таким образом их произведение имеет тип (2,5). Произведение двух модельных поверхностей не является модельной поверхностью типа (2,5), например потому, что оно не является вполне невырожденным. Полная невырожденность означает, что распределение касательных пространств получается из распределения комплексных касательных с помощью операций взятия скобок векторных полей способом, оптимальным в следующем смысле: каждое присоединение новых коммутаторов дает максимально возможное увеличение размерности распределения (до выхода на полную размерность).

В соответствии с этим, чтобы получить из комплексно двумерной комплексной касательной дополнительные пять размерностей надо взять четыре однократные скобки и одну двукратную. Причем вполне невырожденная модельная поверхность типа (2,5) имеет следующий вид

$$\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2, \quad \operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2, \quad \operatorname{Im} w_4 = 2\operatorname{Im} z_1\bar{z}_2, \quad \operatorname{Im} w_5 = 2\operatorname{Re}\Phi(z,z,\bar{z}), \tag{3}$$

где $\Phi(z,z,\bar{z})$ произвольный не равный тождественному нулю вещественный многочлен от $(z_1, z_2, \bar{z_1}, \bar{z}_2)$ бистепени (2,1), т.е. степени 2 по голоморфным переменным и степени 1 по антиголоморфным.

Все модельные поверхности голоморфно однородны, поэтому вопрос о размерности группы автоморфизмов сводится к вопросу о размерности стабилизатора точки. В частности, утверждения о размерностях групп наших сомножителей эквивалентны тому, что стабилизатор первой имеет размерность пять, а второй два. Было бы не трудно показать, исходя непосредственно из описания алгебры Ли [5], соответствующей группе поверхности 3, что алгебра стабилизатора состоит только из нулевой градуированной компоненты, соответствующей линейной подгруппе стабилизатора. Но, к счастью, соответствующее утверждение в общем виде (для всех кубических модельных поверхностей) недавно было доказано И.Коссовским [6] и мы можем на него сослаться. Таким образом интересующий нас стабилизатор изоморфен подгруппе L группы $GL(2,\mathbf{C})$, состоящей из преобразований $\{z \mapsto Cz\}$, сохраняющих многочлен $\Phi(z,z,\bar{z})$ с точностью до ненулевого множителя, т.е. $\Phi(Cz,Cz,\bar{C}\bar{z}) = \rho\Phi(z,z,\bar{z})$. Если в качестве λ взять $\lambda = \rho^{1/3}$ и положить $C = \lambda A$, то условие на подгруппу L примет вид $\Phi(Az,Az,\bar{A}\bar{z}) = \Phi(z,z,\bar{z})$, т.е. наша группа - это прямое произведение $\mathbf{R}^*$ на подгруппу L_0, состоящую из линейных преобразований $\mathbf{C}^2$, сохраняющих $\Phi(z,z,\bar{z})$. Алгебра Ли, соответвствующая L_0, определяется соотношением вида

$$2\Phi(az,z,\bar{z}) + \Phi(z,z,\overline{az}) = 0 \tag{4}$$

Для того чтобы анализировать это соотношение положим $\Phi(z, z, \overline{z}) = \phi_1(z, z)\bar{z}_1 + \phi_2(z, z)\bar{z}_2$, где ϕ_1 и ϕ_2 две квадратичные формы от двух переменных. Условие невырожденности означает, что хотя бы одна из этих форм не равна нулю тождественно. Соответствующие им билинейные формы запишем как $\phi_j(z, \zeta) = P_j z_1\zeta_1 + Q_j(z_1\zeta_2 + z_2\zeta_1) + R_j z_2\zeta_2$, где $j = 1, 2$, а элементы матрицы A обозначим $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, тогда подставляя все это в условие (4) и отделяя коэффициенты при шести мономах нашей кубической формы, получаем

$$\begin{aligned}
2P_1x_1 + 2Q_1x_3 + P_1\bar{x}_1 + P_2\bar{x}_3 &= 0\\
Q_1x_1 + R_1x_3 + Q_1x_4 + P_1x_2 + Q_1\bar{x}_1 + Q_2\bar{x}_3 &= 0\\
2Q_1x_2 + 2R_1x_4 + R_1\bar{x}_1 + R_2\bar{x}_3 &= 0\\
2P_2x_1 + 2Q_2x_3 + P_1\bar{x}_2 + P_2\bar{x}_4 &= 0\\
P_2x_2 + Q_2x_1 + Q_2x_4 + R_2x_3 + Q_1\bar{x}_2 + Q_2\bar{x}_4 &= 0\\
2Q_2x_2 + 2R_2x_4 + R_1\bar{x}_2 + R_2\bar{x}_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Покажем, что вещественная размерность пространства решений этой вещественно линейной системы уравнений относительно восьми переменных (вещественных и мнимых частей x_1, x_2, x_3, x_4) не превосходит четырех, при условии, что хотя бы один из шести комплексных коэффициентов $(P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2)$ отличен от нуля.

Если $P_1 \neq 0$, то из первого и второго уравнения x_1 и x_2 выражаются через x_3 и x_4 и размерность, тем самым, не выше четырех. Симметричным образом если $R_2 \neq 0$, то из шестого и пятого уравнений x_4 и x_3 выражаются через x_1 и x_2 и размерность, также, не выше четырех. Пусть теперь $P_1 = R_2 = 0$ и система принимает вид

$$\begin{aligned}
2Q_1x_3 + P_2\bar{x}_3 &= 0\\
Q_1x_1 + R_1x_3 + Q_1x_4 + Q_1\bar{x}_1 + Q_2\bar{x}_3 &= 0\\
2Q_1x_2 + 2R_1x_4 + R_1\bar{x}_1 &= 0\\
2P_2x_1 + 2Q_2x_3 + P_2\bar{x}_4 &= 0\\
P_2x_2 + Q_2x_1 + Q_2x_4 + Q_1\bar{x}_2 + Q_2\bar{x}_4 &= 0\\
2Q_2x_2 + R_1\bar{x}_2 &= 0
\end{aligned}$$

Тогда, если $Q_1 \neq 0$, то из второго уравнения выражаем x_4 через x_1 и x_3, а из третьего - x_2, т.е. размерность не выше четырех. Симметрично если $Q_2 \neq 0$, то из пятого уравнения выражаем x_1 через x_2 и x_4, а из четвертого - x_3, и размерность тоже не выше четырех. Пусть теперь $Q_1 = Q_2 = 0$, тогда система принимает вид

$$\begin{aligned} P_2\bar{x}_3 &= 0 \\ R_1 x_3 &= 0 \\ 2R_1 x_4 + R_1\bar{x}_1 &= 0 \\ 2P_2 x_1 + P_2\bar{x}_4 &= 0 \\ P_2 x_2 &= 0 \\ R_1\bar{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

из которого сразу видно, что если хотя бы один из оставшихся параметров P_2 или R_1 отличен от нуля, то размерность не выше четырех.

Размерность четыре реализуется, например, в случае, если $P_1 = 1$, а все остальные параметры равны нулю, т. е. для формы вида $\Phi(z, z, \bar{z}) = z_1^2\bar{z}_1$. Таким образом, размерность стабилизатора точки у этой поверхности равна 1+4=5, а размерность полной группы это 9+1+4 = 14. Итак, резюмируя получаем

Теорема: Размерность стабилизатора точки в группе автоморфизмов вполне невырожденного ростка типа $(2, 5)$ не превосходит пяти, а размерность полной группы - четырнадцати. Эта оценка точна, она реализуется для модельной поверхности с $\Phi(z, z, \bar{z}) = z_1^2\bar{z}_1$.

Стандартным рассуждением можно показать, что оценка 14 остается справедливой и для ростков вполне невырожденных лишь в точке общего положения. Другим стандартным рассуждением, апеллирующим к формальной нормальной форме, можно показать, что если у вполне невырожденного аналитического ростка размерность стабилизатора на максимуме, т.е. равна 5, то росток эквивалентен модельной поверхности указанного вида.

Итак, гипотеза, в прежней формулировке, оказалась неверной. А вопрос остался. Какой класс поверхностей фиксированного CR-типа претендует на роль самых симметричных? Вот новая редакция, которая представляется естественной, в свете построенного примера.

Максимум размерностей локальных автоморфизмов по всем росткам фиксированного CR-типа с конечномерными автоморфизмами достигается на поверхности, которая либо является модельной поверхностью, либо распадается в прямое произведение модельных.

Список литературы

[1] Белошапка В.К., Универсальная модель вещественного подмногообразия, Матем.заметки, т.75, № 4, С.507, 2004.

[2] Белошапка В.К., Ежов В.В., Шмальц Г. Голоморфная классификация четырехмерных поверхностей в $\mathbf{C}^3$ Известия РАН, серия матем., 2005, принято к печати.

[3] Белошапка В.К., Симметрии вещественных гиперповерхностей трехмерного комплексного пространства, Мат.заметки, 2005, т.78, вып.2, С.171-179.

[4] Шананина Е.Н., Модели CR-многообразий типа $(1,k)$ при $3 \leq k \leq 7$ и их автоморфизмы, Мат.заметки, т.67, вып.3, 2000, С.452-459.

[5] Белошапка В.К., Кубическая модель вещественного многообразия, Мат. заметки, 2001, т.70, в.4, с.503-519.

[6] Гаммель Р., Коссовский И., Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен "жесткости", Труды Математического института им. Стеклова, 2005, принято к печати.