ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ МОДЕЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

В.К. БЕЛОШАПКА

Аннотация. Вполне невырожденному ростку вещественного подмногообразия фиксированного CR-типа (n,K) комплексного пространства в работе [6] поставлена в соответствие его касательная полиномиальная модель. В данной работе строится пространство модулей $\mathcal{M}(n,K)$ совокупности полиномиальных моделей, т.е. пространство, параметризующее голоморфно неэквивалентные полиномиальные модели. Построенное пространство применяется для построения CR-характеристических классов.

1.Введение Каждому ростку вполне невырожденного вещественного подмногообразия комплексного пространства ставится в соответствие его полиномиальная модель [6]. Это соответствие (росток –> модель) голоморфно инвариантно. При этом голоморфной эквивалентности ростков соответствует линейная эквивалентность модельных поверхностей. Факторизация совокупности модельных поверхностей фиксированного типа по действию линейной группы позволяет получить пространство модулей - объект замечательный во многих отношениях. Его геометрия представляет собой геометрию всего данного CR-типа в целом. Нетривиальность его топологического строения позволяет определить на произвольном вполне невырожденном подмногообразии ряд новых характеристик (CR-характеристические класы), инвариантных относительно гладких изотопий.

2.Пример. Самая маломерная ситуация, для которой данное построение содержательно это 6-мерное вещественное подмногообразие 5-мерного комплексного пространства. Пусть M как раз такое вполне невырожденное [6] многообразие, т.е. гладкое (C^∞) подмногообразие, которое в окрестности каждой своей точки задается уравнениями вида

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} w_1 &= |z|^2 + F_1(z,\bar z, \operatorname{Re} w_1, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Re} w_3, \operatorname{Re} w_4),\\
\operatorname{Im} w_2 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re} z^2\bar z + F_2(z,\bar z, \operatorname{Re} w_1, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Re} w_3, \operatorname{Re} w_4),\\
\operatorname{Im} w_3 &= |z|^2 + 2\operatorname{Im} z^2\bar z + F_3(z,\bar z, \operatorname{Re} w_1, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Re} w_3, \operatorname{Re} w_4)\\
\operatorname{Im} w_4 &= 2\operatorname{Re}(a z^3\bar z) + b|z|^4 + F_4(z,\bar z, \operatorname{Re} w_1, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Re} w_3, \operatorname{Re} w_4)
\end{aligned}$$

Date: 24 мая 2006 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 05-01-0981 и НШ-2040.2003.1.

где a комплексное число, b -вещественное, $(a,b) \neq 0$, причем величина, $F_j(tz, t\bar{z}, t^2 \operatorname{Re} w_1, t^3 \operatorname{Re} w_2, t^3 \operatorname{Re} w_3, t^4 \operatorname{Re} w_4)$ для $j = 1$ есть $o(t^2)$, для $j = 2,3$ есть $o(t^3)$, а для $j = 4$ есть $o(t^4)$ (эти условия ниже мы проинтерпретируем в терминах некоторой градуировки). Можно отметить, что такое многообразие имеет 1-мерную комплексную касательную, коразмерность 4 и является порождающим. То, что многообразие имеет такое локальное представление, это действительно условие типа условия невырожденности. Т.е. в пространстве значений 4-струй в точке ростки, удовлетворяющие этому условию, это открытое плотное множество, а его дополнение - собственное алгебраическое подмножество. Условие полной невырожденности имеет следующую интерпретацию: градуированная алгебра Леви-Танаки имеет минимально возможную, в данной ситуации, длину равную четырем.

Вещественно алгебраическую поверхность $Q(M)$

$$\operatorname{Im} w_1 = |z|^2, \quad \operatorname{Im} w_2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re} z^2\bar{z}, \quad \operatorname{Im} w_3 = |z|^2 + 2\operatorname{Im} z^2\bar{z}$$
$$\operatorname{Im} w_4 = 2\operatorname{Re}(az^3\bar{z}) + b|z|^4$$

мы называем касательной модельной поверхностью многообразия M в точке, соответствующей началу координат. Для нас важно то, что модельная поверхность не единственна, она зависит от трех вещественных параметров. Действие локальных голоморфных преобразований на поверхность M порождает линейное действие в трехмерном пространстве вещественных полиномов указанного вида. В этом пространстве возникает действие $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{GL}(1,\mathbb{R})$, которое выглядит так, если $(re^{i\theta}, \rho) \in \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{GL}(1,\mathbb{R})$, то

$$(re^{i\theta}, \rho)(a,b) = r^4\rho^{-1}(ae^{2i\theta}, b).$$

Это действие можно рассмотреть, как действие $U(1)$ на $\mathbf{RP}^2$ вида

$$(\operatorname{Re} a : \operatorname{Im} a : b) \mapsto (\operatorname{Re}(e^{2i\theta})a : \operatorname{Im}(e^{2i\theta}a) : b)$$

Нетрудно убедиться, что вещественно рациональная функция $|a|^2/b^2$ разделяет орбиты общего положения этого действия, поэтому (см.[1]) эта функция является образующей поля рациональных инвариантов этого действия. Эта функция определяет регулярное отображение $\mathbf{RP}^2$ в $\mathbf{RP}^1$ вида

$$(\operatorname{Re} a : \operatorname{Im} a : b) \mapsto (|a|^2 : b^2).$$

Образом этого отображения является все пространство $\mathbf{RP}^1$. В силу чего мы называем его *пространством модулей модельных поверхностей* для многообразий такого типа и обозначаем $\mathcal{M}$. Точки этого пространства, которое топологически представляет собой окружность, находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с совокупностью орбит нашего действия.

Коль скоро пространство модулей модельных поверхностей устроено топологически нетривиально, мы можем использовать это для определения соответствующих *CR-характеристических классов* на многообразии типа $(1,4)$. Если M - вполне невырожденное многообразие типа $(1,4)$ ξ - его точка, M_ξ - росток M в точке ξ, $Q(M_\xi)$ - касательная модельная поверхность к M_ξ, то композиция отображений

$$\xi \in M \mapsto M_\xi \mapsto Q(M_\xi) \mapsto \text{точка многообразия } \mathcal{M}$$

канонически определяет "гауссово"отображение

$$\Gamma : M \mapsto \mathcal{M}(n, K).$$

Группа одномерных когомологий окружности $H^1(\mathcal{M}(1,4), \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$, и если ω - ее образующая, то форма Ω, индуцированная отображением Γ на M, представляет собой форму инвариантную относительно голоморфных отображений, а соответствующий класс одномерных когомологий M инвариантен в классе гладких изотопий в объемлющем пятимерном комплексном пространстве. Геометрический смысл этого инварианта ясен: это степень определенного выше „гауссова“ отображения.

3. Соответствие „росток –> модель" Прежде чем рассмотреть общий случай, напомним, вкратце, схему построения соответствия „росток –> модель"(детали см.[6]). Пусть M_ξ - это росток гладкого вещественного порождающего подмногообразия комплексного пространства, n - комплексная размерность комплексной касательной, K - вещественная коразмерность, ℓ - длина градуированной алгебры Леви-Танаки, тогда $n + K$ - это размерность объемлющего комплексного пространства. Пара (n, K) называется типом. Тип, для вполне невырожденного многообразия, однозначно определяет длину. Модельная поверхность произвольного типа (n, K) строится в результате рекуррентного процесса. На первом шаге пременной $z \in \mathbb{C}^n$ присваивается вес 1. Далее идет процесс вычисления некоторой последовательности данных. Вот список данных с номером m: прямое разложение пространства многочленов веса m в сумму пространства гармонических форм $\mathcal{H}_m$ и его дополнения пространства нормализованных многочленов веса m - $\mathcal{CH}_m$, k_m размерность пространства $\mathcal{CH}_m$, пространство $\mathbb{C}^{k_m}$ с координатами $w_m = u_m + iv_m$ веса m. Процесс заканчивается на ℓ-м шаге, где ℓ длина алгебры Леви-Танаки. Условием окончания процесса является попадание коразмерности K в диапазон

$$k_2 + \cdots + k_{\ell-1} < K \leq k_2 + \cdots + k_\ell$$

При этом *избыточная коразмерность* $k = K - (k_2 + \cdots + k_{\ell-1})$ может изменяться в пределах от 1 до k_ℓ. В результате модельная поверхность типа (n, K) это вещественно алгебраическая поверхность $Q = Q(M_\xi)$ в $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{k_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{k_{\ell-1}} \oplus \mathbb{C}^k$, заданная соотношениями

(1)

$$\begin{gathered} \mathrm{v}_2 = \Phi_2(z, \bar z) \\ \cdots \\ \mathrm{v}_j = \Phi_j(z, \bar z, u_2, \ldots, u_{j-1}) \\ \cdots \\ \mathrm{v}_{\ell-1} = \Phi_{\ell-1}(z, \bar z, u_2, \ldots, u_{\ell-2}) \\ \mathrm{v}_\ell = \Phi_\ell(z, \bar z, u_2, \ldots, u_{\ell-1}) \end{gathered}$$

или просто $v = \Phi(z, \bar z, u)$. Здесь координаты Φ_j при $j = 2, ..., \ell - 1$ -это вещественный базис (произвольный) пространства $\mathcal{C}H_j$, а координаты Φ_ℓ - линейно независимые элементы $\mathcal{C}H_\ell$. Любой вполне невырожденный росток обратимой полиномиальной заменой может быть приведен к виду

$$\begin{gathered} \mathrm{v}_2 = \Phi_2(z, \bar z) + O(3) \\ \cdots \\ \mathrm{v}_{\ell-1} = \Phi_{\ell-1}(z, \bar z, u_2, \ldots, u_{\ell-2}) + O(\ell) \\ \mathrm{v}_\ell = \Phi_\ell(z, \bar z, u_2, \ldots, u_{\ell-1}) + O(\ell+1) \end{gathered}$$

где $O(m)$ - это сумма мономов веса m и выше. Если две модельные поверхности, т.е. поверхности вида (1), с наборами правых частей $\Phi = (\Phi_2, ..., \Phi_\ell)$ и $\tilde\Phi = (\tilde\Phi_2, ..., \tilde\Phi_\ell)$ голоморфно эквивалентны, то они эквивалентны линейно, причем такое линейное преобразование имеет вид

$$z \mapsto Cz, \ w_2 \mapsto \rho_2 w_2, ..., w_\ell \mapsto \rho_\ell w_\ell,$$

где $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \rho_2 \in \mathrm{GL}(k_2, \mathbb{R}), ..., \rho_\ell \in \mathrm{GL}(k_\ell, \mathbb{R})$ и для всех $j = 2, ...\ell$ выполнены соотношения

$$\Phi_j(Cz, \overline{Cz}, \rho_2 u_2, ..., \rho_{j-1} u_{j-1}) = \rho_j \tilde\Phi_j(z, \bar z, u_2, ..., u_{j-1}) \tag{2}$$

Обозначение: Будем использовать обозначения вида $< A^3B^2C >$ полагая, в данном случае, что это векторзначная форма (размерность - из контекста) однордная третьей степени по A, второй по B и первой по C с линейно независимыми координатами, Если координаты формы составляют базис соответствующего пространства, мы будем писать $[A^3B^2C]$.

Покажем как выглядят модельные поверхности для нескольких младших значений ℓ.

При $\ell = 2$ это хорошо известные поверхности вида

$$\operatorname{Im} w_2 = < z\bar z >,$$

где $w_2 \in \mathbb{C}^K$. Они обслуживают коразмерности в диапазоне $1 \le K \le n^2$. Этот случай отличается от всех остальных тем, что условие невырожденности, кроме линейной независимости координатных эрмитовых форм, дополнительно включает условие тривиальности ядра (если $e \neq 0$, то $< z, \bar{e} >$ не есть тождественный нуль).

Для $\ell = 3$

$$\begin{gathered} \operatorname{Im} w_2 = [z\bar{z}] \\ \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re} < z^2\bar{z} > \end{gathered}$$

Здесь, размерность w_2 равна n^2, $\quad w_3 \in \mathbb{C}^{K-k_2}$, $\quad k_3 = n^2(n+1)$, диапазон коразмерностей $k_2 + 1 \le K \le k_2 + k_3$.

Для $\ell = 4$

$$\begin{gathered} \operatorname{Im} w_2 = [z\bar{z}] \\ \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}[z^2\bar{z}] \\ \operatorname{Im} w_4 = 2\operatorname{Re}(< z^3\bar{z} > + < z^2\bar{z}^2 >) \end{gathered}$$

$w_j \in \mathbb{C}^{k_j},\ j = 2, 3,\ w_4 \in \mathbb{C}^k,\ k_4 = n^2(n+1)(7n+11)/12,\ 1 \le k \le k_4,$
$k_2 + k_3 + 1 \le K \le k_2 + k_3 + k_4$.

Для $\ell = 5$

$$\begin{gathered} \operatorname{Im} w_2 = [z\bar{z}] \\ \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}[z^2\bar{z}] \\ \operatorname{Im} w_4 = 2\operatorname{Re}[z^3\bar{z}] + [z^2\bar{z}^2] \\ \operatorname{Im} w_5 = 2\operatorname{Re}(< z^4\bar{z} > + < z^3\bar{z}^2 > + < z^2\bar{z}\, u_2 >) \end{gathered}$$

$w_j \in \mathbb{C}^{k_j}, \quad j = 2, 3, 4, \quad w_5 \in \mathbb{C}^k,$
$k_5 = n^2(n+1)(15n^2 + 11n + 10)/12,$
$k_2 + k_3 + k_4 + 1 \le K \le k_2 + k_3 + k_4 + k_5.$

4. Построение пространства модулей. Обозначим через $\mathcal{CH} = \mathcal{CH}(n, K)$ пространство вида $\mathcal{CH}_2^{k_2} \oplus ... \oplus \mathcal{CH}_{\ell-1}^{k_{\ell-1}} \oplus \mathcal{CH}_\ell^k$, где под V^m понимаем прямую сумму m экземпляров линейного пространства V. Тогда правые части уравнений всевозможных модельных поверхностей типа (n, K) - это элементы $\mathcal{CH}$. Точнее, если принять во внимание условие невырожденности, это $\mathcal{CH}^*$ - открытая плотная часть $\mathcal{CH}$. Модельные поверхности голоморфно эквивалентны в том и только том случае, если правые части, т.е. элементы пространства $\mathcal{CH}^*$ принадлежат одной орбите следующего действия группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{GL}(k_2, \mathbb{R}) \oplus ... \oplus \mathrm{GL}(k_{\ell-1}, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$

$$\Phi_2(z,\bar z)\mapsto \rho_2^{-1}\Phi_2(Cz,\overline{Cz}) \tag{3}$$
$$\dots$$
$$\Phi_j(z,\bar z,u_2,...,u_{j-1})\mapsto \rho_j^{-1}\Phi_j(Cz,\overline{Cz},\rho_2u_2,...,\rho_{j-1}u_{j-1})$$
$$\Phi_\ell(z,\bar z,u_2,...,u_\ell-1)\mapsto \rho^{-1}\Phi_\ell(Cz,\overline{Cz},\rho_2u_2,...,\rho_{\ell-1}u_{\ell-1})$$

Но действие $\mathrm{GL}(k_j,\mathbb{R})$ при $j=2,...,\ell-1$ на базисах пространства $\mathcal{C}H_j$ является свободным. Поэтому если отметить в каждом их этих пространств некоторый базис и считать, что отмеченный базис остается неподвижным,то при фиксированном C соотношения (2) однозначно разрешимы относительно $\rho_2,...\rho_{\ell-1}$. Если обозначить через $\tau_j(C)$ единственное решение соотношения $\Phi_j(Cz,\overline{Cz},\rho_2u_2,...,\rho_{j-1}u_{j-1}) = \rho_j\Phi_j(z,\bar z,u_2,...,u_{j-1})$ относительно ρ_j, то мы видим, что $C\mapsto\tau_j(C)$ это некоторое представление $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ в $\mathrm{GL}(k_j,\mathbb{R})$. Теперь становится ясно, что обиты действия (3) находятся в естественном соответствии с орбитами действия $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\oplus\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ вида

$$\Phi_\ell(z,\bar z,u_2,...,u_{\ell-1})\mapsto\rho^{-1}\Phi_\ell(Cz,\overline{Cz},\tau_2(C)u_2,...,\tau_{\ell-1}(C)u_{\ell-1}) \tag{4}$$

на пространстве $(\mathcal{C}H_\ell^k)^*$, т.е. пространстве наборов из k линейно независимых элементов $\mathcal{C}H_\ell$,

Чтобы сделать еще один шаг заметим, что если мы вместо набора из k линейно независимых элементов $\mathcal{C}H_\ell$ рассмотрим порожденное ими k-мерное подпространство в $\mathcal{C}H_\ell$, то наши орбиты естественно отождествляется с орбитами, действия $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ на вещественном грассмановом многообразии $Gr_k(\mathcal{C}H_\ell)$, индуцированного действием (4). И последнее. Вещественные скалярные растяжения, содержатся в ядре действия (4), поэтому можно от группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ перейти к подгруппе G матриц C, т.ч.$|\det C|=1$.

Описанное действие - это вполне традиционный объект изучения классической теории инвариантов [1]. Пусть $\mathcal{F}$ - поле рациональных функций на $Gr_k(\mathcal{C}H_\ell)$, а $\mathcal{F}^G$ - подполе функций, инвариантных относительно описанного действия G. Эти поля конечно порождены над $\mathbf{R}$. Более того, поле $\mathcal{F}^G$ содержит конечное множество образующих $R_1,...,R_s$, которые разделяют орбиты общего положения. Эти вещественно рациональные функции определяют рациональное отображение $Gr_k(\mathcal{C}H_\ell)$ в $\mathbf{RP}^s$. Мы можем рассмотреть образ этого этого отображения [2]. Это и есть то многообразие, которое мы будем называть пространством модулей и обозначать $\mathcal{M}(n,K)$.

Как и в разобранном в начале примере, мы можем определить каноническое "гауссово"отображение. Если M - вполне невырожденное многообразие ξ - его точка, M_ξ - росток M в точке ξ, $Q(M_\xi)$ - касательная модельная поверхность к M_ξ, то гауссово отображение $\Gamma: M\mapsto\mathcal{M}(n,K)$

определяется как композиция

$$\xi \in M \mapsto M_\xi \mapsto Q(M_\xi) \mapsto \text{точка многообразия } \mathcal{M}$$

Наличие канонического отображения Γ позволяет переносить с $\mathcal{M}(n, K)$ на M любые ковариантные конструкции. В частности, целочисленные когомологии $\mathcal{M}$. Когомологии $\mathcal{M}$ перенесенные на M с помощью G определяют на любом гладком вполне невырожденном многообразии *"CR-характеристические классы"*. Эти классы, очевидно, инвариантны по отношению к гладким изотопиям, не нарушающим полной невырожденности.

5. Свойства пространства модулей. Размерность пространства модулей определяется размерностью орбиты общего положения, которая, в свою очередь, есть разность размерности группы и размерности стабилизатора точки общего положения [1]. Размерность группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ равна, очевидно, $2n^2 + k^2$. Эта группа действует на пространстве размерности $k_\ell k$. Размерность орбиты этого действия равна размерности группы минус размерность стабилизатора точки этой орбиты. Размерность стабилизатора равна размерности алгебры Ли стабилизатора. Уравнения, задающие эту алгебру - это линейные однородные уравнения, чьи коэффициенты линейно зависят от коэффициентов старшей формы Φ_ℓ. Таким образом возникает система вложенных алгебраических подмножеств пространства $\mathcal{C}H_\ell$, стратифицирующих его по размерности стабилизатора. На открытом плотном подмножестве $\mathcal{C}H_\ell$ значение стабилизатора принимает минимальное значение. Обозначим эту величину через DS и будем называть размерностью стабилизатора общего положения. Тогда можно утверждать, что открытое плотное подмножество $\mathcal{C}H_\ell$ слоится на орбиты размерности $2n^2 + k^2 - DS$. Это семейство орбит зависит, очевидно, от $k_\ell k - (2n^2 + k^2 - DS)$ параметров. Величину DS вычислить несложно. Если $k = k_\ell$, то $DS = 2n^2$ при всех ℓ. Если $\ell = 2$, то DS зависит от $k = 1, ..., n^2$ следующим образом. Если $k = 1, n^2 - 1$, то $DS = n^2 + 1$; если $k = 2, n^2 - 2$, то случай $n = 1$ следует из рассмотрения исключить в силу условия $k \leq n^2$, если $n = 2$, то $DS = 4$, а если $n \geq 3$, то $DS = n + 1$, если же $k = 3, ..., n^2 - 3$, то $DS = 2$. Если теперь $\ell > 2$ и $k < k_\ell$, то $DS = 1$. В итоге получаем

Утверждение 1:

Если $\ell = 2$ и $n = 1$ или 2, то $\mathcal{M}$ - точка и размерность нуль.

Если $\ell = 2, \quad n \geq 3, \quad k = 1, n^2 - 1, n^2$, то $\mathcal{M}$ - точка и размерность нуль.

Если $\ell = 2, \quad n \geq 3, \quad k = 2, n^2 - 2$, то $\dim \mathcal{M} = n - 3$.

Если $\ell = 2$ и $k = 3, ..., n^2 - 3$, то $\dim \mathcal{M} = n^2(k - 2) + 2 - k^2$;

Если $\ell \geq 3$ и $k < k_\ell$, то $\dim \mathcal{M} = k_\ell k + 1 - (2n^2 + k^2)$.

Если $k = k_\ell$, то $\mathcal{M}$ - точка и размерность нуль.

Если зафиксировать значение n и рассматривать возрастающие от единицы и далее значения K, то типы многообразий объединяются

в некие *периоды*, которые нумеруются значениями ℓ. Наряду с представлением модельной поверхности как точки в грассмановом многообразии k-мерных подпространств пространства форм старшей степени $\mathcal{C}H_\ell$ можно рассмотреть двойственное представление. А именно, представление в виде точки в грассмановом многообразии $(k_\ell - k)$-мерных плоскостей в пространстве линейных функций на $\mathcal{C}H_\ell$, т.е. в двойственном пространстве. Это представление строится на основе канонического соответствия:
(k-мерное подпространство) $\mapsto$
$(k_\ell - k)$-мерное подпространство линейных функций, определяющих эту плоскость.
В результате каждый период делится на „симметричные" пары типов: $(n, k_2 + ... + k_{\ell-1} + k) \leftrightarrow (n, k_2 + ... + k_{\ell-1} + (k_\ell - k)$. При отождествлении пространства с его двойственным пространством пространства модулей симметричных типов отождествляются. Т.о.справедливо следующее

Утверждение 2: $\mathcal{M}(n, k_2 + ... + k_{\ell-1} + k) \cong \mathcal{M}(n, k_2 + ... + k_{\ell-1} + (k_\ell - k))$.

Период заканчивается, когда избыточная коразмерность k достигает максимального, в рамках данного периода, значения $k = k_\ell$ и K при этом есть $k_2 + ... + k_\ell$. Этот тип естественно назвать *последним* типом периода. Модельная поверхность для последнего типа - единственна и $\mathcal{M}(n, k_2 + ... + k_\ell)$ - точка (утверждение 1).

6. Еще несколько примеров. Зафиксируем значение $n = 1$ и рассмотрим несколько младших значений K. Нашу „периодическую таблицу" открывает период с номером $\ell = 2$. Этот период состоит из единственного типа $(1,1)$. При $K = 1$ полная невырожденность многообразия совпадает с Леви-невырожденностью и это означает, что в окрестности каждой своей точки ξ оно может быть представлено локальными уравнениями вида:

$$\operatorname{Im} w_2 = |z|^2 + O(3)$$

(веса мономов считаем так: $[z] = 1$, $[w_2] = 2$). Т.е. такая поверхность локально может быть представлена как возмущение единственной модельной поверхности $\operatorname{Im} w_2 = |z|^2$ и пространство модулей - это, конечно, точка. Следующий период с $\ell = 3$ состоит из двух типов - $(1,2)$ и $(1,3)$. Модельные поверхности

$$\operatorname{Im} w_2 = |z|^2, \quad \operatorname{Im} w_3 = |z|^2 \operatorname{Re} z$$

и

$$\operatorname{Im} w_2 = |z|^2, \quad \operatorname{Im} w_3^1 = |z|^2 \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} w_3^2 = |z|^2 \operatorname{Im} z$$

также единственны. Период с $\ell = 4$ состоит из трех типов $(1,4)$, $(1,5)$ и $(1,6)$. Первый из них нами уже рассмотрен и мы знаем, что $\mathcal{M}(1,4) = S^1$.

Тип $(1,5)$ симметричен типу $(1,4)$ и, в силу утверждения 2 пространство $\mathcal{M}(1,5)$ это тоже S^1. Тип $(1,6)$ - последний в периоде и $\mathcal{M}(1,6)$ - точка.

Следующий ($\ell = 5$) период содержит шесть типов от $(1,7)$ до $(1,12)$. Локально уравнение вполне невырожденного многообразия типа $(1,7)$ можно записать в виде

$$\operatorname{Im} w_2 = |z|^2 + O(3),$$
$$\operatorname{Im} w_3^1 = |z|^2 \operatorname{Re} z + O(4), \quad \operatorname{Im} w_3^2 = |z|^2 \operatorname{Im} z + O(4)$$
$$\operatorname{Im} w_4^1 = 2\operatorname{Re}(z^3\bar{z}) + O(5), \quad \operatorname{Im} w_4^2 = 2\operatorname{Im}(z^3\bar{z}) + O(5), \quad \operatorname{Im} w_4^3 = |z|^4 + O(5),$$
$$\operatorname{Im} w_5 = 2\operatorname{Re}(az^4\bar{z} + b^3\bar{z}^2 + cu_2 z^2\bar{z}) + O(6),$$

где нижний индекс координаты равен ее весу; a, b, c - это комплексные числа и $(a,b,c) \neq 0$. На вещественно шестимерном пространстве параметров группа $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{GL}(1,\mathbb{R})$ действует следующим образом:

$$(re^{i\theta}, \rho)(a,b,c) = \frac{r^5}{\rho}(e^{3i\theta}a, e^{i\theta}b, e^{i\theta}c)$$

или, если перейти к $\mathbf{RP}^5$ с координатами $(\operatorname{Re} a : \operatorname{Im} a : \operatorname{Re} b : \operatorname{Im} b : \operatorname{Re} c : \operatorname{Im} c)$, то действие сводится к действию $U(1)$ вида

$$(e^{i\theta})(a,b,c) = (e^{3i\theta}a, e^{i\theta}b, e^{i\theta}c)$$

Орбиты общего положения разделяет пара комплексно рациональных функций a/b^3 и c^3/b^3. Эти функции определяют отображение $\mathbf{RP}^5$ в $\mathbf{CP}^2$ вида

$$(a,b,c) \mapsto (a : b^3 : c^3)$$

И мы можем в качестве пространства модулей $\mathcal{M}(1,7)$ мы можем взять образ этого отображения, т.е. $\mathbf{CP}^2$. Утверждение 2 позволяет написать, что $\mathcal{M}(1,11) = \mathcal{M}(1,7) = \mathbf{CP}^2$.

Относительно дальнейшего мы ограничимся подсчетом размерностей до периодов с $\ell = 2,3,4,5,6,7$. Строки таблицы упорядочены параметром K, который пробегает значения от 1 до 35, периоды отмечены двойным разделителем.

$\mathbf{n = 1}$

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\dim M$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\dim \mathcal{M}$	0	0	0	1	1	0	4	7	8	7	4	0	6	11	14	15	14	11

K	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$\dim M$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
$\dim \mathcal{M}$	6	0	13	25	35	43	49	53	55	55	53	49	43	35	25	13	0

Из таблицы видно, что первый раз значение $\dim \mathcal{M} = 25$ превышает значение $\dim M = 24$ при $K = 22$, т.е. для подмногообразия $\mathbf{C}^{23}$ типа $(1,22)$ и это соотношение сохраняется почти весь 7-й период. Для следующих периодов исключение составляют лишь последние типы.

Вот два периода $\ell = 2$ и $\ell = 3$ для $\mathbf{n = 2}$.

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\dim M$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\dim \mathcal{M}$	0	0	0	0	4	13	20	25	28	29	28	25	20	13	4	0

Первый раз значение $\dim \mathcal{M} = 13$ превышает значение $\dim M = 10$ при $K = 6$, т.е. для подмногообразия $\mathbf{C}^8$ типа $(2, 6)$.

А вот те же два периода $\ell = 2$ и $\ell = 3$ для $\mathbf{n} = \mathbf{3}$.

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\dim M$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$\dim \mathcal{M}$	0	0	2	4	4	2	0	0	0	18	51	82	111	138	163	186	207

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
226	243	258	271	282	291	298	303	306	307	306	303	298	291

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
282	271	238	243	226	207	186	163	138	111	82	51	18	0

Первый раз значение $\dim \mathcal{M} = 18$ превышает значение $\dim M = 16$ при $K = 10$, т.е. для подмногообразия $\mathbf{C}^{13}$ типа $(3, 10)$.

Величина k_ℓ это полином от n, который имеет степень не ниже ℓ. Таким образом становится ясно, что для подавляющего большинства типов размерность $\mathcal{M}$ значительно выше, чем размерность самого многообразия M, которая равна $2n + K$. Это, по-видимому, означает, что в этом случае многообразие M общего положения однозначно (с точностью до голоморфной эквивалентности) восстанавливается по своему гауссову образу. Т.е. совпадение гауссова образа для таких многообразий это критерий голоморфной эквивалентности (необходимость - очевидна). Общее положение надо понимать как максимальность ранга гауссова отображения. Для всех голоморфно однородных многообразий, т.е. многообразий с транзитивным действием группы голоморфных симммметрий, гауссов образ - точка, т.е. гауссово отображение имеет нулевой ранг. Таковы, в частности, сами модельные поверхности.

Пространство модулей можно снабдить какой-либо метрикой, после чего на всех многообразиях общего положения данного типа будет индуцирована инвариантная метрика.

Многообразия коразмерности 2, т.е. подмногообразия типа $(n, 2)$ пространства $\mathbf{C}^{n+2}$ начиная с $n = 2$ попадают в младший период с $\ell = 2$. Полная классификация таких модельных поверхностей проведена в [5]. Модельная поверхность этого типа имеет вид

$$\operatorname{Im} w_1 =< z, \bar{z} >_1, \quad \operatorname{Im} w_2 =< z, \bar{z} >_2$$

где $< z, \bar{z} >_1$ и $< z, \bar{z} >_2$ - две линейно независимые эрмитовы формы в $\mathbf{C}^n$ без общего ядра и (H_1, H_2) - их матрицы. Пространство модулей $\mathcal{M}(n,2)$ в этом случае находится в естественном соответствии с проективными классами вещественных гиперэллиптических кривых. Проективно неэквивалентные наборы из n различных точек $\mathbf{CP}^1$ - характеристических значений $(t_1 : t_2) \in \mathbf{CP}^1$, т.е. корней уравнения $\det(t_1 H_1 + t_2 H_2) = 0$ параметризуют $\mathcal{M}(n,2)$. $\mathcal{M}(2,2)$ и $\mathcal{M}(3,2)$ - это точки. В ситуации $(4,2)$ мы получаем набор из четырех характеристических значений. И если ν - это двойное отношение (для какой-либо нумерации), а

$$j = \frac{(\nu^2 - \nu + 1)^2}{\nu^2(\nu - 1)^2}$$

- j-инвариант, то выразив j через элементы H_1 и H_2 мы получим единственную образующую поля рациональных инвариантов и $\mathcal{M}(4,2)$ это $\mathbf{RP}^1$, т.е. окружность.

Для произвольных типов (n, K) начального периода $\ell = 2$, т.е. для $K \leq n^2$, модельная поверхность определяется набором из K эрмитовых матриц порядка n - $(H_1, \ldots, H_K)$. И тогда пространство модулей оказывается соответствующим проективным классам вещественно алгебраических гиперповерхностей степени n в $\mathbf{RP}^{K-1}$ - $\det(t_1 H_1 + \cdots + t_K H_K) = 0$. Например, если $n = K = 3$, то это проективные классы вещественных кубических кривых в $\mathbf{CP}^2$. Как известно [3], такая кривая общего положения приводится к нормальной форме Вейерштрасса

$$t_2^2 t_3 = t_1^3 + p t_1 t_3^2 + q t_3^3$$

. Таким образом, выражая p и q через элементы (H_1, H_2, H_3) мы получим две образующие поля инвариантов.

Автор благодарен Э.Б.Винбергу, Н.Г.Кружилину и С.Ю.Немировскому, с которыми он имел ряд плодотворных обсуждений.

Список литературы

[1] Винберг Э.Б., Попов В.Л., Теория инвариантов, в серии ВИНИТИ "Итоги науки и техники"т.55, Алгебраическая геометрия - 4, Москва, 1989.

[2] Харрис Дж., Алгебраическая геометрия, Москва, Изд-во НЦНМО, 2005.

[3] Прасолов В.В., Соловьев Ю.П., Эллиптические функции и алгебраические уравнения, М. Факториал,1997.

[4] Шананина Е.Н., Модели CR-многообразий типа $(1,k)$ при $3 \leq k \leq 7$ и их автоморфизмы, Мат.заметки, т.67, вып.3, 2000, С.452-459.

[5] Шевченко С.Н. Описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов квадрик коразмерности два и их классификация, Мат.заметки т.55, N 5, 1994, С.142-153.

[6] Белошапка В.К., Универсальная модель вещественного подмногообразия, Матем.заметки, т.75, № 4, С.507, 2004.

(В.К. Белошапка) Механико-математический факультет, МГУ, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия

E-mail address: vkb@strogino.ru