Симметрии вещественных гиперповерхностей трехмерного комплексного пространства

Белошапка В.К.

4 июля 2004 г.

[1] [2]

Основной результат работы это доказательство того, что для произвольного ростка вещественно аналитической гиперповерхности трехмерного комплексного пространства справедлива следующая альтернатива (гипотеза о размерности): либо размерность группы голоморфных симметрий ростка не превосходит размерности группы невырожденной гиперквадрики (она равна 15), либо эта группа бесконечномерна. Обсуждается также работа А.Ершовой [3], в которой обнаружены ошибки.

Риманова геометрия является образцом для многих дифференциально-геометрических построений и источником далеко идущих аналогий. В известной работе Черна и Мозера 1974-го года [1] проводилась параллель между римановой геометрией и геометрией вещественной гиперповерхности комплексного пространства (псевдоконформной геометрией в терминах Э.Картана). У этой аналогии имеется следующий аспект. В римановой геометрии известную роль играют однородные многообразия постоянной кривизны, как называемые модельные многообразия. Эти во многих отношениях замечательные многообразия обладают, в частности, следующим экстремальным свойством. Они обладают максимальными, по размерности, группами симметрий.В геометрии вещественных подмногообразий комплексного

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 0015-96-008 и 02-01-01-291

[2]119899 Москва, Воробьевы горы, Московский государственный университет, механико-математический факультет, vkb@strogino.ru

пространства имеются вполне аналогичные объекты - модельные поверхности. Эти поверхности также (голоморфно) однородны и группы их голоморфных симметрий имеют максимальную размерность.

Римановы многообразия можно, в первом приближении, различать по размерности, вещественные подмногообразия различают, прежде всего, по типу. Тип вещественного d-мерного порождающего подмногообразия M^d комплексного пространства $\mathbf{C}^N$ - это пара чисел (n, K), где n это комплексная размерность комплексного касательного пространства (CR-размерность), а K это вещественная коразмерность, при этом $K + n = N$ и $K + 2n = d$. Например, гиперповерхность в пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$ имеет тип $(n, 1)$. В этой ситуации модельной поверхностью является гиперквадрика вида $\operatorname{Im} w =< z, \bar{z} >$, где $< z, \bar{z} >$ невырожденная эрмитова форма от n-мерной переменной z.Если зафиксировать значение n и начать увеличивать K, то пока $K \leq n^2$ модельные поверхности будут задаваться системой вещественно квадратичных уравнений, затем степени определяющих уравнений начнут возрастать [6]. Недавно задача построения модельной поверхности была решена для многообразий произвольного типа [7]. Среди свойств модельной поверхности имеется следующее: размерность локальной группы голоморфных автоморфизмов произвольного вполне невырожденного ростка не превосходит размерности группы касательной модельной поверхности.

Если условие полной невырожденности отбросить, то группа может стать бесконечномерной. Однако можно сформулировать следующую гипотезу, контрпример к которой нам неизвестен. Для размерности локальной группы автоморфизмов произвольного вещественно аналитического ростка имеет место следующая альтернатива. Либо эта размерность равна бесконечности, либо она не превосходит размерности группы модельной поверхности соответствующего типа. Т.е. максимум размерности группы голоморфных симметрий (в классе конечномерных групп) достигается не на вырожденных ростках, а на невырожденных модельных поверхностях. Эта гипотеза доказана для многообразий типа (1,1) [6] и (1,2) [8]. В [6] мною было приведено рассуждение, доказывающее эту гипотезу для гиперповерхности в $\mathbf{C}^3$, т.е. для многообразий типа (2,1). Это рассуждение существенно использовало рузультаты работы А.Ершовой [3], которая дала оценки размерности группы автоморфизмов для каждого из восьми возможных типов 2-невырожденных гиперповерхностей, описанных П.Эбенфельтом [5]. В работе Ершовой содержится утверждение, что размерность локальной группы автоморфизмов 2-невырожденного ростка не превосходит 7-ми. Однако Д.Зайцев обратил мое внимание на то, что размерность группы голоморфных симметрий "светового"конуса $(\operatorname{Im} w)^2 = (\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Im} \zeta)^2$ равна 10-ти ([4], см.также обсуждение в конце данной работы). Этот пример не опровергает нашей гипотезы о размерности, т.к. размерности групп обеих невырожденных гиперквадрик, положительно определенной $\operatorname{Im} w = |z|^2 + |\,\zeta\,|^2$ и знаконеопределенной $\operatorname{Im} w = |z|^2 - |\,\zeta\,|^2$ равны 15-ти, но находится в противоречии с оценкой Ершовой.

В данной работе дается независимое от результатов Ершовой доказательство гипотезы для гиперповерхностей в $\mathbf{C}^3$ и проводится анализ ее работы.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие обозначения. Если M - гладкая поверхность в $\mathbf{C}^N$, ξ - ее точка, M_ξ росток M в точке, ξ, то через $\operatorname{aut} M_\xi$ обозначим алгебру Ли ростков вещественных векторных полей с голоморфными коэффициентами в точке ξ, касательных к M_ξ. Если $z = (z_1, \dots, z_N)$ координаты в $\mathbf{C}^N$,то

$$\operatorname{aut} M_\xi = \{X(z) = 2\operatorname{Re}(f_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + f_N(z)\frac{\partial}{\partial z_N})\}$$

где сужение поля X на M_ξ есть росток поля, касательного к M_ξ, а коэффициенты $(f_1(z), \dots, f_n(z))$ ростки функций, голоморфных в ξ. Это алгебра Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов, т.е. векторных полей, которые порождают голоморфное действие на M_ξ. В ней имеется подалгебра $\operatorname{aut}_\xi M_\xi$, состоящая из ростков полей, обращающихся в нуль в точке ξ. Можно рассмотреть соответствующую $\operatorname{aut} M_\xi$ локальную группу - $\operatorname{Aut} M_\xi$ и соответствующую $\operatorname{aut}_\xi M_\xi$ группу $\operatorname{Aut}_\xi M_\xi$, т.е.$\operatorname{Aut} M_\xi$ и $\operatorname{Aut}_\xi M_\xi$ это образы $\operatorname{aut} M_\xi$ и $\operatorname{aut}_\xi M_\xi$ под действием экспоненциального отображения. Эти группы действуют на M_ξ отображениями, биголоморфными в ξ. Причем $\operatorname{Aut}_\xi M_\xi$ это стабилизатор точки ξ в $\operatorname{Aut} M_\xi$, т.е. эта подгруппа состоит из тех преобразований из $\operatorname{Aut}_\xi M_\xi$, которые сохраняют точку ξ неподвижной.

Приведем определение q-невырожденности из работы [5]. Пусть $\rho(Z, \bar{Z}) = 0$ - локальное уравнение M в окрестности ξ и существует положительное целое число l такое что $span\{L^\alpha \rho_Z(\xi, \bar{\xi}) : |\alpha| \le l\} = \mathbf{C}^N$, где $L^\alpha = L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n}$, причем$L_1, \dots L_n$ - базис CR-векторных полей на M в окрестности ξ, а $\rho_Z = \partial\rho/\partial Z$ - голоморфный градиент. Тогда говорим, что M q-невырожденна в точке ξ если q - минимальное из таких чисел l.

Пусть Γ вещественно аналитическая гиперповерхность в $\mathbf{C}^3$ с координатами $(z, \zeta, w = u + iv)$, тогда имеется три взаимоисключающие возможности. Либо в точке общего положения (т.е.на открытом плотном подмножестве) форма Леви Γ имеет ранг 2 (т.е.невырождена), либо в точке общего положения она имеет ранг 1, либо ранг 0. В первом случае мы сразу получаем требуемую оценку [1]. Третий случай - это Леви-плоская гиперповерхность, она локально эквивалентна гиперплоскости и ее группа бесконечномерна. Интерес представляет второй случай. Такая гиперповерхность в точке общего положения должна быть, к тому же, 2-невырожденной и ее локальное уравнение может быть записано в одной из трех форм [5].

$$
\begin{array}{cc}
(I) & v = |z|^2 + |\,\zeta\,|^2(\zeta + \bar{\zeta}) + \gamma(z^2\bar{\zeta} + \bar{z}^2\,\zeta) + O(|z|^4 + |u||z|^2), \\
 & \text{где } \gamma = 0, 1; \\
(II) & v = |z|^2 + (z^2\bar{\zeta} + \bar{z}^2\,\zeta) + O(|z|^4 + |u||z|^2); \\
(III) & v = |z|^2 + |\,\zeta\,|^2(z + \bar{z}) + O(|z|^4 + |u||z|^2).
\end{array}
$$

Оценки работы [3] основаны на применении следующей, многократно применявшейся конструкции. Введем в пространстве рядов от переменных $(z, \bar{z}, w, \bar{w})$ градуировку, назначая, некоторым образом, положительные веса переменным. Обозначим через $O(q)$ выражение, являющееся суммой компонент веса q и выше. Тогда размерность семейства отображений, переводящих росток вида

$$v = F_m + O(m+1) \tag{1}$$

в другой росток такого же вида $v = \tilde{F}_m + O(m+1)$, где F_m и $\tilde{F}_m$ - однородные многочлены веса m и сохраняющих начало координат не превосходит размерности алгебры Ли $\mathrm{aut}_0\, Q_0$ гиперповерхности $Q = \{v = F_m(z, \bar{z}, u)\}$. Это доказывается рекуррентным вычислением и представляет собой версию теоремы о неявной функции [1],[6].

Если положить $[z] = 3,\ [\zeta] = 2,\ [w] = 6$, то поверхность вида (I) записывается как $v = F_6 + O(7)$, поэтому размерность группы ростка оценивается размерностью алгебры гиперповерхности $Q^1 = \{v = |z|^2 + |\,\zeta\,|^2(\zeta + \bar{\zeta})\}$

Продолжим введенную градуировку на векторные поля полагая

$$[\frac{\partial}{\partial z}] = -3,\ [\frac{\partial}{\partial\,\zeta}] = -2,\ [\frac{\partial}{\partial w}] = -6$$

В этой градуировке все векторные поля распадаются на весовые компоненты от минус шестой и выше. В силу весовой однородности уравнения Q^1 алгебра инфинитезимальных автоморфизмов этой гиперповерхности обладает следующим свойством. Вместе с векторным полем эта алгебра содержит каждую его весовую компоненту.

Используя стандартную технику работы со степенными рядами, получаем описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов гиперповерхности Q^1.

Предложение 1 *Если* Γ_0^1 *росток 2-невырожденной гиперповерхности в нуле типа (I), а* $Q^1 = \{v = |z|^2 + |\,\zeta\,|^2(\zeta + \bar\zeta)\}$, *то*
(a) Алгебра $\operatorname{aut} Q^1$ *имеет следующую градуированную структуру*
$g_{-6} + g_{-3} + g_{-2} + g_0$, *при этом*
$g_{-6} = \{2\operatorname{Re}(a\frac{\partial}{\partial w})\}$,
$g_{-3} = \{2\operatorname{Re}(2ibz\frac{\partial}{\partial w} + b\frac{\partial}{\partial z})\}$,
$g_{-2} = \{2\operatorname{Re}(2c\,\zeta^2\frac{\partial}{\partial w} + ic\frac{\partial}{\partial \zeta}\}$,
$g_0 = \{2\operatorname{Re}(6dw\frac{\partial}{\partial w} + 3(d+ie)z\frac{\partial}{\partial z} + 2d\,\zeta\,\frac{\partial}{\partial \zeta})\}$,
где $a, c, d, e \in \boldsymbol{R},\ b \in \boldsymbol{C}$, *в частности, размерности* $\operatorname{aut} Q^1$ *и* $\operatorname{aut}_0 Q^1 = g_0$ *равны 6 и 2 соответственно.*
(b) $\dim \operatorname{Aut}_0 \Gamma_0^1 \le 2, \quad \dim \operatorname{Aut} \Gamma_0^1 \le 6$

Второе неравество в (b) следует из (a), первого неравества (b) и того, что росток этого типа не может быть однороден [5], т. е. коразмерность $\operatorname{aut}_0 Q^1$ в $\operatorname{aut} Q^1$ не больше четырех. Заметим, что Q^1 реализует максимум размерности и полной группы для таких ростков, т.к. $\dim \operatorname{Aut} Q^1 = 6$.

Полученный мною ответ не совпадает с тем, что дан в статье Ершовой. Если разложить полученный ею ответ по весовым компонентам, то алгебра получает следующую структуру $g_{-6}+g_{-3}+g_{-2}+g_0+g_6$, где все компоненты, за исключением последней, совпадают с нашими. При этом, нетрудно проверить, что поле $2\operatorname{Re}(zw\frac{\partial}{\partial z} + w^2\frac{\partial}{\partial w})$, порождающее ее компоненту g_6, не является касательным к Q^1.

Переходим к рассмотрению поверхностей вида (III). Если теперь положить $[z] = 2,\ [\zeta] = 1,\ [w] = 4$, то такая поверхность записывается как $v = F_4 + O(5)$, поэтому размерность группы ростка оценивается размерностью алгебры $\operatorname{aut}_0 Q^3$ гиперповерхности $Q^3 = \{v = |z|^2 + |\,\zeta\,|^2(z + \bar z)\}$. Проводя стандартные вычисления со степенными рядами, получаем описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов гиперповерхности Q^3.

Предложение 2 *Если* Γ_0^3 *росток 2-невырожденной гиперповерхности в нуле типа (III), а* $Q^3 = \{v = |z|^2 + |\,\zeta\,|^2(z + \bar z)\}$, *то*
(a) Алгебра $\operatorname{aut} Q^3$ *имеет следующую градуированную структуру*

$g_{-4}+g_{-2}+g_0$, при этом
$g_{-4}=\{2\operatorname{Re}(a\frac{\partial}{\partial w})\}$,
$g_{-2}=\{2\operatorname{Re}(2ibz\frac{\partial}{\partial w}+ib\frac{\partial}{\partial z})\}$,
$g_0=\{2\operatorname{Re}(4cw\frac{\partial}{\partial w}+2cz\frac{\partial}{\partial z}+(c+id)\,\zeta\,\frac{\partial}{\partial \zeta})\}$,
где $a,b,c,d\in \boldsymbol{R}$, в частности, размерности $\operatorname{aut} Q^3$ и $\operatorname{aut}_0 Q^3=g_0$ равны 4 и 2 соответственно.
(b) $\dim \operatorname{Aut}_0\Gamma_0^3\le 2, \quad \dim \operatorname{Aut}\Gamma_0^3\le 6$

Второе неравество в (b), как и в предыущем случае, следует из (a), первого неравества (b) и того, что росток этого типа не может быть однороден [5], т. е. коразмерность $\operatorname{aut}_0 Q^1$ в $\operatorname{aut} Q^1$ не больше четырех. Однако, в этом случае, мы не можем утверждать, что оценка размерности полной группы ростка этого вида точна. Как и в предыдущем случае, полученный мною ответ не совпадает с тем, что дан в статье Ершовой. Если разложить полученный ею ответ по весовым компонентам, то алгебра получает следующую структуру $g_{-4}+g_{-2}+g_0+g_2$, где все компоненты, за исключением последней, совпадают с нашими. При этом, нетрудно проверить, что поле $2\operatorname{Re}((2iz^2+w)\frac{\partial}{\partial z}+2izw\frac{\partial}{\partial w})$, порождающее ее компоненту g_2, не является касательным к Q^3.

Теперь, для доказательства сформулированной гипотезы, нам нужна оценка размерности стабилизатора точки для гиперповерхностей вида (II). Своеобразие этого вида заключается в следующем. Не существует выбора весов переменных z и ζ, такого чтобы многочлен $|z|^2+(z^2\bar\zeta+\bar z^2\,\zeta)$ стал однородным, а остальные члены получили более высокий вес. Таким образом оценка размерности группы гиперповерхности $Q^2=\{v=|z|^2+(z^2\bar\zeta+\bar z^2\,\zeta)\}$, (Ершова получила правильные ответы: 3 - размерность стабилизатора и 6 - полная размерность) ничего не говорит о размерности группы ростка этого вида. В этом главная ошибка работы А.Ершовой.

В классификации Эбенфельта имеется еще пять видов ростков. Это 2-невырожденные ростки, чья форма Леви обращается в нуль в центре ростка. Эти ростки, в точке общего положения, обязаны иметь форму Леви ранга не ниже единицы и, поэтому для получения оценки на размерность группы нам нет нужды рассматривать их отдельно. Однако каждый из этих пяти ростков допускает, при правильной расстановке весов, запись в виде (1). Поэтому можно утверждать, что размерности подалгебр соответствующих модельных поверхностей мажорируют размерности стабилизаторов точки в группах ростков.

Вернемся к обсуждению ростков вида (II). Чтобы получить оценку можно, конечно, поступить так. Положить $[z] = [\zeta] = 1,\ [w] = 2$ и тогда уравнение запишется в виде

$$v = |z|^2 + O(3) \tag{2}$$

и можно оценивать размерность стабилизатора нуля через размерность стабилизатора нуля гиперповерхности $v = |z|^2$, но беда в том, что она равна бесконечности. Второй вариант - это двухшаговая редукция. Сначала ввести веса, как это сделано выше, записать поверхность в виде (2) и явно описать функциональные параметры из бесконечномерной алгебры Ли поверхности $v = |z|^2$, которые будут однозначно определять отображение ростка вида (2) в другой такой же росток. А затем, на втором шаге, воспользоваться тем, что компонента уравнения веса три отлична от нуля (несферичность), имеет известный вид $F_3 = (z^2\bar{\zeta} + \bar{z}^2\,\zeta)$ и получить новые ограничения на эти параметры.

Однако есть еще одна возможность, которой мы и воспользуемся. Можно процесс рекуррентного вычисления строить с привязкой не к самому младшему члену уравнения гиперповерхности а к двум младшим, квадратичному и кубическому в данном случае.

Итак, задаем градуировку, назначая $[z] = [\zeta] = 1,\ [w] = 2$. Пусть имееются две гиперповерхности

$$\begin{aligned} v &= |z|^2 + (z^2\bar{\zeta} + \bar{z}^2\,\zeta) + \sum_4^\infty F_j(z, \bar{z}, \zeta, \overline{\zeta}, u), \\ v &= |z|^2 + (z^2\bar{\zeta} + \bar{z}^2\,\zeta) + \sum_4^\infty \tilde{F}_j(z, \bar{z}, \zeta, \overline{\zeta}, u) \end{aligned} \tag{3}$$

И отображение первой во вторую вида

$$\begin{aligned} z &\to z + \sum_3^\infty f_j(z, \zeta, w), \\ \zeta &\to \zeta + \sum_2^\infty g_j(z, \zeta, w), \\ w &\to w + \sum_4^\infty h_j(z, \zeta, w) \end{aligned} \tag{4}$$

Если координату w в отображении (4) ограничить на первую гиперповерхность, то его значения будут удовлетворять уравнению второй гиперповерхности и мы получаем некоторое соотношение в степенных рядах. Введем обозначения $w_2 = u + i|z|^2, \quad w_3 = 2i\,\mathrm{Re}(z^2\overline{\zeta} + \bar{z}^2\,\zeta)$. Определим линейный оператор вида

$$L(f,g,h) = -\,\mathrm{Im}\,h(z,\zeta,w_2) + 2\,\mathrm{Re}(f(z,\zeta,w_2)\bar{z} + g(z,\zeta,w_2)\bar{z}^2)$$
$$DL(f,g,h) = -\,\mathrm{Im}(h'_w(z,\zeta,w_2)w_3) + 2\,\mathrm{Re}(f'_w(z,\zeta,w_2)\bar{z}w_3 + g'_w(z,\zeta,w_2)\bar{z}^2w_3)$$

тогда m-я компонента нашего соотношения имеет вид

$$L(f_{m-1},g_{m-2},h_m) + DL(f_{m-2},g_{m-3},h_{m-1}) = \dots$$

где точками обозначено выражение, зависящее лишь от компонент отображения меньших весов. Поэтому можно утверждать, что размерность множества решений (число свободных параметров) в классе отображений вида (4) не превосходит размерности линейного пространства решений однородной системы

$$\mathcal{L}(f,g,h) = L(f,g,h) + DL(f,g,h) = 0 \qquad (5)$$

Вычислим ядро опрератора $\mathcal{L}$.

Предложение 3 *Решение этого однородного линейного уравнения одномерно и имеет следующий вид* $\mathrm{Ker}\mathcal{L} = \{f = 0, \ g = 0, \ h = c\}$, *где* c *- вещественная постоянная.*

Доказательство: Полагая в (5) $\bar{z} = 0$ видим, что h не зависит от ζ. Дифференцируя это соотношение по $\bar{z}$ и полагая $\bar{z} = 0$ видим, что f не зависит от ζ. Дифференцируя его по $\bar{z}$ дважды и полагая $\bar{z} = 0$ видим, что и g не зависит от ζ. Теперь соотношение можно записать так

$$2\,\mathrm{Re}(T(z,\bar{z},w_2) + i(z^2\overline{\zeta} + \bar{z}^2\,\zeta)T'_w(z,\bar{z},w_2) = 0$$

где $T = ih + 2f\bar{z} + 2g\bar{z}^2$. Это, после дифференцирования по ζ, дает $\mathrm{Re}\,T'_w = 0$, откуда получаем, что $T'_w = 0$ и, следовательно, f, g, h не зависят от w. Теперь уравнение принимает вид $\mathrm{Re}\,T = 0$, откуда и получаем окончательное описание ядра.

Рассмотрим произвольное локально обратимое голоморфное отображение между ростками (3), сохраняющее начало координат на месте.

$$z \to \sum_1^\infty f_j(z,\zeta,w), \quad \zeta \to \sum_1^\infty g_j(z,\zeta,w), \quad w \to \sum_1^\infty h_j(z,\zeta,w)$$

Анализ младших компонент возникающего при этом соотношения показывает, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 4 *(a) Преобразование* $z \to \lambda z, \quad \zeta \to \lambda(\overline{\lambda})^{-1}\zeta, \quad w \to \lambda\overline{\lambda}w$ *где* λ *ненулевое комплексное число, является автоморфизмом гиперповерхности* Q^2 *и сохраняет вид ростка (3);*
(b) любое преобразование сохраняющее вид уравнения (3), т.ч. $f'_z(0,0,0) = 1$ *имеет вид* $z \to z + aw + (2i\bar{a} - \bar{\mu})z^2 + O(3), \quad \zeta \to \mu z + \zeta + O(2), \quad w \to w + 2i\bar{a}zw + O(4)$*, где* a *и* μ *произвольные комплексные параметры;*
(c) любое обратимое преобразование сохраняющее вид уравнения (3) и начало координат можно однозначно представить в виде композиции преобразований вида (a) и (b) из данного утверждения, а затем вида (4).

В итоге мы получаем следующее предложение

Предложение 5 *Размерность подгруппы автоморфизмов ростка гиперповерхности вида (II), сохраняющих точку не превосходит шести.*

Размерность всей локальной группы автоморфизмов гиперповерхности вида (II) не превосходит 5+6=11-ти.

И это позволяет сформулировать окончательный результат, который доказывает нашу гипотезу для $\mathbf{C}^3$ в следующей уточненной форме.

Теорема 6 *Если росток вещественно аналитической гиперповерхности в* $\mathbf{C}^3$ *не является ни Леви-плоским (размерность группы равна бесконечности), ни сферическим (размерность равна 15-ти), то размерность его локальной группы автоморфизмов не превосходит 11-ти. Если же известно, что росток в общей точке не есть росток вида (II), то размерность группы не превосходит 6-ти.*

Световой конус $S = \{(\operatorname{Im} w)^2 = (\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Im}\zeta)^2\}$, который послужил поводом для данной работы, - это трубчатая поверхность над квадратичным конусом в $\mathbf{R}^3$. Можно показать, что локальные автоморфизмы этой гиперповерхности продолжаются до глобальных и, в частности, в окрестность острия. Если задать градуировку полей условиями $[z] = [\zeta] = [w] = 1$, то видно, что алгебра конуса - $\mathrm{aut}\, S_0$ имеет следующую градуированную структуру $g_{-1} + g_0 + g_1$. При этом $g_{-1} = \{2\,\mathrm{Re}(a_1 \frac{\partial}{\partial z} + a_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + a_3 \frac{\partial}{\partial w})\}$, где $a \in \mathbf{R}^3$. Эта подалгебра соответствует группе вещественных параллельных переносов. g_0 - это подалгебра, соответствующая подгруппе линейных преобразований S, т.е. подгруппе конформных преобразований, порожденных вещественными преобразованиями, сохраняющими квадратичную форму $-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ и вещественными скалярными растяжениями. Подалгебра g_1 изоморфно отображается на g_{-1} при инверсии $(z, \zeta, w) \mapsto (z, \zeta, w)/(-z^2 - \zeta^2 + w^2)$. Соответствующая подгруппа порождается инверсией и переносами, т.е. состоит из инверсий с центрами в произвольных точках острия. Итого, размерность группы действительно равна 3+(3+1)+3=10.

Конус в $\mathbf{R}^3$ - это линейчатая поверхность (1-параметрическое семейство вещественных прямых), а наша трубка в $\mathbf{C}^3$ - это семейство комплексных прямых, параметризованное 3-мя вещественными параметрами. То, что через каждую точку S проходит комплексная прямая, позволяет заключить, что форма Леви имеет ранг не выше единицы. Если бы этот ранг был равен нулю, то гиперповерхность была бы локально плоской, т.е. локально голоморфно эквивалентной вещественной гиперплоскости, и тогда наше 3-параметрическое семейство комплексных прямых было бы локально голоморфно эквивалентно 1-параметрическому семейству 2-мерных комплексных плоскостей, т.е. было бы распрямляемо, а группа автоморфизмов была бы бесконечномерной. Но это не так. Группа конечномерна, семейство не распрямляемо, а форма имеет ранг один [4].

В заключение два вопроса.

Полученная оценка - одиннадцать - на единицу отличается от имеющегося примера с десятимерной группой. Этот досадный зазор оставляет открытым вопрос о точной оценке. В отличие от оценки на размерность групп автоморфизмов гиперповерхностей, которые в общей точке не принадлежат виду(II). Как было показано выше, для них оценка 6 является точной.

И второй. Является ли световой конус единственной локально однородной гиперповерхностью в $\mathbf{C}^3$ с формой ранга один или же есть и другие? Как известно [2], локально однородных невырожденных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^3$ - очень много, как положительно определенных, так и знаконеопределенных. С другой стороны, единственной однородной гиперповерхностью с формой ранга нуль является гиперплоскость.

Список литературы

[1] Chern S.S., Moser J.K., Real hypersurfaces in complex manifold, Acta Math.(1974) V.133, No.3-4, P.219-271.

[2] Лобода А.В., Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbf{C}^3$ с двумерными группами изотропии, труды МИАН им.А.В.Стеклова, т.235, С.114-142, 2001, сборник к юбилею А.Г.Витушкина.

[3] Ершова А.Е. Автоморфизмы 2-невырожденных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^3$, Мат.заметки, т.69, в.2, 2001, С.214-222.

[4] Владимиров В.С., Сергеев А.Г., Комплексный анализ в трубе будущего, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.8, (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) М., 1985, С.191-266.

[5] P. Ebenfelt, Normal forms and biholomorphic equivalence of real hypersurfaces in C^3, 1998, preprint.

[6] Белошапка В.К., Вещественные подмногообразия комплексного пространства их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации, Успехи мат.наук, 2002, т.57, N 1, С.3-44.

[7] Белошапка В.К., Универсальная модель вещественного подмногообразия, Матем.заметки, т.75, № 4, С.507, 2004.

[8] Белошапка В.К., Ежов В.В., Шмальц Г. Голоморфная классификация четырехмерных поверхностей в $\mathbf{C}^3$ Известия АН, серия матем., 2004, принято к печати.