В. К. Белошапка, Функции, плюригармонические на многообразии, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1978, том 42, выпуск 3, 475–483

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 42, № 3, 1978

УДК 517.5

В. К. БЕЛОШАПКА

ФУНКЦИИ, ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИЕ НА МНОГООБРАЗИИ

1. Введение. Пусть $u(z_1, \ldots, z_N)$ — плюригармоническая в области $D \subset \mathbf{C}^N$ функция, т. е. $u \in C^2(D)$ и удовлетворяет в этой области системе уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} = 0, \quad p, q = 1, \ldots, N.$$

Легко проверить, что вещественная часть любой голоморфной в D функции плюригармонична в D. Известно также ([1]), что для всякой функции u, плюригармонической в односвязной области, найдется функция v такая, что $f = u + iv$ будет голоморфна в ней.

Для дальнейшего нам понадобится следующее

Определение 1. Пусть M есть многообразие класса C^1, u — функция на M. Будем называть u функцией, плюригармонической на M, если в некоторой окрестности каждой точки $\xi \in M$ существует функция v такая, что $f = u + iv$ является в этой окрестности CR-функцией, т. е. удовлетворяет касательным уравнениям Коши — Римана (см. (6)).

Это определение представляется нам естественным, так как если M — подмногообразие D, а $\hat{u}$ — сужение на M функции u, плюригармонической в D, то $\hat{u}$ будет плюригармонична на M.

В работах ([2]) и ([3]) приводятся условия, обеспечивающие плюригармоничность функции на сфере.

Авторы работы ([4]) показали, что для плюригармоничности функции $\hat{u}$ на гиперповерхности Γ необходимым и достаточным является существование функции α такой, что

$$d\rho \wedge d^c\rho \wedge dd^c u = \alpha\, d\rho \wedge d^c\rho \wedge dd^c\rho,$$

$$d\rho \wedge dd^c u = d\rho \wedge d\alpha \wedge d^c\rho + \alpha\, d\rho \wedge dd^c\rho,$$

где ρ — функция, определяющая гиперповерхность, т. е. $\Gamma = \{\rho = 0\}$, d и d^c — вещественная и мнимая части оператора $\bar{\partial}$, а u есть какое-либо продолжение $\hat{u}$ в окрестность Γ.

Здесь будет показано, что класс функций, плюригармонических на многообразии произвольной коразмерности, можно охарактеризовать как совокупность решений некоторой системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Наш подход отличается от подхода, использованного в работе ([4]), главным образом тем, что он не связан с конкретным вложением многообразия в комплексное пространство, а использует лишь CR-структуру на нем. Задача, как и в случае одного комплексного переменного, состоит в исключении мнимой части функции из уравнений Коши — Римана.

Мы покажем, что при довольно общих предположениях относительно многообразия M это сделать можно. Полученная система довольно громоздка в своем общем виде, но в ряде частных случаев получает компактную запись. Такая запись возможна, если многообразие обладает некоторой системой векторных полей с простыми коммутационными соотношениями. Порядок этой системы зависит от многообразия M. Если M — семейство комплексно аналитических многообразий, то этот порядок равен двум. Для гиперповерхности с невырожденной формой Леви он равен трем. В общем же случае он может быть сколь угодно высок.

Наконец отметим, что если M является границей строго псевдовыпуклой области Ω, то наши условия — это, по сути дела, условия, обеспечивающие возможность продолжения u до функции, плюригармонической в Ω.

2. Определения и подготовительные утверждения. Прежде чем перейти к дальнейшему, договоримся о следующем. Все многообразия, функции и векторные поля мы будем предполагать бесконечно дифференцируемыми, а многообразия, кроме того,— вложенными в комплексное пространство; особо оговаривать это мы не будем.

Пусть M — многообразие размерности d, $T_\xi M$ — касательное пространство в точке ξ, а $H_\xi M$ — его комплексная часть, т. е. $H_\xi M = T_\xi M \cap \cap J(T_\xi M)$, где J — оператор умножения на i в касательном расслоении объемлющего комплексного пространства.

Обозначим через LM совокупность векторных полей X на M таких, что $X(\xi) \in H_\xi M$ для всех $\xi \in M$. Пусть $K = \mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$.

Определение 2. Набор векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ на M мы будем называть системой K-образующих LM, если выполняются следующие эквивалентные условия:

(α) для любой точки $\xi \in M$ K-линейная оболочка $\{X_1(\xi), \ldots, X_n(\xi)\}$ совпадает с $H_\xi M$;

(β) для любого поля $X \in LM$ существует набор K-значных функций $f_1, \ldots, f_n$ таких, что $X = \sum_{k=1}^{n} f_k X_k$.

Если $X_1, \ldots, X_n$ — система $\mathbf{C}$-образующих LM, то $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$, где $Y_k = JX_k$, есть система $\mathbf{R}$-образующих LM. Далее, в любой координатной окрестности D произвольного многообразия M, очевидно, имеются системы K-образующих для LD.

Рассмотрим расширяющуюся последовательность линейных пространств

$$L^0 = LM, L^1 = L^0 + [L^0, L^0], \ldots, L^{p+1} = L^p + [L^p, L^p], \ldots,$$

где L^{p+1} образовано полями вида $Z+[X, Y]$, причем $X, Y, Z \in L^p$, а $[X, Y] = XY - YX$ — коммутаторная скобка. Положим $L^p(\xi) = \{\tau \in T_\xi M : \tau = X(\xi)$ для какого-либо $X \in L^p\}$. Отметим, что $L^0(\xi) = H_\xi M$ и что M является CR-многообразием, если $\dim L^0(\xi) = \mathrm{const}$. В связи с этим приведем следующее

Определение 3. Многообразие M назовем CR-многообразием порядка p, если $\dim L^p(\xi)$ не зависит от ξ.

Определение 4. Многообразие M будем называть q-стабильным, если цепочка $L^0 \subset L^1 \subset \ldots$ стабилизируется, начиная с q-го места, т. е. $L^q = L^{q+1} = \ldots$, но для $p < q$ $L^p \neq L^{p+1}$.

Предложение 1. *Пусть многообразие M q-стабильно. Тогда*:

(α) *L^q есть алгебра Ли относительно операции* [,];

(β) *если $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ — система $\mathbf{R}$-образующих $LM = L^0$, то существует система $\mathbf{R}$-образующих L^q вида $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, \Theta_1, \ldots, \Theta_m$, где поля $\Theta_1, \ldots, \Theta_m$ получены из полей $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots \ldots, Y_n$ с помощью операций сложения и взятия скобки*;

(γ) *максимальная длина цепочек вложенных скобок вида* [[[ ]]] *в выражении Θ_k через $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ равна q.*

Утверждение (α) непосредственно следует из определения, утверждения (β) и (γ) доказываются индукцией по p.

Мы будем писать $\Theta_k = P_k(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$, где P_k — схема расстановки скобок и полей. Например,

$$\Theta_2 = [[X_1, Y_1], [X_2, Y_2]].$$

Отметим, что из (γ) следует, что формальный порядок P_k как дифференциального оператора не превосходит 2^q. Под формальным порядком оператора мы понимаем число последовательных дифференцирований в его записи через скобки, т. е. $[X_1, Y_1]$ имеет порядок два, $[[X_1 Y_1], [X_2 Y_2]]$ — четыре, $[X_1[X_2 Y_3]]$ — три и т. д.

Предложение 2. *Пусть M есть q-стабильное CR-многообразие порядка q размерности d и $r = \dim L^q(\xi)$. Тогда у каждой точки $\xi \in M$ есть окрестность D, в которой*

$$M \cap D = \bigcup_{t \in \mathbf{R}^{d-r}} M_t,$$

где $M_{t_1} \cap M_{t_2} = \varnothing$ при $t_1 \neq t_2$ и каждое M_t является многообразием, причем имеет место следующее условие согласованности:

$$H_\xi M_t = H_\xi M \text{ для любой точки } \xi \in M_t. \qquad \text{(S)}$$

Доказательство. Из утверждения (α) предложения 1 следует, что L^q есть вполне интегрируемая дифференциальная система размерности r. Применяя теорему Фробениуса [см. ([5])], получаем, что в окрестности D произвольной точки многообразие M расслаивается на $(d-r)$-параметрическое семейство интегральных многообразий M_t, причем $T_\xi M_t = L^q(\xi)$. Но

$$H_\xi M = L^0(\xi) \subset L^q(\xi) \cap J(L^q(\xi)) \subset T_\xi M \cap J(T_\xi M) = H_\xi M,$$

поэтому

$$L^q(\xi) \cap J(L^q(\xi)) = H_\xi M,$$

а это и значит, что имеет место свойство (S). ▼

В качестве следствия получаем известный результат.

Следствие. *Пусть Γ — гиперповерхность в $\mathbf{C}^N$, чья форма Леви тождественно равна нулю, тогда Γ локально расслаивается на комплексные гиперповерхности.*

Предложение 3. *Пусть M и D — те же, что и в предложении 2. Тогда функция и плюригармонична на $M \cap D$ в том и только в том случае, когда и плюригармонична на каждом многообразии M_t.*

Доказательство. Из (S) следует, что функция f является CR-функцией на $M \cap D$ в том и только том случае, когда f есть CR-функция на каждом многообразии M_t. После этого утверждение непосредственно следует из определения 1. ▼

Предложение 3 показывает, что основным для нашего исследования будет тот случай, когда $r=d$.

Определение 5. Назовем многообразие M невырожденным порядка q, если M есть CR-многообразие порядка q и $L^q(\xi) = T_\xi M$ для всех $\xi \in M$.

Покажем, что невырожденность многообразия в смысле формы Леви влечет за собой невырожденность порядка один.

Форма Леви многообразия M определяется так. Пусть $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ — система $\mathbf{R}$-образующих LM, а векторные поля $\Theta_1, \ldots, \Theta_m$ образуют дополнительную систему, т. е. $X_1(\xi), \ldots, X_n(\xi), Y_1(\xi), \ldots \ldots, Y_n(\xi), \Theta_1(\xi), \ldots, \Theta_m(\xi)$ есть базис в $T_\xi M$ для всех $\xi \in M$. Положим тогда

$$\mathscr{L}(X, X) = \pi([X, JX]),$$

где $X \in LM$ и π есть проекция $T_\xi M$ на подпространство $N_\xi M$, порожденное $\Theta_1(\xi), \ldots, \Theta_m(\xi)$.

Предложение 4. *Если $NM \subset LM + \mathscr{L}(LM)$, т. е. форма Леви во всех точках невырожденна, и $NM \neq 0$, то M невырождено порядка один.*

Доказательство. По условию $\Theta_k = X + \pi([Y, JY])$, где $X, Y \in \in LM$, но $[Y, JY] = \pi([Y, JY]) + X'$, где $X' \in LM$, поэтому $\Theta_k = X - X' + + [Y, JY]$, т. е. $\Theta_k \subset L^1$, а это значит, что $L^1(\xi) = T_\xi M$.

Примеры. (α) Пусть M_1 есть комплексно аналитическое многообразие, т. е. $T_\xi M = H_\xi M$. Тогда M_1 невырождено порядка нуль.

(β) Пусть M_2 есть гиперповерхность в $\mathbf{C}^N$ с формой Леви, невырожденной во всех точках. Тогда порядок невырожденности равен единице.

3. Основной результат.

ТЕОРЕМА. *Пусть M есть CR-многообразие размерности d и CR-размерности n. Пусть LM обладает системой* **C**-*образующих $X_1, \ldots, X_n$. Пусть, далее, порядок невырожденности M равен q. Тогда на M существует система линейных дифференциальных уравнений (она будет выписана нами в процессе доказательства, см.* (10)), *порядок которой не превышает* 2^q+1, *состоящая из* $\frac{d(d-1)}{2}$ *уравнений и такая, что ее решениями будут плюригармонические на M функции и только они.*

Разберем сначала одно вспомогательное утверждение о векторных полях на M.

Пусть M — многообразие размерности d; $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — система векторных полей, линейно независимая в каждой точке, $\alpha^1, \ldots, \alpha^d$ — набор функций на M. Пусть, далее,

$$[\chi_i, \chi_j] = \sum_{k=1}^{d} c_{ij}^k \chi_k. \qquad (1)$$

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию v на M такую, что

$$\chi_k v = \alpha^k, \qquad k=1, \ldots, d. \qquad (2)$$

ЛЕММА. *Пусть $H^1(M, \mathbf{R})=0$, где $H^1(M, \mathbf{R})$ — одномерные когомологии M с вещественными коэффициентами. Тогда система равенств*

$$\chi_i \alpha^j - \chi_j \alpha^i = \sum_{k=1}^{d} c_{ij}^k \alpha^k, \quad i, j = 1, \ldots, d; \quad i < j, \qquad (3)$$

является необходимым и достаточным условием существования решения задачи (2).

Доказательство. Необходимость. Пусть v — решение задачи (2). Применяя χ_i и χ_j к j-му и i-му равенствам (2) соответственно, а затем вычитая одно из другого, получим:

$$\chi_i \alpha^j - \chi_j \alpha^i = [\chi_i, \chi_j] v.$$

Подставляя сюда (1), а затем (2), получим (3).

Достаточность. Определим 1-форму ω на M, полагая $\omega(\chi_k)=\alpha^k$. Покажем, что (3) есть условие ее замкнутости. Для всякой 1-формы Ω и для любых векторных полей X и Y на M справедливо равенство [см. ([6])]:

$$2d\Omega(X, Y) = X\Omega(Y) - Y\Omega(X) - \Omega([X, Y]),$$

которое для формы ω с использованием (3) дает $d\omega=0$. Но в силу условия $H^1(M, \mathbf{R})=0$ это означает, что $\omega=dv$ для некоторой функции v, которая будет решением нашей задачи, так как $\chi_k v = dv(\chi_k) = \omega(\chi_k) = \alpha^k$. ▼

Замечание. Если $H^1(M, \mathbf{R}) \neq 0$, то (3) есть условие, обеспечивающее локальное существование решения задачи (2).

Доказательство теоремы. Положим $Y_k = JX_k$. В силу утверждения (β) предложения 1, L^q обладает системой $\mathbf{R}$-образующих вида $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, \Theta_1, \ldots, \Theta_m$, где

$$\Theta_k = P_k(X, Y), \tag{4}$$

причем в силу того, что M невырождено порядка q,

$$2n + m = d. \tag{5}$$

Пусть $f = u + iv$ есть CR-функция на M, т. е. f удовлетворяет системе касательных уравнений Коши — Римана, которую мы запишем так:

$$\begin{matrix} X_p v = -Y_p u \\ Y_p v = X_p u \end{matrix} \quad (p = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Обозначив производную по направлению Θ_k через β_k, добавим к (6) m тавтологических равенств:

$$\Theta_k v = \beta_k, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

При фиксированной функции u равенства (6) и (7), ввиду (5), можно рассматривать как задачу (2) относительно функции v. А так как условие плюригармоничности функции u эквивалентно (см. определение 1) локальной разрешимости этой задачи, то (3) в данном случае дает аналитическую запись этого условия. Чтобы записать его в наших терминах, переобозначим функции c_{ij}^k следующим образом:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n A_{ij}^{1k} X_k + \sum_{k=1}^n A_{ij}^{2k} Y_k + \sum_{k=1}^m A_{ij}^{3k} \Theta_k,$$

$$[X_i, Y_j] = \sum_{k=1}^n B_{ij}^{1k} X_k + \sum_{k=1}^n B_{ij}^{2k} Y_k + \sum_{k=1}^m B_{ij}^{3k} \Theta_k,$$

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^{1k} X_k + \sum_{k=1}^n C_{ij}^{2k} Y_k + \sum_{k=1}^m C_{ij}^{3k} \Theta_k,$$

$$[X_i, \Theta_j] = \sum_{k=1}^n D_{ij}^{1k} X_k + \sum_{k=1}^n D_{ij}^{2k} Y_k + \sum_{k=1}^m D_{ij}^{3k} \Theta_k,$$

$$[Y_i, \Theta_j] = \sum_{k=1}^n E_{ij}^{1k} X_k + \sum_{k=1}^n E_{ij}^{2k} Y_k + \sum_{k=1}^m E_{ij}^{3k} \Theta_k,$$

$$[\Theta_i, \Theta_j] = \sum_{k=1}^n F_{ij}^{1k} X_k + \sum_{k=1}^n F_{ij}^{2k} Y_k + \sum_{k=1}^m F_{ij}^{3k} \Theta_k.$$

Условия (3) для задачи (5), (6) теперь примут вид:

$$-X_i Y_j u + X_j Y_i u = \sum_{k=1}^n A_{ij}^{1k} (-Y_k u) + \sum_{k=1}^n A_{ij}^{2k} X_k u + \sum_{k=1}^n A_{ij}^{3k} \beta_k,$$

$$
\begin{aligned}
X_iX_ju+Y_jY_iu&=\sum_{k=1}^{n}B_{ij}^{1k}(-Y_ku)+\sum_{k=1}^{n}B_{ij}^{2k}X_ku+\sum_{k=1}^{m}B_{ij}^{3k}\beta_k,\\
Y_iX_ju-Y_jX_iu&=\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{1k}(-Y_ku)+\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{2k}X_ku+\sum_{k=1}^{m}C_{ij}^{3k}\beta_k,\\
X_i\beta_j+\Theta_jY_iu&=\sum_{k=1}^{n}D_{ij}^{1k}(-Y_ku)+\sum_{k=1}^{n}D_{ij}^{2k}X_k+\sum_{k=1}^{m}D_{ij}^{3k}\beta_k,\\
Y_i\beta_j-\Theta_jX_iu&=\sum_{k=1}^{n}E_{ij}^{1k}(-Y_ku)+\sum_{k=1}^{n}E_{ij}^{2k}X_k+\sum_{k=1}^{m}E_{ij}^{3k}\beta_k,\\
\Theta_i\beta_j-\Theta_j\beta_i&=\sum_{k=1}^{n}F_{ij}^{1k}(-Y_ku)+\sum_{k=1}^{n}F_{ij}^{2k}X_k+\sum_{k=1}^{m}F_{ij}^{3k}\beta_k.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Равенства (4) позволяют выразить β_k через u:

$$\beta_k=\Theta_kv=Q_ku, \tag{9}$$

где порядок дифференциального оператора Q_k равен формальному порядку P_k. Например, если $\Theta_1=[X_1, Y_1]$, то $\beta_1=(X_1^2+Y_1^2)\,u$. Подставляя (9) в (8), получаем окончательно:

$$
\begin{aligned}
(-X_iY_j+X_jY_i)\,u&=-\sum_{k=1}^{n}A_{ij}^{1k}X_ku+\sum_{k=1}^{n}A_{ij}^{2k}X_ku+\sum_{k=1}^{m}A_{ij}^{3k}Q_ku,\\
(X_iX_j+Y_jY_i)\,u&=-\sum_{k=1}^{n}B_{ij}^{1k}Y_ku+\sum_{k=1}^{n}B_{ij}^{2k}X_ku+\sum_{k=1}^{m}B_{ij}^{3k}Q_ku,\\
(Y_iX_j-Y_jX_i)\,u&=-\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{1k}Y_ku+\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{2k}X_ku+\sum_{k=1}^{m}C_{ij}^{3k}Q_ku,\\
(X_iQ_j+\Theta_jY_i)\,u&=-\sum_{k=1}^{n}D_{ij}^{1k}Y_ku+\sum_{k=1}^{n}D_{ij}^{2k}X_ku+\sum_{k=1}^{m}D_{ij}^{3k}Q_ku,\\
(Y_iQ_j-\Theta_jX_i)\,u&=-\sum_{k=1}^{n}E_{ij}^{1k}Y_ku+\sum_{k=1}^{n}E_{ij}^{2k}X_ku+\sum_{k=1}^{m}E_{ij}^{3k}Q_ku,\\
(\Theta_iQ_j-\Theta_jQ_i)\,u&=-\sum_{k=1}^{n}F_{ij}^{1k}Y_ku+\sum_{k=1}^{n}F_{ij}^{2k}X_ku+\sum_{k=1}^{m}F_{ij}^{3k}Q_ku.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Из утверждения (γ) предложения 1 следует, что порядок оператора Q_k не превосходит 2^q, поэтому порядок системы (10) не превосходит 2^q+1. ▼

З а м е ч а н и е 1. $\frac{d(d-1)}{2}$ уравнений (10) не являются, вообще говоря, независимыми.

С л е д с т в и е. *Пусть M — то же, что в теореме, и пусть оно дополнительно удовлетворяет требованиям из предложения 4. Тогда на M*

существует система линейных дифференциальных уравнений 3-го порядка, состоящая из $\frac{d(d-1)}{2}-(d-2n)$ *уравнений такая, что ее решения и только они являются функциями, плюригармоническими на* M.

Доказательство — то же, что и для основной теоремы, но со следующими изменениями:

1°. Поля Θ_k можно выбрать вида $\Theta_k=[X_{i_k}, Y_{i_k}]$ и тогда

$$\beta_k=(X_{i_k}^2+Y_{i_k}^2)\,u. \tag{11}$$

2°. Уравнение из (8), соответствующее разложению $[X_{i_k}, Y_{i_k}]$ по базисным полям, будет совпадать с (11), поэтому при подстановке в него (11) оно обратится в тождество. ▼

Замечание 2. Все вышеизложенные результаты можно формулировать и доказывать в предположении той или иной гладкости конечного порядка относительно фигурирующих в них многообразий, функций и векторных полей. Например, для справедливости следствия из теоремы достаточно трехкратной дифференцируемости многообразия.

4. Гиперквадрики. Пусть $z^1, \ldots, z^n$, $w=x+iy$ — координаты в $\mathbf{C}^{n+1}$. Гиперквадрика — это гиперповерхность Q вида

$$y=\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq}z^p\overline{z^q},$$

где $h_{pq}=\overline{h}_{qp}$ и $\det(h_{pq})\neq 0$.

Сфера $S=\{z_1\bar z_1+\ldots+z_n\bar z_n+w\bar w=1\}$ без одной точки биголоморфно эквивалентна гиперквадрике $\{y=z_1\bar z_1+\ldots+z_n\bar z_n\}$ [см. ([7])].

Рассмотрим подгруппу группы автоморфизмов Q, состоящую из отображений $g_{(a,b)}: Q\to Q$, где $g_{(a,b)}$ есть преобразование вида

$$\begin{aligned} z^{*p}&=a^p+z^p,\\ w^*&=b+2i\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq}z^p\bar z^q+w, \end{aligned} \tag{12}$$

причем $(a^1, \ldots, a^n, b)\in Q$.

Вычисляя скобку двух векторных полей

$$X(a, b)=\overset{*}{g}_{(a,b)}(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}),$$

$$Y(a, b)=\overset{*}{g}_{(a,b)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}),$$

получаем:

$$[X, Y]=4\,\mathrm{Im}\left(\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq}e_p\bar\lambda_q\right)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Используя это равенство, мы можем выбрать векторные поля $X_1, \ldots, X_n$, являющиеся системой $\mathbf{C}$-образующих LQ со следующими коммутационными соотношениями:

$$[X_i, X_j]=0, \qquad i, j=1, \ldots, n.$$

Положим $Y_k = JX_k$, $\Theta = 4\dfrac{\partial}{\partial x}$; тогда

$$[Y_i Y_j] = [\Theta X_i] = [\Theta Y_i] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$
$$[X_i Y_j] = \varepsilon_{ij}\Theta,$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ \pm 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Таким образом, система (10) принимает вид:

$$X_p Y_q u = X_q Y_p u, \quad Y_p X_q u = Y_q X_p, \quad p < q,$$
$$(X_p X_q + Y_q Y_p)\, u = 0, \quad p \neq q,$$
$$(X_p^2 + Y_p^2) = \sigma_{pq}\,(X_q^2 + Y_q^2)\, u, \quad \sigma_{pq} = \pm 1,$$
$$Y_p\,(X_1^2 + Y_1^2)\, u = \Theta X_p u,$$
$$X_p\,(X_1^2 + Y_1^2)\, u = -\Theta Y_p u.$$

В заключение рассмотрим совсем частный случай. Пусть S — сфера или ее открытый кусок в $\mathbf{C}^2$. На S существует три векторных поля X, Y и Θ таких, что $X(\xi)$ порождает над $\mathbf{C}$ $H_\xi S$, причем

$$[Y, \Theta] = X, \quad [\Theta, X] = Y, \quad [X, Y] = \Theta$$

[см. ([8])].

С помощью этих полей систему (10) можно записать так:

$$X\Delta u = -Y\Theta u,$$
$$Y\Delta u = X\Theta u,$$

где $\Delta = X^2 + Y^2$.

Поступило
20.X.1977

Литература

1. **Шабат Б. В.**, Введение в комплексный анализ, ч. II, М., «Наука», 1976.
2. **Bedford E.**, The Dirichlet problem for some overdetermined system on the unit ball in $\mathbf{C}^n$, Pacific J. Math., 51, № 1 (1974), 312—337.
3. **Lavill G.**, Sur les diviseurs de la class de Nevanlinna dans la boul de $\mathbf{C}^2$, Comptes Rendus, 281 : 4 (1975), 145—169.
4. **Bedford E., Federbush P.**, Pluriharmonic boundary values, Tôhoku Math. J., 26 (1974), 76—81.
5. **Стернберг С.**, Лекции по дифференциальной геометрии, М., «Мир», 1970.
6. **Номидзу К.**, Группы Ли и дифференциальная геометрия, М., ИЛ, 1960.
7. **Chern S. S., Moser J. K.**, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math., 133 (1974), 219—271.
8. **Туманов А. Е.**, О граничных значениях голоморфных функций нескольких комплексных переменных, Успехи матем. наук, т. 29, вып. 4 (1974), 370—377.