ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2006, т. 253, с. 7–13

УДК 517.55+514.748

Теорема Витушкина о ростке для CR-многообразий энгелева типа[1]

©2006 г. В. К. Белошапка[2], В. В. Ежов[3], Г. Шмальц[4]

Поступило в октябре 2005 г.

Изучаются вещественно аналитические CR-многообразия CR-размерности один и коразмерности два в трехмерном комплексном пространстве. Доказывается, что росток голоморфного отображения "несферического" многообразия в другое такое многообразие продолжается по любым путям (аналог теоремы Витушкина о ростке). Для кубической модельной поверхности ("сферы") доказан аналог теоремы Пуанкаре об отображении сфер в $\mathbb{C}^2$. Построен пример компактного "сферического" подмногообразия компактного трехмерного комплексного пространства такого, что росток отображения "сферы" в это подмногообразие не продолжается в некоторую точку "сферы".

1. ВВЕДЕНИЕ

Если поместить гладкое d-мерное вещественное многообразие M в N-мерное комплексное пространство, то в результате этого вложения в каждой точке ξ многообразия возникает выделенное подпространство $T_\xi^{\mathrm{CR}}M = T_\xi M \cap iT_\xi M$ касательного пространства $T_\xi M$. Мы будем предполагать, что вложение порождающее, т.е. комплексная оболочка $T_\xi M$ совпадает с касательным пространством объемлющего пространства $\mathbb{C}^N$, в частности, CR-размерность $n = \dim_{\mathbb{C}} T_\xi^{\mathrm{CR}}M$ не зависит от точки ξ, при этом $N = d - n$. Число $k = d - 2n = N - n$ называется CR-коразмерностью и одновременно является коразмерностью $T_\xi^{\mathrm{CR}}M$ в $T_\xi M$ и коразмерностью вложения. Росток CR-размерности n и коразмерности k будем называть ростком типа (n, k). В этой работе мы изучаем CR-многообразия типа $(1, 2)$, которым также посвящены работы [4–6]. Этот тип многообразий примечателен тем, что, несмотря на вырожденность формы Леви в традиционном смысле, многообразия в общем положении можно рассматривать как деформации модельной поверхности $C \subset \mathbb{C}^3_{(z,w_2,w_3)}$ вида $\{\operatorname{Im} w_2 = |z|^2, \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re} z^2\bar{z}\}$ (см. [4]). Вместо условия невырожденности, которое требует, чтобы сечения $T^{\mathrm{CR}}M$ и их коммутаторы порождали всё TM (что невозможно из-за малой CR-размерности), мы предполагаем, что операция присоединения коммутаторов позволяет получить всё TM из сечений $T^{\mathrm{CR}}M$ за две итерации. Учитывая, что CR-размерность равна 1, а коразмерность 2, нетрудно понять, что две итерации — это минимум и это условие является условием общего положения. Вещественные многообразия размерности 4 с распределением $D \subset TM$ ранга 2 называются много-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ARC Discovery Project (grant DP0450725), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00981) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2040.2003.1).

[2]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: vkb@strogino.ru

[3]School of Mathematics and Statistics, University of South Australia, Mawson Lakes Boulevard, Mawson Lakes, SA 5095, Australia.
E-mail: vladimir.ejov@unisa.edu.au

[4]School of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of New England, Armidale, NSW 2351, Australia; Uniwersytet Warmińsko-Mazurski, Wydział Matematyki-Informatyki, ul. Żołnierska 14, 10-561 Olsztyn, Poland.
E-mail: gerd@turing.une.edu.au

образиями Энгеля [11], если сечения D вместе с их коммутаторами первого и второго порядка порождают всё TM. CR-многообразия типа $(1,2)$ с энгелевым распределением $D = T^{\mathrm{CR}}M$ мы будем называть CR-многообразием энгелева типа.

Как и в случае невырожденных гиперповерхностей, для CR-многообразий энгелева типа удается построить аналитическую нормальную форму и связность Картана по аналогии с конструкциями Черна–Мозера [1] и Танаки [10] (см. [5, 6]).

Используя нормальную форму Черна–Мозера, Витушкин [7] доказал теорему о продолжении в общую окрестность всех ростков биголоморфных отображений двух несферических строго псевдовыпуклых вещественно аналитических многообразий. Основным результатом нашей работы является аналог теоремы Витушкина для многообразий энгелева типа. Наше доказательство тоже опирается на конструкцию нормальной формы [5], и поэтому для полноты изложения мы приводим необходимые формулировки из [5, 6].

2. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И СВЯЗНОСТЬ КАРТАНА

Пусть $(z,\, w_2 = u_2 + iv_2,\, w_3 = u_3 + iv_3)$ — координаты в пространстве $\mathbb{C}^3$. Полином от переменных $(z, \bar z, w_2, \bar w_2, w_3, \bar w_3)$ будем называть полиномом веса m, если он умножается на t^m при замене переменных

$$(z, w_2, w_3) \mapsto (tz, t^2 w_2, t^3 w_3), \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}^*$. Полиномы указанного вида возникают в правой части уравнений многообразий

$$v_2 = |z|^2 + \ldots, \qquad v_3 = 2\operatorname{Re} z|z|^2 + \ldots$$

Поскольку замена (1) действует на левую часть уравнения многообразия как умножение соответственно на t^2 и t^3, удобно рассматривать не вес m полинома в правой части, а его *однородность*, определяемую как $m-2$, если это полином в правой части уравнения для v_2, и $m-3$, если это полином в правой части уравнения для v_3.

Запасом аналитичности ростка аналитической функции будем называть наибольшее такое положительное число ε, что степенной ряд, представляющий данный росток, сходится в полидиске радиуса ε, а модуль суммы этого ряда ограничен константой $\frac{1}{\varepsilon}$ на полидиске радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть M_ξ — росток аналитического многообразия, сферический порядка не больше чем m.

Теорема 1. *Любой вполне невырожденный росток четырехмерного вещественно аналитического многообразия в $\mathbb{C}^3$ голоморфным преобразованием может быть приведен к нормальной форме*

$$v_2 = |z|^2 + N^2(z, \bar z, u_2, u_3), \qquad v_3 = 2\operatorname{Re} z^2\bar z + N^3(z, \bar z, u_2, u_3),$$

где степенной ряд $N^2 = \sum_{k,\ell} N^2_{k,\ell}(u_2, u_3) z^k \bar z^\ell$ удовлетворяет условиям

$$N^2_{k,0} = 0, \quad k \ge 0, \qquad N^2_{1,1} = 0, \qquad N^2_{2,1} = 0, \qquad N^2_{3,1}|_{u_3=0} = 0, \qquad \operatorname{Im} N^2_{4,2}|_{u_3=0} = 0,$$

а степенной ряд $N^3 = \sum_{k,\ell} N^3_{k,\ell}(u_2, u_3) z^k \bar z^\ell$ удовлетворяет условиям

$$N^3_{k,0} = 0, \quad k \ge 0, \qquad N^3_{k,1} = 0, \quad k \ge 1, \qquad \operatorname{Im} N^3_{4,2}|_{u_3=0} = 0.$$

При этом такое приведение единственно с точностью до преобразования (1) *и запас аналитичности как нормализующего преобразования, так и нормализованной поверхности оценивается снизу положительной константой, зависящей лишь от запаса аналитичности исходной поверхности.*

Будем говорить, что росток M_ξ энгелева типа сферический, если он эквивалентен ростку кубики C. Условимся называть число $m > 0$ порядком сферичности ростка, если (N_m^2, N_m^3) — первая ненулевая компонента однородности m его уравнения в нормальной форме. Таким образом, росток сферический тогда и только тогда, когда он сферический бесконечного порядка. Условие того, что в точке росток аналитического многообразия имеет порядок не ниже заданного, — это аналитическое условие, определяющее систему вложенных аналитических подмножеств исходного многообразия M. Если многообразие несферично, то все эти множества являются собственными подмножествами M.

Будем называть m-мерой несферичности вложенного ростка наибольшее число $\delta > 0$ такое, что $\delta \le \|J_m N\| \le \frac{1}{\delta}$, где $\|J_m N\|$ — норма m-струи нормальной формы вложенного ростка, параметризованной тождественным автоморфизмом $T(1,0,0,0)$, рассмотренной как вектор коэффициентов.

Для класса несферических ростков можно, воспользовавшись оставшейся степенью свободы в выборе нормальных координат, предложить доприведение вида (1), так что $\|J_m N\| = 1$. Такую нормальную форму будем называть *специальной.*

Имеет место

Теорема 2. (a) *Если M_ξ — несферический росток в нормальной форме, то отображением вида* (1) *его можно привести к специальной нормальной форме, описанной выше.*

(b) *Два таких приведения могут отличаться лишь заменой вида $(\pm z, w_2, \pm w_3)$, т.е. два несферических ростка M_ξ и $\widetilde{M}_{\widetilde{\xi}}$, имеющие в специальных нормальных координатах правые части N и $\widetilde{N}$ соответственно, голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из двух соотношений $N(z,\bar z,u_2,u_3) = \widetilde{N}(z,\bar z,u_2,u_3)$ или $N(-z,-\bar z,u_2,-u_3) = \widetilde{N}(z,\bar z,u_2,u_3)$.*

(c) *Если ε — запас аналитичности исходного ростка M_ξ (как в теореме* 1), *являющегося сферическим порядка не больше чем m, и δ — m-мера несферичности, то запас аналитичности ростка отображения, приводящего M_ξ к специальной нормальной форме m-го порядка, зависит лишь от ε и δ.*

В [6] была построена связность Картана. Из 17 компонент кривизны связности выделены четыре компоненты, тождественное обращение в нуль которых влечет за собой тождественное обращение в нуль остальных 13 компонент и тем самым эквивалентность многообразия модельной поверхности C. Оказалось, что эти четыре главные компоненты кривизны имеют геометрический смысл в терминах интегрируемости определенных распределений плоскостей. Из уравнения многообразия в нормальной форме вида

$$\operatorname{Im} w_1 = |z|^2 + A_1 \operatorname{Re} z^2\bar z^3 + A_2 \operatorname{Im} z^2\bar z^3 + \dots,$$

$$\operatorname{Im} w_2 = \operatorname{Re} z^2\bar z + B_1 \operatorname{Re} z^4\bar z + B_2 \operatorname{Re} z^2\bar z^3 + B_3 \operatorname{Im} z^2\bar z^3 + B_4 \operatorname{Re} z^5\bar z + {}$$
$$+ B_5 \operatorname{Im} z^5\bar z + B_6 \operatorname{Re} z^4\bar z^2 + B_7 \operatorname{Im} z^4\bar z^2 + B_8|z|^6 + \dots,$$

где многоточие обозначает члены более высокой однородности, главные компоненты кривизны в начале координат вычисляются как

$$R^x_{y2}(0) = 2B_1 - B_2, \qquad R^y_{y2}(0) = -3B_3,$$
$$R^x_{x3}(0) = 2B_1 - 5B_2, \qquad R^y_{x3}(0) = 4A_1 + 5B_4 - 2B_6 - 6B_8.$$

При этом возникает естественный аналог понятия омбиличности, известного для вещественных гиперповерхностей: многообразие энгелева типа будем называть омбилическим в начале координат, если

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0, \qquad 4A_1 + 5B_4 - 2B_6 - 6B_8 = 0.$$

Как и в случае гиперповерхностей, омбиличность в окрестности начала координат означает сферичность многообразия.

3. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПУАНКАРЕ

В 1907 г. А. Пуанкаре [2] доказал, что росток обратимого голоморфного отображения сферы в $\mathbb{C}^2$ в другую такую же сферу является дробно-линейным преобразованием, которое продолжается до биголоморфного отображения между шарами, ограниченными этими сферами. Эта теорема была обобщена в 1974 г. Александером [3], доказавшим это для сферы в $\mathbb{C}^N$ при $N \geq 2$.

Сфера является модельной поверхностью типа $(n,1)$. Для вещественно алгебраической поверхности $C = \{\operatorname{Im} w_2 = |z|^2,\ \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re} z^2\bar z\}$, которая является модельной для многообразий типа $(1,2)$, имеет место аналог этой теоремы (см. теорему 3 ниже).

На C транзитивно действует 5-мерная группа Ли $\operatorname{Aut} C$ квадратично треугольных преобразований вида

$$\begin{aligned} z &\mapsto \lambda(z+p),\\ w_2 &\mapsto \lambda^2\big(w_2 + 2i\bar p z + (q_2 + i|p|^2)\big),\\ w_3 &\mapsto \lambda^3\big(w_3 + 4(\operatorname{Re} p)(w_2+q_2) + 2i(2|p|^2+\bar p^2)z + 2i\bar p z^2 + (q_3 + 2i\operatorname{Re} p^2\bar p)\big), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{C}$, $q_2 \in \mathbb{R}$, $q_3 \in \mathbb{R}$. Представление элемента группы в виде набора параметров (λ, p, q_2, q_3) соответствует разложению группы в полупрямое произведение вида $\mathbb{R}^* \ltimes \mathbb{C} \ltimes \mathbb{R}^2$. Соответствующее преобразование обозначим через $T(\lambda,p,q_2,q_3)$. Подгруппа $\operatorname{Aut}_0 C$, состоящая из преобразований вида $T(1,p,q_2,q_3)$, действует на C транзитивно без неподвижных точек и может быть отождествлена с C следующим образом: преобразованию $T(1,p,q_2,q_3)$ ставим в соответствие точку $\xi = (p, q_2 + i|p|^2, q_3 + 2i\operatorname{Re} p^2\bar p) \in C$.

Теорема 3. *Пусть ξ_1, ξ_2 — две точки C, ϕ — росток обратимого голоморфного отображения ростка C_{ξ_1} в росток C_{ξ_2}. Тогда ϕ продолжается до квадратично треугольного изоморфизма $\mathbb{C}^3$ вида* (2) *из группы* $\operatorname{Aut} C$.

Доказательство. Эта теорема является прямым следствием единственности приведения C к нормальной форме [5]. Действительно, ввиду транзитивности группы $\operatorname{Aut} C$ мы можем считать, что ξ_1 и ξ_2 совпадают с началом координат. Тогда ϕ — это приведение C к нормальной форме и по следствию 5 работы [5] $\phi = T(\lambda,0,0,0)$, что доказывает теорему. $\square$

4. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ВИТУШКИНА О РОСТКЕ

В 1978 г. Пинчуком была доказана следующая замечательная теорема, по формулировке очень похожая на теорему Пуанкаре. Пусть Γ_1 и Γ_2 — две компактные строго псевдовыпуклые вещественно аналитические несферические гиперповерхности в $\mathbb{C}^N$. Тогда росток любого обратимого голоморфного отображения Γ_1 в Γ_2 продолжается по всем путям на Γ_1. Для односвязных гиперповерхностей это означает продолжение до биголоморфной эквивалентности гиперповерхностей и соответственно областей, границами которых они являются. Доказательство Пинчука использовало глобальные конструкции (например, метрику Фефферманa) и было существенно привязано к $\mathbb{C}^N$. Несколько позже А.Г. Витушкин тонким анализом степенных рядов, задающих отображение, доказал локальный вариант этого утверждения. Здесь мы формулируем и доказываем аналогичное утверждение для CR-многообразий типа $(1,2)$.

В соответствии с теоремой 8 работы [5] запас аналитичности ростка отображения, приводящего M_ξ к специальной нормальной форме m-го порядка, зависит лишь от двух величин: запаса аналитичности исходного ростка и m-меры несферичности.

Теорема 4. *Пусть M^1 и M^2 — два несферических вещественно аналитических подмногообразия типа $(1,2)$ трехмерных комплексных многообразий X^1 и X^2, K^1 и K^2 — компактные подмножества M^1 и M^2 соответственно. Пусть ξ_1 и ξ_2 — точки, принадлежащие K^1 и K^2, а ϕ — росток обратимого голоморфного отображения $M^1_{\xi_1}$ в $M^2_{\xi_2}$. Тогда запас аналитичности ϕ — это положительная величина, зависящая лишь от K^1 и K^2.*

Доказательство. Порядок сферичности связного вещественно аналитического многообразия либо ограничен на каждом компактном подмножестве, либо всюду равен бесконечности. Мы имеем дело с первым случаем. Пусть все порядки ограничены числом m. Тогда при построении специальной нормальной формы в каждой точке мы можем использовать специальную нормальную форму m-го порядка. Для нашего компакта K^1 найдутся положительные константы ε_1, которая оценивает запас аналитичности многообразия во всех точках компакта, и δ_1, которая оценивает m-меру несферичности во всех точках компакта K^1. Эти же параметры оценивают запас аналитичности обратного отображения. Пусть $(\varepsilon_2, \delta_2)$ — пара констант, подобранная для компакта K^2. Отображение ϕ есть композиция приведения к специальной нормальной форме порядка m и обратного к нему. Таким образом, запас аналитичности ростка ϕ — это положительная константа, зависящая от набора величин $(\varepsilon_1, \delta_1, \varepsilon_2, \delta_2)$. Теорема доказана. $\square$

Из этой теоремы сразу получаем ряд следствий. Во всех этих следствиях речь идет о четырехмерных несферических вещественно аналитических подмногообразиях трехмерных комплексных многообразий и голоморфных локально обратимых отображениях.

Следствие 5. (a) *Если оба подмногообразия M^1 и M^2 компактны, то запас аналитичности ростка любого отображения $M^1_{\xi_1}$ в $M^2_{\xi_2}$ оценивается снизу константой, зависящей лишь от пары многообразий.*

(b) *Все отображения компактного подмногообразия M^1 в другое такое подмногообразие M^2 голоморфно продолжаются в общую окрестность M^1.*

(c) *Группа глобальных автоморфизмов компактного подмногообразия M^1 — компактная группа Ли голоморфных преобразований M^1 в топологии равномерной сходимости.*

Примеры компактных подмногообразий типа $(1,2)$ построены в разд. 5. Следствие 5 позволяет связать обсуждаемую здесь локальную теорию с глобальной. Отметим, что (c) также означает, что если группа автоморфизмов некомпактна, то многообразие сферично. Аналогичное утверждение имеет место для компактной строго псевдовыпуклой гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$ [7]: если группа автоморфизмов такой поверхности некомпактна, то поверхность сферична. Похожее утверждение было доказано в [9].

Следствие 6. *Пусть M^1 и M^2 — два подмногообразия, а ϕ — росток голоморфного отображения M^1 в M^2.*

(a) *Если M^2 компактно, то ϕ продолжается по всем путям на M^1.*

(b) *Если M^2 компактно, а M^1 односвязно, то ϕ продолжается до голоморфного локально обратимого отображения M^1 в M^2.*

(c) *Если как M^1, так и M^2 компактны и односвязны, то ϕ продолжается до голоморфной эквивалентности между M^1 и M^2.*

Предложенное в предыдущем разделе доказательство теоремы о ростке принципиально ничем не отличается от доказательства теоремы Витушкина, однако технически значительно проще. Это связано прежде всего с тем, что группа автоморфизмов модельной поверхности C, которая параметризует отображения CR-многообразий энгелева типа, значительно беднее группы автоморфизмов гиперквадрики, которая в свою очередь параметризует отображения невырожденных гиперповерхностей.

5. КОМПАКТНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ КУБИКИ И ПРИМЕР НЕПРОДОЛЖАЕМОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Как было отмечено выше, группа $\operatorname{Aut} C$ голоморфных автоморфизмов C состоит из преобразований вида (2), действующих в объемлющем пространстве $\mathbb{C}^3$.

Из формул (2) видно, что если $\lambda \neq \pm 1$, то преобразование имеет ровно одну неподвижную точку. Любое такое преобразование сопряжено в группе $\operatorname{Aut} C$ с преобразованием, имеющим неподвижной точкой начало координат. Таким преобразованием является $T(\lambda, 0, 0, 0)$. Если $\lambda = -1$ и $p = q_2 = 0$, то неподвижными точками в объемлющем пространстве будут точки прямой $(z = 0,\, w_2,\, w_3 = -\frac{q_3}{2})$, где w_2 — любое комплексное число. При вещественном w_2 эти точки лежат на C. Если же $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$ и при этом $p \neq 0$ или $q_2 \neq 0$, то неподвижных точек нет.

Если задать вопрос о размерностях орбит действия 5-мерной вещественной группы Ли $\operatorname{Aut} C$, то ситуация следующая. Кубика C — это особая 4-мерная орбита. А орбита общего положения — это 5-мерная гиперповерхность. В этом можно убедиться следующим образом. Заметим, что действие группы $\operatorname{Aut} C$ в $\mathbb{C}^3$ коммутирует с проекцией на $\mathbb{C}^2_{(z,w_2)}$ и поэтому корректно определено действие $\operatorname{Aut} C$ в $\mathbb{C}^2$. Как известно, имеются три орбиты этого действия: гиперповерхность $\{\operatorname{Im} w_2 = |z|^2\}$ и две области по разные стороны от нее. Каждая орбита действия в $\mathbb{C}^3$ должна накрывать орбиту действия в $\mathbb{C}^2$, поэтому те орбиты, которые накрывают области, не менее чем 4-мерны, но наличие в нашей группе преобразований вида $T(1, 0, 0, q_3)$ позволяет утверждать, что орбиты имеют вид прямого произведения, в котором один из сомножителей — это вещественная прямая вдоль w_3. Поэтому орбиты не менее чем 5-мерны, причем размерность группы не позволяет им быть более чем 5-мерными.

Пример 1. Рассмотрим в $\operatorname{Aut} C$ подгруппу H, порожденную четырьмя преобразованиями $T(1, \omega_1, 0, 0)$, $T(1, \omega_2, 0, 0)$, $T(1, 0, q_2^1, q_3^1)$, $T(1, 0, q_2^2, q_3^2)$, где комплексные числа ω_1 и ω_2 линейно независимы над $\mathbb{R}$ и векторы (q_2^1, q_3^1), (q_2^2, q_3^2) независимы как векторы $\mathbb{R}^2$. Это вполне разрывно действующая дискретная подгруппа голоморфных преобразований $\mathbb{C}^3$. Однородное пространство, полученное факторизацией $\mathbb{C}^3$ по H, — это комплексное многообразие, имеющее топологическую структуру $(S^1)^4 \times \mathbb{R}^2$. После этой факторизации кубика C становится компактным сферическим четырехмерным вещественным подмногообразием $\widehat{C}$, имеющим топологическую структуру четырехмерного тора $(S^1)^4$. Универсальной накрывающей $\widehat{C}$ является, очевидно, сама кубика C, имеющая топологический тип $\mathbb{R}^4$. Биголоморфное отображение между двумя такими многообразиями (с разным набором параметров) поднимается до автоморфизма кубики. Нетрудно показать, что такой автоморфизм должен обеспечивать линейную эквивалентность решеток. Таким образом, почти все они голоморфно неэквивалентны.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим факторизацию $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ и $C \setminus \{0\}$ по бесконечной циклической подгруппе, порожденной преобразованием $T(\lambda, 0, 0, 0)$, где $\lambda > 1$. Выражение $\tau = |z|^6 + |w_2|^3 + |w_3|^2$ является конформным инвариантом этой группы. Пространство $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ расслаивается на поверхности уровня функции τ, которые топологически являются пятимерными сферами S^5. А так как $T(\lambda, 0, 0, 0)(\tau) = \lambda^6 \tau$, то фундаментальной областью является “шаровой слой” $\{1 \leq \tau < \lambda^6\}$ и мы получаем компактное комплексное многообразие топологического типа $S^5 \times S^1$. На кубику C можно смотреть как на график отображения $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Фундаментальной областью факторизованной кубики является график над “шаровым слоем” вида $1 \leq |z|^6 + |u_2|^3 + |u_3|^2 < \lambda^6$. Таким образом, факторизованная кубика $\widehat{C}$ имеет топологический тип $S^3 \times S^1$, а ее универсальной накрывающей будет кубика без точки, т.е. $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Нетрудно видеть, что фактор-многообразия, соответствующие разным значениям параметра $\lambda > 1$, голоморфно неэквивалентны.

“Контрпример” к теореме о ростке, аналогичный примеру Бернса и Шнайдера [8], строится очень просто. Нужно рассмотреть росток тождественного отображения в любой точке, отличной от начала координат, например в $(0,0,1)$, как отображение C в $\widehat{C}$. Прямая, соединяющая эту точку с началом координат, отобразится в цикл на $\widehat{C}$, пройденный бесконечное число раз, что делает продолжение ростка по этому пути в начало координат невозможным.

В работе Бернса и Шнайдера фактор-многообразие было реализовано как компактная поверхность в исходном комплексном линейном пространстве, в то время как наше многообразие вложено в $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, факторизованное по действию $T(\lambda,0,0,0)$.

Пример 3. В качестве последнего, третьего примера рассмотрим факторизацию $C\setminus\{(z = 0,\ \operatorname{Im} w_2 = 0,\ w_3 = 0)\}$ по группе $\mathbb{Z}_2$, порожденной преобразованием $T(-1,0,0,0)$. В результате мы получаем *неориентируемое* сферическое подмногообразие $\mathbb{C}^3 \setminus \{(z = 0,\ w_2 \in \mathbb{C},\ w_3 = 0)\}$, факторизованное по $T(-1,0,0,0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chern S.S., Moser J.K.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta math. 1974. V. 133. P. 219–271.
2. *Poincaré H.* Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. V. 23. P. 185–220.
3. *Alexander H.* Holomorphic mappings from the ball and polydisk // Math. Ann. 1974. Bd. 209, N 3. S. 249–256.
4. *Beloshapka V.K.* CR-varieties of the type $(1,2)$ as varieties of “super-high” codimension // Russ. J. Math. Phys. 1998. V. 5, N 2. P. 399–404.
5. *Белошапка В.К., Ежов В.В., Шмальц Г.* Голоморфная классификация четырехмерных поверхностей в $\mathbb{C}^3$ // Изв. РАН. Сер. мат. (в печати).
6. *Beloshapka V., Ezhov V., Schmalz G.* Canonical Cartan connection and holomorphic invariants on Engel CR manifolds: E-print, 2005. math.CV/0508084.
7. *Витушкин А.Г.* Голоморфные отображения и геометрия поверхностей // Комплексный анализ. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 167–226. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр.; Т. 7).
8. *Burns D.,* Jr., *Shnider S.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Proc. Symp. Pure Math. 1977. V. 30. P. 141–168.
9. *Bedford E., Pinchuk S.* Domains in $\mathbb{C}^2$ with noncompact automorphism groups // Indiana Univ. Math. J. 1998. V. 47, N 1. P. 199–222.
10. *Tanaka N.* On generalized graded Lie algebras and geometric structures. I // J. Math. Soc. Japan. 1967. V. 19. P. 215–254.
11. *Engel F.* Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaffschen Gleichungen // Ber. Akad. Wiss. Leipzig. 1889. Bd. 41. S. 157–176.