2002 г. январь — февраль *т. 57, вып. 1(343)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.55+514.76

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА: ИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ, АВТОМОРФИЗМЫ И ПРОБЛЕМЫ КЛАССИФИКАЦИИ

В. К. Белошапка

Работа представляет собой обзор результатов по локальной теории вещественных подмногообразий комплексного пространства, основная часть которых получена в семинаре А. Г. Витушкина в МГУ за последние 15 лет. Главное достижение – это разработка технологии вычисления автоморфизмов, инвариантов и классификаций вещественных подмногообразий, основным этапом которой является построение "хорошей" модельной поверхности. Хорошая модельная поверхность – это аналог соприкасающегося параболоида классической дифференциальной геометрии.

Библиография: 66 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В 1985 г. вышел обзор А.Г. Витушкина [64]. Основное содержание обзора – это результаты по невырожденным вещественным гиперповерхностям. Данный обзор можно рассматривать как продолжение обзора Витушкина. Основное его содержание – это результаты по локальной теории вещественных подмногообразий, полученные участниками семинара за последние 10–15 лет. При этом следует отметить, что, во-первых, в этот период активно изучались многообразия коразмерности более высокой, чем один, а во-вторых, оформилась эффективная технология вычисления автоморфизмов, построения инвариантов и пр., которую мы называем методом модельной поверхности.

Данная проблематика представляет интерес не только для многомерного комплексного анализа. Другие разделы математики, питающие интерес к этой области исследования, – это дифференциальная геометрия и уравнения с частными производными. Геометрическая линия – это Э. Картан – Н. Танака – С. Черн и др. [20], [58], [21], [42]. В современной терминологии это техника редукции G-структур. Однако основной, хотя и не единственный, успех метода в применении к вещественным подмногообразиям – это гиперповерхности. Среди работ, в которых данный подход применяется к многообразиям коразмерности выше чем один, кроме классических работ Н. Танаки, упомянем работы Т. Гэррити и Р. Мизнера [33], а также В. Ежова, А. Исаева и Г. Шмальца [25]. Аналитическая линия – это А. Тресс – А. Пуанкаре – Рикье (Riquier) – Ю. Мозер – С. Вебстер – С. Пинчук и др. [59], [47], [36], [21], [65], [46]. Среди современных авторов, тяготеющих к этому, аналитическому, направлению отметим М. Баоуенди, Л. Ротшильд, Н. Стентон, П. Эбенфельда, Д. Зайцева [5], [6], [54], [8], [9], а также А. Сухова [56], [57]. Наш подход, о котором пойдет речь ниже, также примыкает к этой аналитической линии.

Почти все результаты, представленные в данном обзоре, получены единым методом. Ключом к его применению является построение “хорошей модели” (этому термину ниже придается точный смысл). Мы не выделяем из списка результатов главные, а рассматриваем в качестве такого главного результата сам метод модельной поверхности.

Вещественное подмногообразие комплексного пространства – это объект, естественно возникающий в многомерном комплексном анализе. Гиперповерхности – подмногообразия вещественной коразмерности один – это топологические границы областей. Подмногообразия более высокой коразмерности появляются как остовы топологических границ, как их границы Шилова.

Если гладкое вещественное многообразие M поместить в комплексное пространство $\mathbb{C}^N$, то между гладкой структурой многообразия и комплексной структурой объемлющего пространства возникает взаимодействие. В результате этого взаимодействия появляются локальные биголоморфные инварианты, группа автоморфизмов ростка многообразия становится конечномерной или просто тривиальной, два наугад выбранных ростка оказываются неэквивалентными и т. д. Самые грубые локальные ин-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00969) и частичной поддержке грантом Шведской академии наук. Работа была начата в Гетеборгском университете, куда автор был любезно приглашен профессором Н. Щербиной.

варианты – это инварианты, связанные с 1-струей ростка. Первый признак взаимодействия двух упомянутых структур – это появление ненулевой комплексной части в касательном пространстве к многообразию. Если вещественная размерность многообразия достаточно велика, а именно, больше комплексной размерности пространства, то появление комплексной касательной неизбежно. Пару чисел (n, k), где n – размерность комплексной касательной (она может зависеть от точки), а k – коразмерность, будем называть типом многообразия. Тип определяется по 1-струе ростка многообразия в точке. Тип является локальным биголоморфным инвариантом. Он не позволяет, например, биголоморфно отобразить комплексную прямую на двумерную вещественную плоскость.

Основное внимание в данной работе уделяется локальным свойствам вещественного подмногообразия комплексного пространства. При этом в центре нашего внимания – три взаимосвязанных цикла вопросов: автоморфизмы, инварианты и классификация.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие обозначения. Если M – гладкая поверхность в $\mathbb{C}^N$, ξ – ее точка и M_ξ – росток M в точке ξ, то через $\operatorname{aut} M_\xi$ обозначим алгебру Ли ростков вещественных векторных полей с голоморфными коэффициентами в точке ξ, касательных к M_ξ. Если $z = (z_1, \ldots, z_N)$ – координаты в $\mathbb{C}^N$, то

$$\operatorname{aut} M_\xi = \left\{ X(z) = 2\operatorname{Re}\left(f_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + f_N(z)\frac{\partial}{\partial z_N} \right) \right\},$$

где сужение поля X на M_ξ есть росток поля, касательного к M_ξ, а коэффициенты $(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ – ростки функций, голоморфных в ξ. Это алгебра Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов. Эти векторные поля порождают голоморфное действие на M_ξ. Можно рассмотреть соответствующую $\operatorname{aut} M_\xi$ локальную группу – $\operatorname{Aut} M_\xi$. Итак, $\operatorname{Aut} M_\xi$ – это образ $\operatorname{aut} M_\xi$ под действием экспоненциального отображения. Эта локальная группа действует на M_ξ отображениями, биголоморфными в ξ. В дальнейшем эти алгебру и соответствующую ей группу будем называть алгеброй и группой ростка.

2. Демонстрация метода на примере гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$

Изучение вещественных многообразий начиналось с изучения многообразий коразмерности один, т.е. гиперповерхностей. Библиография по этой теме есть в обзоре Витушкина [64]. Отметим здесь лишь то, что первая работа по гиперповерхностям это работа А. Пуанкаре 1907 г. [47], в которой изучена самая маломерная ситуация – трехмерная гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$.

Гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$ – это поверхность типа $(1, 1)$. Продемонстрируем технологию в этой простейшей ситуации.

2.1. Выбор модельной поверхности. Гиперповерхность Γ в окрестности своей точки ξ – это множество нулей гладкой функции ρ, причем $\operatorname{grad}\rho(\xi) \neq 0$. После аффинной замены координат можно считать, что точка $\xi = (0, 0)$, а $\operatorname{grad}\rho(\xi) = (0, i)$. Пусть $(z, w = u + iv)$ – это координаты в $\mathbb{C}^2$, тогда, разрешая уравнение $\rho(z, \bar{z}, u, v) = 0$ относительно v, получаем уравнение ростка гиперповерхности в нуле в виде $\Gamma_0 = \{v = F(z, \bar{z}, u)\}$, где функция F и ее первые производные обращаются в нуль в начале координат. При этом плоскость переменного z, т.е. $\{w = 0\}$, – это комплексная касательная поверхности в нуле, а $\{v = 0\}$ – вся касательная плоскость. Если поверхность была вещественно аналитической, то F – это сходящийся степенной ряд, если только гладкой, то мы вправе рассмотреть формальный ряд. В пространстве рядов от $(z, \overline{z}, u)$ введем градуировку условиями на веса переменных $[z] = 1$, $[\overline{z}] = 1$, $[u] = 2$. Тогда уравнение ростка можно записать в виде $v = 2\operatorname{Re}(Az^2) + hz\overline{z} + \cdots$, где многоточие обозначает члены веса три и выше. Это уравнение можно переписать в виде $2\operatorname{Im}(w + 2iAz^2) = hz\overline{z} + \cdots$ или, после простого квадратично-треугольного преобразования координат $z \to z$, $w \to w + 2iAz^2$, в виде

$$v = hz\overline{z} + \cdots . \tag{1}$$

Отметим, что одномерная эрмитова форма $hz\overline{z}$ – это форма Леви гиперповерхности Γ_0 в нуле. Если она невырождена (в нашей ситуации это означает, что $h \neq 0$), то после замены $z \to z$, $w \to hw$ получаем

$$v = z\overline{z} + \cdots . \tag{2}$$

Квадратичная гиперповерхность $Q = \{v = |z|^2\}$ и есть наша модельная поверхность, она же – касательная квадрика.

То, что при выборе модельной поверхности мы не остановились на уровне 1-струи, связано с тем, что все гиперплоскости имеют, как нетрудно убедиться, бесконечномерную группу автоморфизмов. То, что при рассмотрении 2-струи мы ограничились лишь эрмитовым членом, связано с тем, что от остальных можно избавиться заменой координат и отсечением компонент старшего веса. То, что мы остановились на уровне 2-струи, связано с тем, что уже здесь, как мы увидим ниже, можно получить условие конечномерности группы ростка.

2.2. Автоморфизмы модельной поверхности. Начнем с вычисления алгебры $\operatorname{aut} Q$ – алгебры инфинитезимальных автоморфизмов квадрики Q. Записывая условие касания, получаем следующее описание этой алгебры:

$$\operatorname{aut} Q = \left\{ X(z,w) = 2\operatorname{Re}\left(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + g(z,w)\frac{\partial}{\partial w} \right) \right\},$$

где голоморфные в окрестности начала координат функции f и g удовлетворяют функциональному уравнению

$$\operatorname{Im} g(z, u + i|z|^2) = 2\operatorname{Re}(f(z, u + i|z|^2)\overline{z}). \tag{3}$$

Решение этого уравнения проводится в классе формальных степенных рядов с помощью следующей несложной техники. Будем использовать разложения вида

$$f(z, u + i|z|^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \Delta^m f(z,u),$$

где $\Delta f = |z|^2 \dfrac{\partial}{\partial u} f$ $(\Delta^0 = \mathrm{Id})$, а также

$$f(z,u) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(u) z^m.$$

Исходное уравнение будем разлагать на соотношения фиксированных бистепеней по $(z,\overline{z})$. При этом мы получаем бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений на последовательность неизвестных функций $(f_0(u), g_0(u), f_1(u), g_1(u), \dots)$. Однако, выписывая компоненты бистепеней $(2,0),(3,0),\dots$, убеждаемся, что $g_2 = g_3 = \dots = 0$, а компоненты $(3,1),(4,1),\dots$ дают $f_3 = f_4 = \dots = 0$. Если для оставшихся пяти функций g_0, g_1, f_0, f_1, f_2 записать соотношения в компонентах $(0,0),(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3)$, то, во-первых, оказывается, что решения этой системы обыкновенных линейных уравнений – это многочлены невысоких степеней, во-вторых, оставшийся неиспользованный массив уравнений не дает новых ограничений. В итоге получаем, что алгебра состоит из векторных полей с коэффициентами вида

$$f = p + \lambda z + aw + 2i\overline{a}z^2 + rzw, \qquad g = q + 2i\overline{p}z + 2(\operatorname{Re}\lambda)w + 2i\overline{a}zw + rw^2,$$

где (p,λ,a) – комплексные параметры, а (q,r) – вещественные и $\dim \operatorname{aut} Q = 8$.

В алгебре векторных полей введем градуировку условиями:

$$[z]=1,\ [\overline{z}]=1,\ [w]=2,\ [\overline{w}]=2,\ \left[\frac{\partial}{\partial z}\right]=-1,\ \left[\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right]=-1,\ \left[\frac{\partial}{\partial w}\right]=-2,\ \left[\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right]=-2.$$

Эта градуировка согласована с операцией взятия скобки, т.е. если g_m – подпространство полей веса m, то $[g_m, g_n] \subseteq g_{m+n}$. Из наших вычислений следует, что алгебра $\operatorname{aut} Q$ имеет следующую структуру:

$$\operatorname{aut} Q = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2,$$

при этом

$$\begin{aligned}
g_{-2} &= \left\{ 2\operatorname{Re}\left(q\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\},\\
g_{-1} &= \left\{ 2\operatorname{Re}\left(p\frac{\partial}{\partial z} + 2i\overline{p}z\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\},\\
g_{0} &= \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\lambda z\frac{\partial}{\partial z} + 2(\operatorname{Re}\lambda)w\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\},\\
g_{1} &= \left\{ 2\operatorname{Re}\left((aw + 2i\overline{a}z^2)\frac{\partial}{\partial z} + 2i\overline{a}zw\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\},\\
g_{-2} &= \left\{ 2\operatorname{Re}\left(rzw\frac{\partial}{\partial z} + rw^2\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Для того чтобы по алгебре векторных полей получить однопараметрические подгруппы преобразований, нужно решить соответствующие дифференциальные уравнения. Если $(z,w) \to (Z(t,z,w), W(t,z,w))$ – искомая подгруппа, соответствующая полю $2\operatorname{Re}\left(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + g(z,w)\frac{\partial}{\partial w}\right)$, то функции (Z,W) удовлетворяют системе обыкновенных уравнений с начальными условиями

$$Z' = f(Z,W), \quad W' = g(Z,W), \quad Z(0,z,w) = z, \quad W(0,z,w) = w.$$

Решая эти уравнения для полей пяти весовых компонент, получаем

$$\begin{aligned}
g_{-2} &\ \text{соответствует}\ z \to z,\ w \to w + tq;\\
g_{-1} &\ \text{соответствует}\ z \to z,\ w \to w + 2i\overline{p}zt + i|p|^2t^2;\\
g_0 &\ \text{соответствует}\ z \to z\exp(\lambda t),\ w \to w\exp(2\operatorname{Re}(\lambda t));\\
g_1 &\ \text{соответствует}\ z \to \frac{z+awt}{1-2i\overline{a}zt - i|a|^2wt^2},\ w \to \frac{w}{1-2i\overline{a}zt - i|a|^2wt^2};\\
g_2 &\ \text{соответствует}\ z \to \frac{z}{1-rwt},\ w \to \frac{w}{1-rwt}.
\end{aligned}$$

Решение систем, соответствующих весам $-2, -1, 0$ и 2, не вызывает затруднений. Это уравнения с разделяющимися переменными. Система, соответствующая первой компоненте, решается с помощью следующей замены переменных: $Z = 1/\widetilde{Z}, W = \widetilde{W}/\widetilde{Z}$.

Полагая в полученных соотношениях $t = 1$, получаем значение экспоненциального отображения на векторах из соответствующих весовых компонент алгебры. В результате подалгебре $g_- = g_{-2} + g_{-1}$ соответствует подгруппа

$$\operatorname{Aut}_- Q = \bigl\{z \to z + p,\ w \to w + 2i\overline{p}z + (q + i|p|^2)\bigr\},$$

действующая на Q транзитивно. Тем самым можно констатировать, что Q аффинно-однородна. Подалгебре g_0 соответствует подгруппа линейных автоморфизмов

$$\operatorname{Aut}_0 Q = \bigl\{z \to \Lambda z,\ w \to |\Lambda|^2 w\bigr\},$$

сохраняющих начало координат. Подалгебре $g_+ = g_1 + g_2$ соответствует подгруппа

$$\operatorname{Aut}_+ Q = \left\{z \to \frac{z + awt}{1 - (2i\overline{a}z + (r + i|a|^2)w)}\,,\ w \to \frac{w}{1 - (2i\overline{a}z + (r + i|a|^2)w)}\right\}$$

дробно-линейных автоморфизмов Q. Эта подгруппа выделяется условием сохранения начала координат и тем, что якобиева матрица автоморфизма в начале координат имеет на диагонали единицы ($\Lambda = 1$).

2.3. Оценка размерности группы автоморфизмов ростка. То, что модельная поверхность Q играет особую роль по отношению ко всему классу невырожденных гиперповерхностей, убедительнее всего, пожалуй, демонстрирует следующая оценка размерности:

$$\dim \operatorname{Aut}\Gamma_\xi \leqslant \dim \operatorname{Aut} Q,$$

имеющая место для любого невырожденного ростка гладкой гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$. Приводимое ниже рассуждение представляет собой некую версию теоремы о неявной функции для формальных рядов с оценкой числа параметров.

Теорема о неявной функции утверждает, что нелинейное уравнение имеет единственное решение, коль скоро единственным решением обладает его линейная часть. В нашей ситуации линейной частью нелинейного соотношения окажется уравнение, совпадающее с уже известным нам уравнением, определяющим алгебру инфинитезимальных автоморфизмов модельной поверхности Q.

Рассмотрим несколько более общую ситуацию. Пусть отображение вида

$$f = z + f_2 + \cdots, \qquad g = w + g_3 + \cdots \tag{4}$$

переводит росток гиперповерхности

$$\operatorname{Im} w = |z|^2 + F(z, \overline{z}, \operatorname{Re} w) \tag{5}$$

в росток гиперповерхности того же вида

$$\operatorname{Im} w = |z|^2 + \widetilde{F}(z, \overline{z}, \operatorname{Re} w), \tag{6}$$

где компоненты F и $\widetilde{F}$ имеют вес три и выше. Записывая то, что (4) переводит (5) в (6), мы получим некое тождество. Вот оно:

$$\operatorname{Im}(w + g_3 + \cdots) = |z + f_2 + \cdots|^2 + \widetilde{F}(z + f_2 + \cdots, \overline{z} + \overline{f}_2 + \cdots, u + \operatorname{Re} g_3 + \cdots),$$

где $w = u + i(|z|^2 + \widetilde{F}(z, \overline{z}, \operatorname{Re} w))$.

Отделяя в этом соотношении компоненту веса $(m+1)$, получаем

$$\operatorname{Re}(i g_{m+1} + 2 f_m \overline{z}) = F_{m+1} - \widetilde{F}_{m+1} + \cdots,$$

где в левой части $w = u + i|z|^2$, а многоточие в правой части – это члены, зависящие от $f_j, g_{j+1}, F_{j+1}, \widetilde{F}_{j+1}$ при $j < m$.

При фиксированных F и $\widetilde{F}$ эти соотношения позволяют рекуррентно вычислять полиномиальные компоненты отображения (f_m, g_{m+1}), решая алгебраическую систему линейных уравнений, правая часть которой зависит от компонент, вычисленных ранее. Размерность множества решений неоднородной системы линейных уравнений не превышает размерности пространства решений однородной. Но однородные уравнения – это в точности уравнения (3), определяющие алгебру $\operatorname{aut} Q$. Поэтому число свободных параметров, задающих отображение в классе формальных степенных рядов указанного вида, не превосходит размерности подалгебры $\operatorname{aut}_+ Q$, которая в данной ситуации равна трем (параметры a и r). И, тем самым, число параметров, задающих произвольное отображение этих ростков, не превосходит размерности всей алгебры $\operatorname{aut} Q$, т.е. восьми. Применяя полученную оценку к отображению ростка в себя, получаем нашу оценку на размерность группы автоморфизмов ростка.

Отметим, что значение проведенного вычисления не сводится только к оценке размерности. Получено большее – указана система параметров, однозначно определяющих отображения одного невырожденного ростка в другой такой росток. В частности, получена параметризация автоморфизмов произвольного ростка. Действительно, рассмотрим систему параметров (p, q, Λ, a, r), определяющую автоморфизм гиперквадрики Q и представляющую собой часть 2-струи этого автоморфизма. Эта система параметров позволяет однозначно определить отображение ростка в росток, при этом эти параметры могут быть связанными дополнительными соотношениями (см. [10]), которые приводят к падению размерности. В общем положении эта размерность равна нулю.

2.4. Что такое хорошая модель? Перечислим основные этапы проведенного исследования.

1. Выбор хорошей модельной поверхности.
2. Вычисление алгебры и группы модельной поверхности.
3. Параметризация отображений ростков алгеброй модельной поверхности.

Сформулируем еще раз свойства хорошей модельной поверхности Q.

1. *Универсальность*: росток любой невырожденной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ эквивалентен ростку вида (2).

2. *Конечномерность*: (a) группа голоморфных автоморфизмов Q конечномерна; (b) любая гиперповерхность, заданная уравнениями степени меньшей, чем два, имеет бесконечномерную группу.

3. *Однородность*: гиперквадрика Q однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно, в данной ситуации однородность обеспечивается аффинными автоморфизмами.

4. *Симметричность*: (a) гиперквадрика является самой симметричной невырожденной гиперповерхностью, т.е. размерность группы ростка невырожденной гиперповерхности не превосходит размерности группы касательной гиперквадрики; (b) алгебра модельной поверхности параметризует семейство отображений одного невырожденного ростка в другой.

5. *Алгебраические свойства*: (a) алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной гиперквадрике – это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей ограниченной степени, в данной ситуации степени коэффициентов не превосходят двойки; (b) группа автоморфизмов невырожденной гиперквадрики – это группа Ли, являющаяся подгруппой группы дробно-линейных преобразований $\mathbb{C}^2$.

В дальнейшем, когда мы будем утверждать, что некая поверхность является хорошей модельной поверхностью для ростков того или иного типа, мы будем стремиться получить для нее, в той или иной редакции, этот список свойств.

Есть свойства, специфические для данной ситуации, – поверхности типа $(1,1)$. Отметим два из них.

(1) Модельная поверхность единственна, т.е. одна и та же квадрика Q является хорошей моделью любого невырожденного ростка типа $(1,1)$.

(2) Модельная поверхность является дробно-линейным образом стандартной сферы. Действительно, замена

$$\widetilde{z} = \frac{z}{w-i}\,, \qquad \widetilde{w} = \frac{i(w+i)}{w-i}$$

переводит $Q = \{\operatorname{Im}\widetilde{w} = |\widetilde{z}|^2\}$ в $\{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$. При этом точке $(0,i)$ соответствует пересечение Q с проективной бесконечностью.

3. Гиперповерхности в $\mathbb{C}^N$

Невырожденные гиперповерхности в пространстве произвольной размерности изучались в ряде работ (см. [58], [21], [64]).

Рассуждения, аналогичные проведенным для $\mathbb{C}^2$, показывают, что уравнение ростка гладкой гиперповерхности в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ с координатами $(z = (z_1, \ldots, z_n),$

$w = u + iv$) можно записать в виде

$$v = \langle z, \overline{z} \rangle + \cdots , \tag{7}$$

где $\langle z, \overline{z} \rangle$ – эрмитова форма (форма Леви), точками обозначены члены веса три и выше (веса вычисляем как и раньше: $[z] = 1$, $[\overline{z}] = 1$, $[u] = 2$). Модельной поверхностью в этой ситуации является гиперквадрика $Q = \{v = \langle z, \overline{z} \rangle\}$. По отношению к гиперповерхности (7) квадрику Q будем называть касательной квадрикой. Условие конечномерности группы $\operatorname{Aut} Q$ – это условие невырожденности эрмитовой формы $\langle z, \overline{z} \rangle$. Если форма невырождена, то невырожденными называем росток гиперповерхности и квадрику. Если форма вырождена, то после ее приведения к сумме квадратов одна из переменных, пусть z_j, будет отсутствовать. Тогда любое преобразование вида $z_j \to f(z_j)$, где $f'(0) \neq 0$ (остальные переменные на месте) является автоморфизмом и группа $\operatorname{Aut} Q$ – бесконечномерна. Если же форма невырождена, то Q является хорошей модельной поверхностью, т.е. имеет место типовой пакет утверждений:

1. *Универсальность*: росток любой гиперповерхности в $\mathbb{C}^{n+1}$ эквивалентен ростку вида (7).

2. *Конечномерность*: (a) группа голоморфных автоморфизмов гиперквадрики общего положения конечномерна; (b) критерием конечномерности группы голоморфных автоморфизмов Q является невырожденность формы $\langle z, \overline{z} \rangle$; (c) любая гиперповерхность, заданная уравнениями степени меньшей, чем два, имеет бесконечномерную группу.

3. *Однородность*: гиперквадрика Q однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно, однородность обеспечивается аффинными автоморфизмами.

4. *Симметричность*: (a) гиперквадрика является самой симметричной невырожденной гиперповерхностью, т.е. размерность группы ростка невырожденной гиперповерхности не превосходит размерности группы касательной гиперквадрики; (b) алгебра модельной поверхности параметризует семейство отображений одного невырожденного ростка в другой.

5. *Алгебраические свойства*: (a) алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной гиперквадрике – это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей ограниченной степени, в данной ситуации степени коэффициентов не превосходят двойки; (b) группа автоморфизмов невырожденной гиперквадрики – это группа Ли, являющаяся подгруппой группы дробно-линейных преобразований $\mathbb{C}^{n+1}$.

Алгебра $\operatorname{aut} Q$ имеет следующую структуру (градуировка та же): $\operatorname{aut} Q = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2$, при этом компоненты имеют следующее явное описание:

$$\begin{aligned}
g_{-2} &= \left\{ 2\operatorname{Re}\left(q\frac{\partial}{\partial w} \right) \right\}, \\
g_{-1} &= \left\{ 2\operatorname{Re}\left(p\frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \overline{p} \rangle \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\}, \\
g_0 &= \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\lambda z\frac{\partial}{\partial z} + \rho w\frac{\partial}{\partial w} \right) \right\}, \\
g_1 &= \left\{ 2\operatorname{Re}\left((aw + 2i\langle z, \overline{a} \rangle z)\frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \overline{a} \rangle w\frac{\partial}{\partial w} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$g_2 = \left\{ 2\,\mathrm{Re}\left(rwz\frac{\partial}{\partial z} + rw^2\frac{\partial}{\partial w} \right) \right\},$$

где $q, r \in \mathbb{R}$, $p, a \in \mathbb{C}^n$, $(n \times n)$-матрица λ и вещественное число ρ связаны соотношением $2\,\mathrm{Re}\langle \lambda z, \overline{z} \rangle = \rho \langle z, \overline{z} \rangle$. Подалгебре $g_- = g_{-2} + g_{-1}$ соответствует подгруппа

$$\mathrm{Aut}_-\, Q = \left\{ z \to z + p,\ w \to w + 2i\langle z, \overline{p} \rangle + (q + i\langle p, \overline{p} \rangle) \right\},$$

действующая на Q транзитивно. Эта подгруппа известна как группа Гейзенберга. Подалгебре $g_0 + g_1 + g_2$ соответствует подгруппа автоморфизмов Q, сохраняющих неподвижным начало координат (подгруппа стабильности). Подалгебра g_0 порождает в этой подгруппе подгруппу $\mathrm{Aut}_0\, Q$ линейных автоморфизмов, которая является связной компонентой группы $\mathrm{LAut}\, Q$ всех линейных автоморфизмов Q, сохраняющих начало координат. Чтобы получить описание этой группы, рассмотрим более общую ситуацию. Пусть отображение вида

$$f = \Lambda z + f_2 + \cdots, \qquad g = \rho w + g_3 + \cdots \tag{8}$$

переводит росток гиперповерхности

$$\mathrm{Im}\, w = \langle z, \overline{z} \rangle_1 + F_1(z, \overline{z}, \mathrm{Re}\, w) \tag{9}$$

в росток гиперповерхности того же вида

$$\mathrm{Im}\, w = \langle z, \overline{z} \rangle_2 + F_2(z, \overline{z}, \mathrm{Re}\, w), \tag{10}$$

где компоненты F_1 и F_2 имеют вес три и выше. Записывая в виде тождества то, что (8) переводит (9) в (10), и отделяя в этом тождестве компоненты веса один и два, получаем, что линейная часть отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Lambda & * \\ 0 & \rho \end{pmatrix},$$

причем $\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z} \rangle_2 = \rho \langle z, \overline{z} \rangle_1$. Из этого вычисления есть несколько следствий:

(1) действие голоморфных отображений на форму Леви сводится к действию группы $GL(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{R}^*$ по формуле $\langle z, \overline{z} \rangle \to \rho \langle \Lambda^{-1} z, \overline{\Lambda^{-1} z} \rangle$;

(2) две модельные гиперповерхности Q_1 и Q_2 голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны линейно;

(3) группа линейных автоморфизмов Q, сохраняющих начало координат, $\mathrm{LAut}\, Q$ имеет вид $z \to \Lambda z$, $w \to \rho w$, где $\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z} \rangle = \rho \langle z, \overline{z} \rangle$; алгебра g_0 является алгеброй этой группы.

Алгебре $g_+ = g_1 + g_2$ соответствует группа $\mathrm{Aut}_+\, Q$, которую составляют нелинейные автоморфизмы Q. Это автоморфизмы, сохраняющие начало координат, линейная часть которых имеет следующий блочный вид:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа $\mathrm{Aut}_+ Q$ состоит из дробно-линейных преобразований $\mathbb{C}^{n+1}$ вида

$$z \to \frac{z + aw}{1 - (2i\langle z, \overline{a}\rangle + (r + i\langle a, \overline{a}\rangle)w)},$$
$$w \to \frac{w}{1 - (2i\langle z, \overline{a}\rangle + (r + i\langle a, \overline{a}\rangle)w)}.$$

Выпишем размерности:

$$\dim g_{-2} = \dim g_2 = 1, \qquad \dim g_{-1} = \dim g_1 = 2n,$$
$$\dim \mathrm{LAut}\, Q = \dim g_0 = n^2 + 1, \qquad \dim \mathrm{Aut}_- Q = \dim \mathrm{Aut}_+ Q = 2n + 1,$$
$$\dim \mathrm{Aut}\, Q = (n+2)^2 - 1.$$

При $n > 1$ имеется конечное множество попарно неэквивалентных модельных гиперповерхностей. Если (μ, ν) – сигнатура невырожденной формы, то единственным инвариантом является $|\mu - \nu|$. Модельная гиперповерхность эквивалентна гиперсфере лишь в случае знакоопределенной формы. При $n = 2$ имеем две неэквивалентных модели $v = |z_1|^2 + |z_2|^2$ и $v = |z_1|^2 - |z_2|^2$. Несмотря на наличие неэквивалентных гиперквадрик, размерности групп одинаковы для всех классов.

Гиперквадрика не является единственной однородной гиперповерхностью в комплексном пространстве. Список таких гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^2$ был получен Э. Картаном в 1932 г. [20]. Этот список наряду с отдельными гиперповерхностями содержит семейства, зависящие от одного вещественного параметра. Список замечателен также тем, что все гиперповерхности заданы как линии уровня элементарных функций.

Серия публикаций А.В. Лободы (см. [40] и др.) направлена на построение классификации однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$. Построен обширный список. Работа, по-видимому, близка к завершению. Список Лободы обладает свойствами списка Картана: конечномерность пространства модулей (двумерные семейства) и представимость элементарными функциями.

4. Квадратичная модель ростка высокой коразмерности

4.1. Построение модели. Пусть теперь M_ξ – росток гладкой поверхности произвольной коразмерности $k \geqslant 1$ в $\mathbb{C}^N$, т.е. совокупность общих нулей ростков нескольких гладких функций, обращающихся в нуль в точке ξ, т.е. $M_\xi = \{\zeta \in \mathbb{C}^N : \rho_1(\zeta) = \cdots = \rho_k(\zeta) = 0\}$. Гладкость ростка гарантируется условием линейной независимости градиентов $(\mathrm{grad}\, \rho_1(\xi), \ldots, \mathrm{grad}\, \rho_k(\xi))$ как векторов пространства $\mathbb{R}^{2N}$. Однако уже на уровне 1-струи может иметь место некое соотношение, от которого мы хотим освободиться. Потребуем, чтобы эти градиенты были комплексно линейно независимы, т.е. линейно независимы над полем комплексных чисел. В этом случае росток называется порождающим, причем если n – размерность комплексной касательной, то $n + k = N$ и вещественная размерность ростка есть $2n + k$.

Итак, пусть M_ξ – росток порождающей поверхности в $\mathbb{C}^{n+k}$ типа (n, k), где $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$. Выбирая подходящим образом координаты $(z = (z_1, \ldots, z_n),\ w = (w_1, \ldots, w_k))$, уравнения ростка можно записать так: $\mathrm{Im}\, w = F(z, \overline{z}, \mathrm{Re}\, w)$, где у F отсутствуют постоянный и линейные члены. А вводя веса координат и осуществляя квадратичное преобразование, по аналогии с тем, что мы делали для гиперповерхности, получаем уравнение ростка в виде

$$\operatorname{Im} w = \langle z, \overline{z} \rangle + O(3). \tag{11}$$

Поверхность $Q = \{\operatorname{Im} w = \langle z, \overline{z} \rangle\}$ по аналогии с гиперповерхностью будем называть касательной квадрикой ростка M_ξ. Основное отличие от случая гиперповерхности состоит в том, что эрмитова форма $\langle z, \overline{z} \rangle = (\langle z, \overline{z} \rangle_1, \dots, \langle z, \overline{z} \rangle_k)$ принимает векторные значения.

Прежде всего в этой новой ситуации встает вопрос о критерии конечномерности группы автоморфизмов квадрики. Есть две очевидные причины потери конечномерности. Во-первых, форма может иметь ненулевое ядро, т.е. найдется вектор $e \neq 0$ такой, что $\langle e, \overline{z} \rangle = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$. Сделаем в $\mathbb{C}^n$ линейную замену, которая переводит e в первый вектор стандартного базиса $(1, 0, \dots, 0)$. После этого форма не будет содержать переменное z_1 ни в одной из координат. Теперь любая замена $z_1 \to f(z_1)$, где $f'(0) \neq 0$ (остальные переменные на месте), является автоморфизмом и группа $\operatorname{Aut} Q$ бесконечномерна. Во-вторых, координатные эрмитовы формы могут оказаться линейно зависимыми. Пусть, например, $\langle z, \overline{z} \rangle_1$ есть линейная комбинация остальных форм, тогда после подходящей линейной замены переменной w форма $\langle z, \overline{z} \rangle_1$ становится равной нулю. Теперь замена $g_1 \to g(w_1)$ (остальные переменные на месте), где g – любой локально обратимый степенной ряд с вещественными коэффициентами, является автоморфизмом и группа $\operatorname{Aut} Q$ опять бесконечномерна. Оказывается, что других причин для бесконечномерности нет, и это является основанием для того, чтобы принять эти два условия в качестве определения невырожденности векторнозначной эрмитовой формы [11].

Определение 1. Говорим, что эрмитова форма $\langle z, \overline{z} \rangle = (\langle z, \overline{z} \rangle_1, \dots, \langle z, \overline{z} \rangle_k)$ и соответствующая ей квадрика невырождены, если

(a) из $\langle e, \overline{z} \rangle = 0$ для всех z следует, что $e = 0$,

(b) формы $(\langle z, \overline{z} \rangle_1, \dots, \langle z, \overline{z} \rangle_k)$ линейно независимы.

При $k = 1$ условие (a) означает обычную невырожденность, а условие (b) есть следствие (a). Отметим сразу, что условие (b) невыполнимо при $k > n^2$, т.е. невырожденность квадрики – это условие, которое является условием общего положения только в диапазоне коразмерностей $k = 1, \dots, n^2$.

Оказывается, что квадрика типа (n, k) при $k \leqslant n^2$ является хорошей моделью ростка того же типа, а именно ([11], [12]) справедливы следующие утверждения.

1. *Универсальность*: любой порождающий росток типа (n, k) в $\mathbb{C}^{n+k}$ эквивалентен ростку вида (11).

2. *Конечномерность*: (a) группа голоморфных автоморфизмов квадрики общего положения является конечномерной группой Ли; (b) критерием конечномерности группы голоморфных автоморфизмов Q является невырожденность формы $\langle z, \overline{z} \rangle$ (в смысле определения 1); (c) любая поверхность, заданная уравнениями степени меньшей, чем два, имеет бесконечномерную группу.

3. *Однородность*: квадрика Q однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно, однородность обеспечивается аффинными автоморфизмами.

4. *Симметричность*: (a) квадрика является самой симметричной невырожденной поверхностью, т.е. размерность группы ростка невырожденной поверхности не превосходит размерности группы ее касательной квадрики; (b) алгебра автоморфизмов квадрики параметризует семейство отображений одного невырожденного ростка в другой.

5. *Алгебраические свойства*: (a) алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной квадрике – это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей ограниченной степени, степени коэффициентов не превосходят двойки; (b) группа автоморфизмов невырожденной квадрики – это группа Ли, являющаяся подгруппой группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+k}$, чьи степени равномерно по всей группе ограничены [60], в качестве оценки степени числителей и знаменателей в несократимом представлении можно взять $4(n+k)$ [13]; (c) если два ростка эквивалентны, то эквивалентны их касательные квадрики, две квадрики голоморфно эквивалентны в том и только том случае, когда они эквивалентны линейно.

Алгебра квадрики сохраняет прежнюю структуру (градуировка та же): $\operatorname{aut} Q = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2$, при этом компоненты имеют следующее явное описание:

$$g_{-2} = \left\{ 2\operatorname{Re}\left(q\frac{\partial}{\partial w} \right) \right\}, \quad \text{где} \quad q \in \mathbb{R}^k;$$

$$g_{-1} = \left\{ 2\operatorname{Re}\left(p\frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \overline{p}\rangle \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\}, \quad \text{где} \quad p \in \mathbb{C}^n;$$

$$g_0 = \left\{ 2\operatorname{Re}\left(\lambda z\frac{\partial}{\partial z} + \rho w\frac{\partial}{\partial w} \right) \right\},$$

где λ и ρ – квадратные матрицы размерностей n и k, связанные соотношением $2\operatorname{Re}\langle \lambda z, \overline{z}\rangle = \rho\langle z, \overline{z}\rangle$;

$$g_1 = \left\{ 2\operatorname{Re}\left((aw + A(z,z))\frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \overline{a}w\rangle \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\},$$

где A – квадратичная форма со значениями в $\mathbb{C}^n$, a – линейное отображение из $\mathbb{C}^k$ в $\mathbb{C}^n$, связанные соотношением $\langle A(z,z), \overline{z}\rangle = 2i\langle z, \overline{a}\langle z, \overline{z}\rangle\rangle$;

$$g_2 = \left\{ 2\operatorname{Re}\left((B(z,w))\frac{\partial}{\partial z} + r(w,w)\frac{\partial}{\partial w} \right) \right\},$$

где B – билинейная форма со значениями в $\mathbb{C}^n$, r – квадратичная форма со значениями в $\mathbb{C}^k$, связанные соотношениями $\operatorname{Re}\langle B(z,u), \overline{z}\rangle = r(\langle z, \overline{z}\rangle, u)$, $\operatorname{Im}\langle B(z, \langle z, \overline{z}\rangle), \overline{z}\rangle = 0$.

Группа, соответствующая $g_- = g_{-2} + g_{-1}$, вполне аналогична той, что была при $k = 1$. Это группа $\operatorname{Aut}_- Q$, состоящая из аффинных преобразований вида

$$\left\{ z \to z + p,\ w \to w + 2i\langle z, \overline{p}\rangle + (q + i\langle p, \overline{p}\rangle) \right\},$$

транзитивно действующая на Q (аналог группы Гейзенберга).

Нетрудно показать, что подгруппа линейных автоморфизмов $\operatorname{LAut} Q$ состоит из преобразований $z \to \Lambda z$, $w \to \rho w$, где $\Lambda \in GL(n, \mathbb{C})$, $\rho \in GL(k, \mathbb{R})$, причем $\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z}\rangle = \rho\langle z, \overline{z}\rangle$. Алгебра g_0 является алгеброй этой группы.

Подалгебре $g_+ = g_1 + g_2$ соответствует подгруппа $\mathrm{Aut}_+ Q$ преобразований Q вида $z \to z + f_2 + \cdots$, $w \to w + g_3 + \cdots$ – подгруппа нелинейных автоморфизмов, сохраняющих начало координат. Столь простого и явного описания этой подгруппы, как при $k = 1$, нет. Результаты, касающиеся ее строения, будут обсуждаться ниже, однако имеет место некое обобщение дробно-линейности, а именно бирациональность + ограниченность степени (теорема Туманова), которую мы включили в общий список под номером 5.(b).

Центральным утверждением данного списка является то, что алгебра невырожденной квадрики состоит из полей с квадратичными коэффициентами. При $k = 1$ – это следствие основной леммы из первой части работы Мозера и Черна [21]. При $k > 1$ конструкция, вполне аналогичная мозеровской, позволяет свести решение основного уравнения (условие касания) в формальных рядах к решению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Но в отличие от случая гиперповерхности, где уравнения были обыкновенными, это будет система в частных производных. В получении критерия конечномерности основную роль играет теорема об экспоненциальном представлении решения линейной, с постоянными коэффициентами системы дифференциальных уравнений с частными производными (Мальгранжа–Паламодова–Эренпрайса). В соответствии с этой теоремой критерием конечномерности пространства решений системы является условие, что характеристическое множество является конечным набором точек. Для системы уравнений, к которой сводится условие касания, невырожденность эрмитовой формы означает, что характеристическое множество состоит только из начала координат. Это одновременно дает полиномиальность решений. Дополнительные рассуждения позволяют доказать, что степени решений, в действительности, не превосходят двух [11], [12].

Пункт 5.(c) нашего списка является следствием того, что действие голоморфных отображений на ростках поверхностей порождает линейное действие на касательных квадриках. Действительно, пусть имеется два эквивалентных ростка

$$M_1 = \{\operatorname{Im} w = \langle z, \overline{z}\rangle_1 + \cdots\} \quad \text{и} \tag{12}$$

$$M_2 = \{\operatorname{Im} w = \langle z, \overline{z}\rangle_2 + \cdots\} \tag{13}$$

и $z \to f(z,w)$, $w \to g(z,w)$ – отображение первого во второй. Тогда из младших компонент возникающего в этой ситуации соотношения нетрудно получить, что $f = \Lambda z + f_2 + \cdots$, $g = \rho w_2 + g_3 + \cdots$, причем $\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z}\rangle_2 = \rho\langle z, \overline{z}\rangle_1$. Отсюда можно сделать два вывода. Во-первых, если M_1 и M_2 это квадрики, то линейное отображение $z \to \Lambda z, w \to \rho w$ отображает первую квадрику на вторую. А во-вторых, действие голоморфного отображения на росток поверхности порождает следующее действие группы $GL(n,\mathbb{C}) \oplus GL(k,\mathbb{R})$ на форму $\langle z, \overline{z}\rangle$: $\langle z, \overline{z}\rangle \to \rho\langle \Lambda^{-1} z, \overline{\Lambda^{-1} z}\rangle$. А это в свою очередь означает, что все инварианты формы по отношению к этому действию оказываются инвариантами ростка по отношению к биголоморфным преобразованиям. К построению этих инвариантов мы вернемся ниже.

Форма Леви имеет внутреннее определение (см., например, [22]) через коммутатор векторных полей. После выбора дополнения комплексной касательной до всего касательного пространства эта форма становится эрмитовой формой на комплексной касательной со значениями в этом дополнении, совпадающей с формой $\langle z, \overline{z}\rangle$ – формой Леви ростка в отмеченной точке. Это определение можно распространить на абстрактно определенные CR-многообразия. При этом если два ростка CR-многообразий CR-эквивалентны, то их формы Леви связаны посредством вышеуказанного действия $GL(n,\mathbb{C})\oplus GL(k,\mathbb{R})$. Поэтому любые инварианты векторной эрмитовой формы относительно этого действия автоматически являются CR-инвариантами CR-многообразия.

Условие невырожденности является самым слабым условием, гарантирующим конечномерность. Есть и другие вполне естественные условия, из которых условие невырожденности следует.

Так, квадрика называется сильно невырожденной, если координатные формы $\langle z,\overline{z}\rangle = (\langle z,\overline{z}\rangle_1,\dots,\langle z,\overline{z}\rangle_k)$ линейно независимы и из них можно составить невырожденную, в обычном, скалярном смысле, линейную комбинацию. Для квадрик типа $(2,2)$ оба определения эквивалентны. Самая маломерная ситуация, где они различаются, это тип $(3,2)$. Вот простейший пример невырожденной квадрики, не являющейся сильно невырожденной:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сильно невырожденная квадрика называется положительно определенной, если среди линейных комбинаций координатных форм есть положительно определенная. Положительно определенные квадрики – это остовы (границы Шилова) областей Зигеля второго рода. Области Зигеля играют большую роль в теории однородных ограниченных областей и автоморфных функций [34], [48], [42].

С каждой векторнозначной эрмитовой формой $\langle z,\overline{z}\rangle$ можно связать конус $C = \operatorname{int}(\operatorname{conv}(\{\langle z,\overline{z}\rangle : z\in\mathbb{C}^n\}))$, т.е. множество внутренних точек выпуклой оболочки образа пространства $\mathbb{C}^n$ под действием отображения, осуществляемого формой. Если конус C непустой и острый, то соответствующая область Зигеля

$$D = \big\{(z,w)\in\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^k : \operatorname{Im} w - \langle z,\overline{z}\rangle\in C\big\}$$

является однородной областью, биголоморфно эквивалентной ограниченной.

Область D при этом является оболочкой голоморфности квадрики $Q = \{(z,w)\in\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^k : \operatorname{Im} w = \langle z,\overline{z}\rangle\}$ [42]. Таким образом, положительно определенные квадрики являются объектом, общим для обеих теорий: как для теории однородных ограниченных областей, так и для рассматриваемой нами теории хороших моделей. Ряд обсуждаемых здесь результатов для частного случая положительно определенных квадрик были получены как результаты об областях Зигеля и их остовах. Это касается конечномерности группы автоморфизмов такой квадрики, бирациональности ее автоморфизмов, описания структуры алгебры ее инфинитезимальных автоморфизмов [50].

4.2. О классификации квадрик. Как было отмечено выше, действие голоморфных отображений на ростках типа (n,k) порождает следующее действие группы $GL(n,\mathbb{C})\oplus GL(k,\mathbb{R})$ на форму $\langle z,\overline{z}\rangle$: $\langle z,\overline{z}\rangle \to \rho\langle\Lambda^{-1}z,\overline{\Lambda^{-1}z}\rangle$. Если же представлять форму набором эрмитовых матриц $(H_1,\dots,H_k)$, то это действие вида $(\Lambda,\rho)(H_1,\dots,H_k) = \rho((\Lambda^*)^{-1}H_1\Lambda^{-1},\dots,(\Lambda^*)^{-1}H_k\Lambda^{-1})$. Есть простой способ, позволяющий редуцировать это действие к действию группы $GL(n,\mathbb{C})$. Нужно перейти от записи квадрики как набора из k линейно независимых векторов вещественного линейного пространства эрмитовых матриц к сопоставлению квадрике k-мерной плоскости в этом пространстве. Таким образом, если не различать квадрики, отличающиеся линейной заменой переменной w, то множество квадрик типа (n,k) отождествляется с вещественным грассмановым многообразием $Gr_k(\mathbb{R}^{n^2})$. В таком представлении действие сводится к действию $GL(n,\mathbb{C})$ на этом грассмановом многообразии. Классы эквивалентных квадрик – это орбиты данного действия. Линейная подгруппа группы автоморфизмов некоторой квадрики соответствует подгруппе в $GL(n,\mathbb{C})$, сохраняющая соответствующую k-мерную плоскость.

Классификация квадрик произвольного типа по отношению к этому действию представляется весьма необозримой задачей. Однако для некоторых типов квадрик, а именно для $k=1,2,n^2-2,n^2-1,n^2$, эта задача имеет хороший ответ. Число классов эквивалентности невырожденных квадрик типа $(n,1)$ конечно и равно целой части числа $\frac{n+2}{2}$. Все невырожденные квадрики типа (n,n^2) эквивалентны, так как каждая из них представлена базисным набором из n^2 матриц, а любые два базиса связаны линейным преобразованием. Таким образом, имеется лишь один класс таких квадрик. Задача классификации квадрик коразмерности два была полностью решена в работах С. Шевченко [52], [53].

4.3. Квадрики коразмерности два. Квадрики коразмерности два – это тип $(n,2)$, следующий за гиперквадриками. Квадрика типа $(n,2)$ задается парой эрмитовых матриц H_1 и H_2, т.е. $Q=\{\operatorname{Im} w_1 = H_1 z\cdot\overline{z}, \operatorname{Im} w_2 = H_2 z\cdot\overline{z}\}$. Классификация пары эрмитовых форм с точностью до линейных замен переменного z – это одна из классических задач линейной алгебры. Общеизвестна возможность одновременного приведения пары форм к диагональному виду при условии, что одна из форм положительно определена. Довольно известной является теорема о каноническом виде пары форм при условии, что одна из форм невырождена [35]. Однако даже для классификации невырожденных квадрик этого недостаточно, так как есть невырожденные квадрики коразмерности два такие, что все линейные комбинации координатных форм вырождены. Поэтому классификационная теорема требуется в полном объеме [62]. На основе этой классификации и используя дополнительную возможность, связанную с возможностью перехода к линейной комбинации форм, Шевченко строит полную классификацию квадрик коразмерности два.

Каждой паре эрмитовых матриц (H_1,H_2) сопоставляется пучок матриц $(t_1H_1 + t_1H_2)$, его характеристический многочлен $\det(t_1H_1+t_2H_2)$, где $(t_1:t_2)\in\mathbb{CP}^1$, совокупность корней этого многочлена, а также некоторый набор целочисленных параметров: минимальные индексы и множители инерции (см. [62]). Для того чтобы две пары эрмитовых форм были эквивалентны посредством замены переменного z, необходимо и достаточно совпадение следующего набора данных: корней, минимальных индексов и множителей инерции. Изучение действия $GL(2,\mathbb{R})$ (замены переменной w) на этом множестве данных позволяет дать критерий эквивалентности двух квадрик. Он заключается в том, что первый набор корней переводится во второй дробно-линейным преобразованием с вещественными коэффициентами, и в выполнении некоторых соотношений между минимальными индексами и множителями инерции первой и второй пары.

Канонический вид пары матриц имеет блочно-диагональную форму (наподобие жордановой нормальной формы), где на диагоналях стоят пары клеток трех видов: первый соответствует вещественному корню и имеет в качестве своих параметров кроме самого корня размер клетки и множитель инерции, второй соответствует паре комплексно сопряженных корней и определяется корнем и размером клетки (четное число), третий соответствует корню на бесконечности и определяется только размером клетки (нечетное число). Размеры клеток первого и второго видов определяются элементарными делителями пучка, а третьего – минимальными индексами. Канонический вид сильно невырожденных квадрик содержит лишь клетки первых двух типов.

Характеристический многочлен имеет в общем положении n различных корней. Система из n различных упорядоченных точек на комплексной плоскости при $n \geqslant 4$ по отношению к группе дробно-линейных преобразований описывается системой из $n-3$ числовых инвариантов (двойные отношения), эта совокупность параметров вместе с дискретными инвариантами задает класс эквивалентности квадрик коразмерности два. Поэтому при $n \leqslant 3$ число классов эквивалентности квадрик типа $(n, 2)$ конечно: при $n = 2$ их три, при $n = 3$ – десять.

Описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов квадрики, приведенное выше, является явным с точностью до получения значений параметров $(p, q, \Lambda, \rho, a, A, B, r)$ из определяющих соотношений (см. п. 4.1). Для фиксированной квадрики эти соотношения являются системой линейных алгебраических уравнений на неизвестные значения параметров. Коэффициенты этих уравнений зависят от элементов эрмитовых матриц, задающих форму $\langle z, \overline{z} \rangle$. Эта зависимость почти во всех соотношениях линейная и лишь в одном – квадратичная. Полученная для коразмерности два классификация позволяет дать явное описание пространства решений этой системы и ответить на ряд качественных вопросов. Прежде всего это вопросы о размерностях градуированных компонент алгебры $\operatorname{aut} Q = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2$. Параметры p и q, задающие компоненты g_{-2} и g_{-1}, не связаны никакими соотношениями, соответственно для любой квадрики коразмерности два $\dim g_{-2} = 2$ и $\dim g_{-1} = 2n$. В [52] приводятся описание g_0, g_1, g_2 и вычисление их размерностей через инварианты пучка $t_1 H_1 + t_2 H_2$. Сформулируем некоторые результаты этой работы.

1. Пусть квадрика сильно невырожденная. Можно считать, что $\det H_1 \neq 0$, положим $H = (H_1)^{-1} H_2$. Возможны три случая.

1.1. Если матрица H диагонализуема (заменами переменной z) и имеет два различных собственных значения, то $\dim g_1 = 2n$, $\dim g_2 = 2$.

1.2. Если H имеет единственное собственное значение λ и $(H - \lambda E)^2 = 0$, то также $\dim g_1 = 2n$, $\dim g_2 = 2$.

1.3. В остальных случаях $\dim g_1 = 0$, $\dim g_2 = 0$.

2. Если невырожденная квадрика не является сильно невырожденной, то $\dim g_1 < 2n$, $\dim g_2 = 2$.

3.1. Если $n = 2$, то $4 \leqslant \dim g_0 \leqslant 5$.

3.2. Если $n \geqslant 3$, то $n + 1 \leqslant \dim g_0 \leqslant (n-1)^2 + 4$.

Таким образом:

$$\text{при } n = 2 \quad 10 \leqslant \dim g_0 + \dim g_1 + \dim g_2 \leqslant 11,$$
$$\text{при } n \geqslant 3 \quad n + 1 \leqslant \dim g_0 + \dim g_1 + \dim g_2 \leqslant n^2 + 7.$$

Любая невырожденная квадрика типа $(2,2)$ эквивалентна одной из трех квадрик: Q_1, Q_{-1} или Q_0.

$$Q_1 = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1\}.$$

Характеристический многочлен Q_1 имеет два вещественных корня. Данная квадрика является прямым произведением двух квадрик типа $(1,1)$ и в других координатах может быть записана в виде $Q_1 = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2, \operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2\}$. Вот данные о размерностях компонент алгебры: $\dim g_0 = 4$, $\dim g_1 = 4$, $\dim g_2 = 2$. Отметим, что эта квадрика положительно определенная, т.е. является каноническим видом любой положительно определенной квадрики типа $(2,2)$.

$$Q_{-1} = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2 - |z_2|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1\}.$$

Характеристический многочлен Q_{-1} имеет два комплексно-сопряженных корня. Размерности компонент алгебры – те же, что и у Q_1.

$$Q_0 = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1\}.$$

Характеристический многочлен Q_0 имеет один кратный корень, $\dim g_0 = 5$, $\dim g_1 = 4, \dim g_2 = 2$.

Ежов и Шмальц предложили называть квадрику Q_1 гиперболической, Q_{-1} эллиптической и Q_0 параболической. В 8-мерном вещественном линейном пространстве квадрик типа $(2,2)$ квадрики, эквивалентные Q_1 и Q_{-1}, лежат по разные стороны от конической гиперповерхности второго порядка, на которой располагаются квадрики, эквивалентные Q_0. Все три квадрики являются сильно невырожденными, т.е. всякая невырожденная квадрика типа $(2,2)$ является сильно невырожденной [39], [12], [26].

Каждая квадрика типа $(3,2)$ эквивалентна одной и только одной квадрике из следующего списка из десяти позиций. Данные по размерностям компонент g_0, g_1, g_2 приводим в виде строки $(d_0 + d_1 + d_2 = d)$.

Квадрики Q_1 и Q_2 – это случай трех различных вещественных собственных значений, что для квадрики означает диагонализуемость (одновременное приведение к сумме квадратов). При этом Q_1 положительно определена.

$$Q_1 = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2 - |z_3|^2\} \qquad (4+0+0=4),$$
$$Q_2 = \{\operatorname{Im} w_1 = -|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2 - |z_3|^2\} \qquad (4+0+0=4).$$

Следующие четыре квадрики – случай двух вещественных собственных значений. У Q_3 и Q_4 все клетки в каноническом виде первого порядка, обе квадрики приводимы (прямое произведение двух гиперквадрик), причем Q_3 положительно определена, а Q_4 – нет. Q_5 и Q_6 в каноническом виде имеют клетку второго порядка.

$$Q_3 = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = |z_3|^2\} \qquad (7+6+2=15),$$
$$Q_4 = \{\operatorname{Im} w_1 = -|z_1|^2 + |z_2|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = |z_3|^2\} \qquad (7+6+2=15),$$
$$Q_5 = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3),\ \operatorname{Im} w_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2\} \qquad (6+0+0=6),$$
$$Q_6 = \{\operatorname{Im} w_1 = -|z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3),\ \operatorname{Im} w_2 = -|z_1|^2 + |z_2|^2\} \qquad (6+0+0=6).$$

Следующие две квадрики – это единственное собственное значение. Q_7 – это случай клеток первого и второго порядков, Q_8 – клетка третьего порядка.

$$Q_7 = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3),\ \operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2\} \qquad (8+6+2=16),$$

$$Q_8 = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3),\ \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)\} \qquad (6+0+0=6).$$

Следующая квадрика – это случай одного вещественного и пары комплексно сопряженных собственных значений:

$$Q_9 = \{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3),\ \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Im}(z_2\overline{z}_3)\} \qquad (4+0+0=4).$$

Последняя, десятая квадрика – это невырожденная квадрика, не являющаяся сильно невырожденной (нуль-квадрика). В каноническом виде ей соответствует клетка третьего вида.

$$Q_{10} = \{\operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3),\ \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3)\} \qquad (8+2+0=10).$$

Размерность пространства решений системы линейных уравнений определяется ее рангом. Поскольку коэффициенты системы зависят от коэффициентов эрмитовых форм не более чем квадратично, то стратификация квадрик по рангам градуированных компонент дается полиномиальными соотношениями (равенство нулю миноров). Поэтому вне собственного алгебраического подмножества в пространстве квадрик (прямая сумма k экземпляров пространства эрмитовых матриц) все размерности будут находиться на своей нижней границе. Таким образом, квадрика типа $(3,2)$ общего положения – это либо Q_1, либо Q_2, либо Q_9. Все три случая – это три различных собственных значения. В первых двух они вещественны, в третьем есть пара комплексно-сопряженных. Первый, в отличие от второго, положительно определенный.

Для квадрики общего положения типа $(n,2)$ при $n \geqslant 3$ размерности компонент следующие: $\dim g_0 = n+1$, $\dim g_1 = \dim g_2 = 0$. То, что эта нижняя оценка достигается и, тем самым, реализуется для квадрики общего положения, показывает любая диагонализуемая квадрика с различными корнями характеристического многочлена, например,

$$\{\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = 1|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + \cdots + n|z_n|^2\}.$$

Квадрика типа $(n,2), n \geqslant 2$, на которой достигаются все верхние оценки размерностей компонент (см. выше), – это

$$\{\operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_3|^2 + \cdots + |z_n|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = |z_1|^2\}.$$

Компоненты имеют следующие размерности: $\dim g_{-2} = \dim g_2 = 2$, $\dim g_{-1} = \dim g_1 = 2n$, $\dim g_0 = (n-1)^2 + 4$. Отметим, что это суммарно на единицу больше (из-за g_0), чем размерность алгебры приводимой, т.е. распадающейся в прямое произведение, квадрики

$$\{\operatorname{Im} w_1 = |z_2|^2 + |z_3|^2 + \cdots + |z_n|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = |z_1|^2\}.$$

Полученное описание алгебры автоморфизмов позволило Ежову и Шмальцу доказать, что любой автоморфизм невырожденной $(n,2)$-квадрики реализуется рациональным отображением, чья степень не превосходит двух [26]. Напомним, что для гиперквадрик автоморфизмы – это дробно-линейные преобразования. Для сильно невырожденных квадрик коразмерности два этот результат ранее был получен Абросимовым [1]. Его работа основана на другой технике и независима от классификации Шевченко.

4.4. Феномен жесткости и исключительные квадрики. Случай коразмерности один обладает особенностью, которая довольно редко встречается в более высоких коразмерностях. Малая деформация невырожденной гиперквадрики в классе гиперквадрик дает гиперквадрику, эквивалентную исходной. Это обстоятельство позволяет применять к гиперповерхностям технологию Э. Картана и методы теории G-структур [55], [58], [21; часть II], [61]. Есть еще два особых случая, обладающих тем же свойством, это две последних (для невырожденных квадрик) коразмерности $k = n^2 - 1$ и $k = n^2$. Причем эти случаи являются особыми еще в одном отношении: любая такая квадрика обладает нетривиальной нелинейной подгруппой $\mathrm{Aut}_+ Q$. Оказывается, что при $2 \leqslant k \leqslant n^2 - 2$ у квадрики общего положения (т.е. вне некоторого собственного алгебраического множества) нелинейных автоморфизмов нет. Более того, при $3 \leqslant k \leqslant n^2 - 3$ линейная подгруппа автоморфизмов квадрики общего положения $\mathrm{LAut}\, Q$ тривиальна в следующем смысле. Эта подгруппа состоит лишь из скалярных растяжений $\{z \to \lambda z,\, w \to |\lambda|^2 w,\, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ [12], [45], [30]. Такие квадрики называются жесткими. При этом отсутствие нелинейных автоморфизмов называем N-жесткостью, а отсутствие нетривиальных линейных автоморфизмов L-жесткостью, т.е. жесткость – это одновременное наличие обоих условий. Можно говорить отдельно о g_0-жесткости ($\dim g_0 = 2$), g_1-жесткости ($\dim g_1 = 0$) и g_2-жесткости ($\dim g_2 = 0$). Между этими условиями имеются связи, например g_2-жесткость следует как из g_0-жесткости [12], так и из g_1-жесткости [44]. Группа автоморфизмов жесткой квадрики состоит из аффинных преобразований, составляющих группу $\mathrm{Aut}_- Q$, которая одинакова у всех квадрик данного типа, и скалярных растяжений. Ситуация $k = 2$, как и $k = n^2 - 2$, требует оговорок, так как здесь подгруппа линейных автоморфизмов квадрики общего положения имеет размерность $(n + 1)$ и не сводится, тем самым, к скалярным растяжениям.

Наличие некоторой симметрии между квадриками типа (n, k) и $(n, n^2 - k)$ имеет свою причину. Квадрика коразмерности k – это набор из k линейно независимых эрмитовых матриц. Если не различать квадрики, связанные линейной заменой переменного w, то это k-мерная плоскость в n^2-мерном вещественном линейном пространстве эрмитовых матриц $\mathscr{H}$. У этой плоскости есть двойственное описание – описание в виде совокупности общих нулей независимого набора из $n^2 - k$ линейных форм на $\mathscr{H}$. Фиксируя изоморфизм между $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}^*$, мы получаем соответствие между квадриками типа (n, k) и $(n, n^2 - k)$. При этом линейные подгруппы $\mathrm{LAut}\, Q$, соответствующие двойственным квадрикам, оказываются изоморфными.

Жесткость квадрики общего положения в диапазоне коразмерностей от 3 до $n^2 - 3$ оставляет возможность для существования исключительных квадрик с нелинейными автоморфизмами и нетривиальной линейной подгруппой. Есть простой способ строить такие квадрики: это прямое произведение квадрик. Если сомножители невырождены, то алгебра произведения есть прямая сумма алгебр сомножителей и группа соответственно есть прямое произведение групп автоморфизмов сомножителей [12]. Если сомножители имели нетривиальные группы, то нетривиальна будет и группа произведения. В списке квадрик типа $(3, 2)$ такими приводимыми квадриками являются Q_3 и Q_4. Размерности подгрупп, сохраняющих начало координат, для обеих квадрик равны 15. Причина появления богатых групп автоморфизмов для этих квадрик ясна. Размерность складывается из размерностей группы гиперквадрики типа $(2, 1)$ – 10 и типа $(1, 1)$ – 5. Однако в списке имеется неприводимая квадрика Q_7 с подгруппой стабильности размерности 16. Таким образом, задача классификации квадрик с нелинейными автоморфизмами и поиска самой симметричной невырожденной квадрики, т.е. квадрики, чья группа имеет максимальную для данного типа размерность, является вполне содержательной. Для квадрик коразмерности два эта задача решается на основе классификации Шевченко (см. выше).

Для квадрик типа $(3,3)$, т.е. квадрик коразмерности три в $\mathbb{C}^6$, эта задача была решена Н. Палинчак [43], [44]. Любая $(3,3)$-квадрика, обладающая нелинейными автоморфизмами, эквивалентна одной из следующих восьми квадрик. Данные по размерностям компонент приводим в прежнем формате: $\dim g_0 + \dim g_1 + \dim g_2$. Напомним, что $\dim g_{-2} + \dim g_{-1} = 3 + 6 = 9$ для всех квадрик этого типа и что $\dim Q = 2n + k = 9$.

$$\begin{aligned}
&Q_1\colon \quad \operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2, \quad \operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_3 = |z_3|^2,\\
&Q_2\colon \quad \operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2 - |z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_3 = |z_3|^2,\\
&Q_3\colon \quad \operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2, \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_3 = |z_3|^2.
\end{aligned}$$

Первые три квадрики – это прямое произведение одной $(2,2)$-квадрики (список см. выше) и единственной $(1,1)$-квадрики. Поскольку первая $(2,2)$-квадрика списка есть прямое произведение двух $(1,1)$-квадрик, то Q_1 является прямым произведением трех $(1,1)$-квадрик. Вот размерности групп: $Q_1 - (6+6+3=15)$, $Q_2 - (6+6+3=15)$, $Q_3 - (7+6+3=16)$;

$$\begin{aligned}
&Q_4: \quad \operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2, \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3) + |z_2|^2\\
&\qquad (8+6+3=17);\\
&Q_5\colon \quad \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2)\\
&\qquad (10+6+3=19);\\
&Q_6\colon \quad \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_3 = |z_3|^2\\
&\qquad (10+6+3=19);\\
&Q_7\colon \quad \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Im}(z_2\overline{z}_3)\\
&\qquad (8+6+3=17);\\
&Q_8\colon \quad \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3) + |z_2|^2\\
&\qquad (7+2+1=10).
\end{aligned}$$

Напомним, что $(3,3)$-квадрика общего положения является жесткой, т.е. $(2+0+0=2)$. В приведенном списке нет квадрик, чья группа автоморфизмов линейна, но нетривиальна ($\dim g_0 > 2$). Однако самая грубая оценка показывает, что $\dim g_0 \leqslant 18$. Поэтому можно утверждать, что размерность группы любой $(3,3)$-квадрики не превосходит 19, и если размерность группы некоторой квадрики равна 19, то квадрика эквивалентна либо Q_5, либо Q_6. В работе А. Арбатского [4] для каждой из квадрик списка вычислена группа автоморфизмов. Все автоморфизмы реализуются бирациональными преобразованиями $\mathbb{C}^6$, чьи степени не превосходят трех.

$(3,4)$-квадрика общего положения является жесткой, т.е. имеет структуру $(2+0+0)$. Классификация квадрик типа $(3,4)$, т.е. квадрик коразмерности 4 в $\mathbb{C}^7$, с нелинейными автоморфизмами была построена Е. Анисовой [2], [3]. Любая такая квадрика эквивалентна одной из девяти попарно неэквивалентных квадрик данного списка:

$$
\begin{aligned}
Q_1:\quad & \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3),\\
& \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_4 = 2\operatorname{Im}(z_2\overline{z}_3) \quad (10+6+4=20);\\
Q_2:\quad & \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3),\\
& \operatorname{Im} w_3 = |z_3|^2, \quad \operatorname{Im} w_4 = 2\operatorname{Im}(z_2\overline{z}_3) \quad (11+6+4=21);\\
Q_3:\quad & \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2),\\
& \operatorname{Im} w_3 = |z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_4 = |z_1|^2 \quad (8+2+1=11);\\
Q_4:\quad & \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_2 = -2\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2),\\
& \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_4 = |z_2|^2 \quad (8+2+1=11);\\
Q_5:\quad & \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_2 = -2\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2),\\
& \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3), \quad \operatorname{Im} w_4 = |z_1|^2+|z_2|^2 \quad (7+2+1=10);\\
Q_6:\quad & \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_2 = -2\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2),\\
& \operatorname{Im} w_3 = |z_1|^2, \quad \operatorname{Im} w_4 = |z_3|^2 \quad (10+4+4=18);\\
Q_7:\quad & \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_2 = -2\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2),\\
& \operatorname{Im} w_3 = |z_1|^2, \quad \operatorname{Im} w_4 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_3)+|z_2|^2 \quad (8+4+2=14);\\
Q_8:\quad & \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_2 = |z_1|^2,\\
& \operatorname{Im} w_3 = |z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_4 = |z_3|^2 \quad (7+2+2=11);\\
Q_9:\quad & \operatorname{Im} w_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2), \quad \operatorname{Im} w_2 = 2\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2),\\
& \operatorname{Im} w_3 = |z_1|^2-|z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_4 = |z_3|^2 \quad (7+2+1=10).
\end{aligned}
$$

Следует отметить, что первые две квадрики не являются сильно невырожденными, при этом вторая из них Q_2 является самой симметричной квадрикой типа $(3,4)$. Среди этих квадрик присутствуют приводимые квадрики – прямые произведения различных $(2,3)$-квадрик на единственную гиперквадрику типа $(1,1)$, это Q_6, Q_8 и Q_9.

Как классификация Палинчак, так и классификация Анисовой построены на основе классификации Шевченко пар эрмитовых матриц третьего порядка. Обе классификации для доказательства попарной неэквивалентности полученных квадрик кроме размерностей компонент алгебр используют квадратичные инварианты, построенные в [13], [14], которые мы обсудим ниже.

Как видно из приведенных классификаций, во всех перечисленных случаях имеет место любопытная симметрия: $\dim g_j \leqslant \dim g_{-j}$, $j = 1,2$, причем верхняя граница достижима. В связи в этим, в качестве гипотезы, предполагалось, что это верно для квадрик всех типов. Однако недавно П. Уткиным [63] было показано, что для $(5,3)$-квадрик эта симметрия может нарушаться. Этот пример обобщается на $n \geqslant 5$, $k \geqslant 3$.

С исключительными квадриками, имеющими нелинейные автоморфизмы связан интересный вопрос об оценке их степени. В соответствии с теоремой Туманова [60] группа автоморфизмов – это группа Ли, действующая на квадрике бирациональными преобразованиями $\mathbb{C}^{n+k}$ ограниченной степени. Используя то, что алгебра автоморфизмов состоит из полей, чьи степени не превосходят двух, можно доказать, что степени автоморфизмов не превосходят $4(n+k)$. Однако, несмотря на обилие изученных ситуаций, никто не смог предъявить квадрики, чьи автоморфизмы имеют степень больше k. Квадрик, для которых степень равна коразмерности, достаточно много: они есть в списках Шевченко, Палинчак и Анисовой, такие квадрики легко конструируются как прямое произведение гиперквадрик, такую же степень имеют автоморфизмы однородных областей Зигеля II-го рода. Но общее утверждение остается пока лишь в виде гипотезы.

Гипотеза о степени. Группа автоморфизмов невырожденной квадрики типа (n,k) действует бирациональными преобразованиями $\mathbb{C}^{n+k}$, чьи степени (числителей и знаменателя в несократимой записи) не превосходят коразмерности, т.е. k.

Тот тип групп, которые возникают здесь в качестве групп автоморфизмов невырожденных квадрик, достоин внимания. Это подгруппы группы бирациональных преобразований комплексного линейного пространства (группы Кремоны), состоящие из преобразований ограниченной степени. Если подставить рациональное преобразование в себя, то степень композиции увеличится. Это рассуждение, конечно, требует "общности положения", и наличие наших групп это и есть те примеры, которые его опровергают. Есть пример, где причина того, что степень при подстановке не возрастает, очевидна. Это пример проективных преобразований. Поэтому естественно стремление объяснить существование таких подгрупп с помощью сведения их к проективным преобразованиям. В этом отношении представляет интерес следующая теорема (Д. Зайцев [66]):

Пусть G – вещественная связная группа Ли, действующая в $\mathbb{C}^n$ бирациональными преобразованиями, голоморфными в некоторой области (одной для всей группы). Тогда существует линейное представление G на некотором $\mathbb{C}^{N+1}$ и бирациональное G-эквивариантное отображение из $\mathbb{C}^n$ на $\mathbb{CP}^N$.

Условие того, что автоморфизмы области продолжаются до бирациональных преобразований объемлющего пространства, приведено в работе Вебстера [65]. Для групп автоморфизмов квадрик теорема Зайцева не применима, но это не означает, само по себе, что не справедливо ее заключение. Отметим, забегая вперед, что группы автоморфизмов модельных поверхностей, степеней более высоких, чем два, обладают тем же свойством. Это подгруппы группы Кремоны ограниченной степени.

4.5. Вещественные ассоциативные квадрики. Ежов и Шмальц [28] описали очень любопытный класс квадрик типа (k,k). Пусть $\mathbf{A}$ – вещественная k-мерная коммутативная ассоциативная алгебра, $\mathbf{A}_{\mathbb{C}} = \mathbf{A} \otimes \mathbb{C}$ – ее комплексификация. Тогда этой алгебре можно сопоставить квадрику

$$Q = \left\{ (z,w) \in \mathbf{A}_{\mathbb{C}} \otimes \mathbf{A}_{\mathbb{C}} : \frac{1}{2i}(w - \overline{w}) = z\overline{z} \right\},$$

т.е. $\mathbb{R}^k$-значная эрмитова форма – это произведение $z\overline{z}$ в алгебре $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$. Обратно, квадрика типа (k,k) допускает такое представление тогда и только тогда, когда в подходящих координатах форма $\langle \cdot , \cdot \rangle$ определяет вещественное ассоциативное произведение в $\mathbb{R}^k$. Коммутативность этого произведения следует из эрмитовости.

Эти квадрики авторы называют RAQ-квадриками (Real Associative Quadrics), поэтому мы их будем называть ВАК-квадриками (Вещественные Ассоциативные Квадрики).

Условие ассоциативности эквивалентно тому, что соответствие

$$\tau\colon \mathbf{A} \to \mathbf{gl}(\mathbb{R}, k), \qquad x \mapsto \langle\,\cdot\,, x\rangle$$

является гомоморфизмом алгебр. Невырожденность ВАК-квадрики эквивалентна тому, что $\mathbf{A}$ обладает единицей. Распадение квадрики в прямое произведение соответствует разложению алгебры в прямую сумму.

Единственная невырожденная $(1,1)$-квадрика является ВАК-квадрикой. Алгебра, ей соответствующая, это $\mathbb{R}$.

Все три невырожденные $(2,2)$-квадрики Q_1, Q_0 и Q_{-1} также являются ВАК-квадриками. Им соответствуют следующие алгебры: $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}\otimes\mathbf{n}\mathbb{R}$ ($\mathbf{n}$ – это нильпотентный элемент, $\mathbf{n}^2=0$).

С $(3,3)$-квадриками из списка Палинчак ситуация следующая. Квадрики Q_1, Q_2, Q_3 приводимы (эквивалентны прямому произведению) и, поэтому, являются ВАК-квадриками. Из пяти неприводимых квадрик ВАК-квадриками являются лишь две: Q_4 и Q_6. Им соответствуют $\mathbb{R}\otimes\mathbf{n}_1\mathbb{R}\otimes\mathbf{n}_2\mathbb{R}$, где $\mathbf{n}_1^2=\mathbf{n}_2^2=\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2=0$ и $\mathbb{R}\otimes\mathbf{n}\mathbb{R}\otimes\mathbf{n}^2\mathbb{R}$, где $\mathbf{n}^3=0$.

Группа нелинейных автоморфизмов $\operatorname{Aut}_+ Q$ ВАК-квадрики Q определяется формулой, полностью аналогичной формуле для автоморфизмов $(1,1)$-квадрики:

$$\begin{aligned} z &\mapsto (\operatorname{Id}_k - 2i\overline{a}z - (r + ia\overline{a})w)^{-1}(z + aw),\\ w &\mapsto (\operatorname{Id}_k - 2i\overline{a}z - (r + ia\overline{a})w)^{-1}w, \end{aligned}$$

где $a\in\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ и $r\in\mathbf{A}$. Таким образом, для ВАК-квадрики $\dim\operatorname{Aut}_+ Q = 3k$, при этом $\dim g_1 = 2k$ и $\dim g_2 = k$. Это, в частности, означает, что в списке Палинчак присутствуют все $(3,3)$-ВАК-квадрики. Причина появления нелинейных автоморфизмов у оставшихся трех квадрик не ясна. Даже среди двух квадрик с самыми богатыми группами – Q_5 и Q_6 – одна (Q_5) ВАК-квадрикой не является. Возможно, за этими квадриками скрываются какие-то другие алгебраические структуры.

4.6. Матричная арифметика Ежова–Шмальца. Результаты этого раздела также получены Ежовым и Шмальцом [26]–[29], [31].

Как это видно из классификации Шевченко, $(n,2)$-квадрики, обладающие нелинейными автоморфизмами, по аналогии с классификацией $(2,2)$-квадрик можно поделить на гиперболические, эллиптические, параболические и нуль-квадрики. Гиперболические квадрики – это прямое произведение двух гиперквадрик, их можно задать соотношениями:

$$v_1 = \sum_1^r \varepsilon_i|z_i|^2, \qquad v_2 = \sum_{r+1}^n \varepsilon_i|z_i|^2;$$

эллиптические квадрики имеются только в четной размерности, они задаются соотношениями:

$$v_1 = \sum_1^{n/2} \operatorname{Re}(z_{2i-1}\overline{z}_{2i}), \qquad v_2 = \sum_1^{n/2} \operatorname{Im}(z_{2i-1}\overline{z}_{2i});$$

параболические:

$$v_1 = \sum_1^s \varepsilon_i |z_{2i}|^2, \qquad v_2 = \sum_1^s 2\operatorname{Re}(z_{2i-1}\overline{z}_{2i}) + \sum_{2s+1}^n \varepsilon_i |z_i|^2;$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$.

Будем представлять переменное z матрицей Z и переменное w матрицей W. Это соответствие определим для каждого типа особо. В гиперболическом случае полагаем:

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ z_r & 0 \\ 0 & z_{r+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & z_n \end{pmatrix},$$

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\overline{z}_1 & \dots & \varepsilon_r\overline{z}_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{r+1}\overline{z}_{z+1} & \dots & \varepsilon_n\overline{z}_n \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{W} = \begin{pmatrix} \overline{w}_1 & 0 \\ 0 & \overline{w}_2 \end{pmatrix}.$$

Для эллиптических квадрик

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ z_{n/2-1} & -z_{n/2} \\ z_{n/2} & z_{n/2-1} \end{pmatrix},$$

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & -\overline{z}_2 & \dots & \overline{z}_{n/2-1} & -\overline{z}_{n/2} \\ \overline{z}_2 & \overline{z}_1 & \dots & \overline{z}_{n/2} & \overline{z}_{n/2-1} \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{W} = \begin{pmatrix} \overline{w}_1 & -\overline{w}_2 \\ \overline{w}_2 & \overline{w}_1 \end{pmatrix}$$

и для параболических

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ z_{2s-1} & 0 \\ z_{2s} & z_{2s-1} \\ z_{2s+1} & 0 \\ z_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\overline{z}_1 & 0 & \dots & \varepsilon_s\overline{z}_{2s-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{z}_2 & \overline{z}_1 & \dots & \overline{z}_{2s} & \overline{z}_{2s-1} & \varepsilon_{2s+1}\overline{z}_{2s+1} & \dots & \varepsilon_n\overline{z}_n \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{W} = \begin{pmatrix} \overline{w}_1 & 0 \\ \overline{w}_2 & \overline{w}_1 \end{pmatrix}.$$

Во всех трех случаях квадрика Q задается одним и тем же матричным уравнением

$$\frac{1}{2i}(W-\overline{W})=\overline{Z}Z,$$

а ее автоморфизмы из $\operatorname{Aut}_+ Q$ задаются единой формулой, вполне аналогичной формуле для дробно-линейных автоморфизмов $(1,1)$-квадрики:

$$\begin{gathered} Z\mapsto (Z+AW)(\operatorname{Id}-2i\overline{A}Z-(R+iA\overline{A})W)^{-1}, \\ W\mapsto W(\operatorname{Id}-2i\overline{A}Z-(R+iA\overline{A})W)^{-1}. \end{gathered}$$

Параметры $a\in\mathbb{C}^n$ и $r\in\mathbb{R}^2$ представлены матрицами A и R в соответствии с теми же правилами, что z и w. При этом для всех трех классов $\dim\operatorname{Aut}_+ Q=2n+k$, причем $\dim g_1=2n$, $\dim g_2=2$. Формула представляет собой матрично дробно-линейное выражение, поэтому степень автоморфизмов, заданных этой формулой, равна двум, что подтверждает гипотезу о степени (степень не превосходит коразмерности).

Этими тремя классами не исчерпываются все квадрики коразмерности два с нелинейными автоморфизмами. Последний, четвертый класс, который отсутствует в ситуации $(2,2)$, это так называемые нуль-квадрики. Это невырожденные квадрики, заданные такой парой матриц H_1 и H_2, что любая их линейная комбинация вырождена, т.е. их характеристический многочлен $P(t)=\det(t_1H_1+t_2H_2)$ равен нулю тождественно. В каноническом виде это означает присутствие клеток третьего типа. Автоморфизмы нуль-квадрик – это проективные преобразования $\mathbb{CP}^{n+k}$.

Эти построения нашли свое завершение в формуле, дающей общий вид матрично дробно-линейных автоморфизмов произвольной квадрики.

Пусть $\mathbf{A}$ – матричная алгебра вида

$$\mathbf{A}=\bigl\{(D,d)\in gl(\mathbb{C},n)\times gl(\mathbb{C},k):\langle Dz,\overline{z}\rangle=d\langle z,\overline{z}\rangle \text{ для всех } z\in\mathbb{C}^n\bigr\}.$$

Рассмотрим набор полилинейных отображений:

$$\begin{gathered} \widehat{A}\colon \mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n \text{ не обязательно симметричный}, \\ a\colon \mathbb{C}^k\to\mathbb{C}^n, \\ B\colon \mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}^n, \\ \widehat{r}\colon \mathbb{C}^k\otimes\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}^k \text{ эрмитов}, \end{gathered}$$

которые удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{gathered} \langle\widehat{A}(z,\zeta),\xi\rangle=2i\langle z,\overline{a}\langle\xi,\zeta\rangle\rangle, \\ \langle B(z,w),\zeta\rangle=\widehat{r}(w,\langle\zeta,z\rangle). \end{gathered}$$

Тогда набор (A,a,B,r), где $A(z,z)=\widehat{A}(z,z)$, $r(u,u)=\widehat{r}(u,u)$ удовлетворяет соотношениям, определяющим элемент $\operatorname{Aut}_+ Q$ (см. п. 4.1). Обратное, вообще говоря, не верно.

Соотношения, определяющие набор $(\widehat{A}, a, B, \widehat{r}\,)$, эквивалентны тому, что для всех z и w

$$\begin{gathered}\bigl(A(z,\,\cdot\,), 2i\langle z, \overline{a}\,\cdot\rangle\bigr) \in \mathbf{A},\\ \bigl(B(\,\cdot\,,w), r(w,\,\cdot\,)\bigr) \in \mathbf{A}.\end{gathered}$$

Пользуясь этим, можно показать, что отображение

$$\begin{gathered}z \mapsto \bigl(\mathrm{Id}_n - A(z,\,\cdot\,) - B(\,\cdot\,,w) - \tfrac{1}{2}A(aw,\,\cdot\,)\bigr)^{-1}(z+aw),\\ w \mapsto \bigl(\mathrm{Id}_k - 2i\langle z, \overline{a}\,\cdot\rangle - r(w,\,\cdot\,) - i\langle aw, \overline{a}\,\cdot\rangle\bigr)^{-1} w\end{gathered}$$

является автоморфизмом Q. Из-за аналогии между этой формулой и автоморфизмами трехмерной сферы в $\mathbb{C}^2$, известными еще Пуанкаре, полученную формулу авторы назвали формулой Пуанкаре. Автоморфизмы этого типа образуют подгруппу группы автоморфизмов квадрики. Автоморфизмы нуль-квадрики коразмерности два являются дробно-линейными и, поэтому, задаются формулой этого типа. Итак, все автоморфизмы невырожденных квадрик коразмерности два описываются формулой Пуанкаре.

Первые нелинейные автоморфизмы, не описываемые этой формулой, были обнаружены в ситуации $(3,3)$. Среди восьми квадрик с нелинейными автоморфизмами, найденных Палинчак, как уже было отмечено, пять $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_6)$ являются ВАК-квадриками и их автоморфизмы, тем самым, задаются формулой Пуанкаре. Формулой Пуанкаре описываются также автоморфизмы Q_5 и Q_8. Квадрика Q_7 обладает 9-мерной группой $\mathrm{Aut}_+ Q_7$, тогда как подгруппа автоморфизмов Пуанкаре у нее тривиальна.

Когда это было обнаружено, Ежов и Шмальц построили формулу более общего вида, которая описывает автоморфизмы любой невырожденной квадрики. Мы не приводим здесь этого весьма сложного выражения. Отметим лишь то, что оно является матрично-дробно-квадратичным, т.е. кроме линейных операций и взятия обратного разрешаются произведения двух матричных выражений [31].

5. Квадратичные инварианты CR-многообразий: три флаговых конструкции

Отсутствие у квадрики общего положения нетривиальных автоморфизмов, сохраняющих точку, неэквивалентность двух случайно выбранных квадрик – все это можно рассматривать как проявление одного феномена: наличия у квадрик богатой системы инвариантов относительно действия группы $GL(n,\mathbb{C}) \oplus GL(k,\mathbb{R})$. Эти же инварианты являются голоморфными инвариантами дважды гладкой поверхности в комплексном пространстве или даже абстрактной, не обязательно интегрируемой, CR-структуры. Первая инвариантная конструкция (характеристический многочлен) появилась в работе Р. Мизнера [41], посвященной изучению CR-многообразий коразмерности два. Тема CR-инвариантов была развита в серии заметок [13]–[16]. В работе Т. Гэррити и Р. Мизнера [33] была описана система образующих рациональных инвариантных функций. Содержание данного раздела соответствует подходу автора [13]–[16].

Первая серия инвариантных множеств $\Gamma(p)$ представляет собой систему вложенных подмножеств пространства $\mathbb{C}^n$, заданных однородными полиномиальными условиями. Такие множества естественно рассматривать как алгебраические подмногообразия $\mathbb{CP}^{n-1}$. Пусть $(H_1, \ldots, H_k)$ – набор эрмитовых матриц, задающих (n,k)-квадрику. Тогда

$$\Gamma(p) = \{z \in \mathbb{CP}^{n-1} : \operatorname{rank}_{\mathbb{C}}(H_1 z, \ldots, H_k z) \leqslant p\}.$$

То есть множество $\Gamma(p)$ состоит из тех ненулевых векторов z, для которых система из k векторов $(H_1 z, \ldots, H_k z)$ имеет размерность, не превосходящую p. При этом

$$\varnothing = \Gamma(0) \subseteq \Gamma(1) \subseteq \cdots \subseteq \Gamma(k-1) \subseteq \Gamma(k) = \mathbb{CP}^{n-1},$$

т.е. Γ – это система вложенных алгебраических многообразий (флаговая конструкция), занумерованных целыми числами $0 \leqslant p \leqslant k$.

Вторая серия множеств $\gamma(q)$, $0 \leqslant q \leqslant n$, определяется так:

$$\gamma(q) = \{w \in \mathbb{CP}^{k-1} : \operatorname{rank}(w_1 H_1 + \cdots + w_k H_k) \leqslant q\}.$$

То есть множество $\gamma(q)$ состоит из тех ненулевых векторов w, для которых матрица $(w_1 H_1 + \cdots + w_k H_k)$ имеет ранг, не превосходящий q. Например, $\gamma(n-1)$ – это нулевое множество характеристического многочлена пучка $\{P(w) = \det(w_1 H_1 + \cdots + w_k H_k) = 0\}$. При этом опять возникает флаговая конструкция из алгебраических подмногообразий проективного пространства

$$\varnothing = \gamma(0) \subseteq \gamma(1) \subseteq \cdots \subseteq \gamma(n-1) \subseteq \gamma(n) = \mathbb{CP}^{k-1}.$$

Если $n = 2$, то $\gamma(n-1) \in \mathbb{CP}^1$ это множество собственных значений пучка $w_1 H_1 + w_2 H_2$, а $\Gamma(2) \in \mathbb{CP}^{n-1}$ это множество собственных векторов, отвечающих собственным значениям из $\gamma(n-1)$. Поэтому в общем случае полученные флаговые конструкции являются естественным обобщением этих задач: серия γ – задачи на собственные значения, а серия Γ – на собственные векторы.

Третья флаговая конструкция δ возникает при рассмотрении особенностей проективизации квадрики. Если от аффинных координат (z, w), $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^k$, перейти к проективным координатам (T, Z, W), $T \in \mathbb{C}^1$, $Z \in \mathbb{C}^n$, $W \in \mathbb{C}^k$, с помощью замен $z = Z/T$, $w = W/T$, то уравнение $\overline{Q}$ замыкания квадрики Q будет иметь вид

$$\operatorname{Im} W\overline{T} = \langle Z, \overline{Z}\rangle.$$

Проективизация гиперквадрики является проективно однородной, проективные автоморфизмы действуют на ней транзитивно, гиперквадрика не имеет особенностей на бесконечности. Однако при $k \geqslant 2$ это не так. Гиперповерхности, пересечение которых образует квадрику, могут пересекаться на бесконечности $\{T = 0\}$ не трансверсально. Самая грубая характеристика возникающих здесь особенностей это размерность касательного пространства $T(\overline{Q})$, которая дает стратификацию точек $Q^\infty = \overline{Q} \setminus Q$. Эта размерность определяется рангом системы градиентов, определяющих квадрику функций. Пусть $e_j(T, Z, W) = \operatorname{grad}(-\operatorname{Im} W_j \overline{T} + \langle Z, \overline{Z}\rangle)$, тогда

$$\delta(r) = \{(T, Z, W) \in \mathbb{CP}^{n+k} : \operatorname{rank}_{\mathbb{C}}(e_1(T, Z, W), \ldots, e_k(T, Z, W)) \leqslant r\}.$$

Система δ также является флаговой конструкцией алгебраических подмножеств

$$\varnothing = \delta(0) \subseteq \delta(1) \subseteq \cdots \subseteq \delta(n-1) \subseteq \delta(k) = \mathbb{CP}^{n+k}.$$

Все три серии определялись неравенствами на ранги в комплексном пространстве. Можно получить более тонкую стратификацию Q^{∞}, рассмотрев вещественные аналоги этих флаговых конструкций:

$$\begin{gathered}\Gamma R(p) = \bigl\{z \in \mathbb{RP}^{2n-1} : \operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(H_1 z, \dots, H_k z) \leqslant p\bigr\},\\ \gamma R(q) = \bigl\{u \in \mathbb{RP}^{k-1} : \operatorname{rank}(u_1 H_1 + \cdots + u_k H_k) \leqslant q\bigr\},\\ \delta R(r) = \bigl\{(T, Z, W) \in \mathbb{RP}^{2n+2k} : \operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(e_1(T, Z, W), \dots, e_k(T, Z, W)) \leqslant r\bigr\}.\end{gathered}$$

Отметим также еще два инвариантных множества: эрмитов световой конус $S = \{z \in \mathbb{RP}^{2n-1} : \langle z, \overline{z}\rangle = 0\}$ и нуль билинейной формы $S' = \{(z, \zeta) \in \mathbb{CP}^{2n-1} : \langle z, \zeta\rangle = 0\}$.

Если имеются два ростка, эквивалентные посредством голоморфного или CR-отображения, то их касательные квадрики эквивалентны, причем эквивалентность устанавливает линейное отображение вида $z \to Cz$, $w \to \rho w$. Это и есть причина того, что вся совокупность перечисленных множеств первой квадрики оказывается линейно эквивалентной соответствующим множествам второй. Причем эквивалентность устанавливается:

для флагов Γ и ΓR, а также S_1, S_2, S_3 посредством индуцированного действия C на $\mathbb{CP}^{n-1}$ и $\mathbb{RP}^{2n-1}$,

для флагов γ и γR посредством индуцированного действия ρ' – матрицы, полученной транспонированием из ρ на $\mathbb{CP}^{k-1}$ и $\mathbb{RP}^{k-1}$,

для флагов δ и δR посредством индуцированного действия пары (C, ρ) на $\mathbb{CP}^{n+k}$ и $\mathbb{RP}^{2n+2k}$.

То, что на переменную w действуют вещественные замены, означает, что вещественное подпространство $\mathbb{R}^k = \{\operatorname{Im} w = 0\}$ остается инвариантным и γR – это не что иное, как $\gamma \cap \mathbb{R}^k$.

Характеристический многочлен $P(w) = \det(w_1 H_1 + \cdots + w_k H_k)$ преобразуется следующим образом: $P(w) \to |\det \Lambda|^{-2}\, P(\rho' w)$.

Таким образом, все линейные инварианты всех перечисленных множеств, построенных по некоторой форме $\langle z, \overline{z}\rangle$, являются биголоморфными инвариантами квадрики и ростка поверхности, а также CR-инвариантами ростка CR-многообразия с данной формой Леви. Среди этих инвариантов, в первую очередь, следует отметить наборы размерностей и степеней. В этот список целочисленных инвариантов следует также включить набор размерностей градуированных компонент $(\dim g_0,\ \dim g_1,\ \dim g_2)$. Биголоморфная (или CR) эквивалентность двух вещественных многообразий означает линейную эквивалентность всех построенных множеств и равенство всех их линейных инвариантов в каждой паре соответствующих точек.

Для $(2,2)$-квадрик все флаги $\Gamma, \Gamma R, \gamma, \gamma R, \delta, \delta R$ имеют лишь одну содержательную позицию – первую. Для трех стандартных $(2,2)$-квадрик картина следующая:

Q_1: $\Gamma(1)$ – две точки; $\Gamma R(1)$ – две точки;
$\gamma(1)$ – две точки; $\gamma R(1)$ – две точки;
$\delta(1)$ – одна точка; $\delta R(1)$ – одна точка;

Q_0: $\Gamma(1)$ – одна точка; $\Gamma R(1)$ – две прямых;
$\gamma(1)$ – одна точка; $\gamma R(1)$ – одна точка;
$\delta(1)$ – две точки; $\delta R(1)$ – одна точка и одна прямая;

Q_{-1}: $\Gamma(1)$ – две точки; $\Gamma R(1)$ – $\varnothing$;
$\gamma(1)$ – две точки; $\gamma R(1)$ – $\varnothing$;
$\delta(1)$ – три точки; $\delta R(1)$ – одна точка.

Для различения $(3,3)$ и $(3,4)$-квадрик из списков Палинчак и Анисовой достаточно характеристического многочлена $P(w)$ и светового конуса S. Начнем со списка Палинчак.

Q_1: $P(w) = w_1 w_2 w_3$, $\gamma R(2)$ – три прямые;

Q_2: $P(w) = -w_3(w_1 + iw_2)(w_1 - iw_2)$, $\gamma R(2)$ – одна прямая;

Q_3: $P(w) = -(w_2)^2 w_3$, $\gamma R(2)$ – две прямые;

Q_4: $P(w) = -(w_3)^3$, $\gamma R(2)$ – одна прямая,
S – одна прямая;

Q_5: $P(w) = 0$, $\gamma R(2)$ – все пространство,
S – конус степени четыре;

Q_6: $P(w) = 0$, $\gamma R(2)$ – все пространство,
S – трехмерное подпространство;

Q_7: $P(w) = 0$, $\gamma R(2)$ – все пространство,
S – трехмерное подпространство и квадратичный конус;

Q_8: $P(w) = -(w_3)^3$, $\gamma R(2)$ – одна прямая,
S – квадратичный конус.

Этого достаточно, чтобы убедиться в попарной неэквивалентности этих квадрик. Если для доказательства неэквивалентности привлечь размерности компонент алгебры, то в списке Анисовой отличить остается лишь Q_3 от Q_4 и Q_5 от Q_9. Первая пара различается строением конуса S. У Q_3 он плоский, а у Q_4 – нет. Вторая – характеристическим многочленом. У Q_3 разложение на неприводимые компоненты содержит

2 УМН, т. 57, вып. 1

кратный линейный множитель ($P(w) = {w_1}^2(w_1 + w_2)$), а у Q_4 все три линейных множителя различны ($P(w) = w_4(w_1 + iw_2)(w_1 - iw_2)$).

Для $(3,3)$-квадрики общего положения как $\Gamma(2)$, так и $\gamma(2)$ являются неособыми кубическими кривыми в $\mathbb{CP}^2$. Как известно, такая кривая имеет 9 точек перегиба, причем эта девятка точек не обладает проективными симметриями (двойные отношения всех четверок попарно различны). Пользуясь этой асимметрией, точки можно упорядочить, так что если имеется проективное отображение одной кубики на другую, то оно переведет точки перегиба первой кубики в точки перегиба второй с сохранением порядка (первую в первую, и т. д.). При отображении квадрики на себя действие на комплексной касательной сводится, таким образом, к скалярным растяжениям $\{z \to \lambda z\}$, где λ – ненулевой комплексный множитель. Это и является геометрической причиной жесткости квадрики.

Для многообразий с жесткими касательными квадриками вопросы классификации решаются весьма просто [13], [16]. В частности, приведение локального уравнения такого многообразия к некоторой нормальной форме позволяет выписать полную систему локальных инвариантов ростка.

Описанные инвариантные конструкции не только позволяют получать запреты на эквивалентность ростков, но и формулировать запреты на существование необратимых голоморфных отображений одного ростка в другой. Конечно, всегда есть возможность постоянного отображения в любой росток, поэтому такие запреты имеют характер оценок на степень вырождения (ранг касательного отображения). Причем это касается не только отображений квадрик, но и отображений ростков гладких многообразий разных типов [15]. Запреты для квадрик, конечно, означают запреты и для ростков с данными касательными квадриками.

Приводимые ниже утверждения делаются для квадрик общего положения на основе данных о размерностях инвариантных множеств, однако так же можно исследовать и особые квадрики. Итак, для всех перечисленных ниже пар можно утверждать, что если имеется отображение первой квадрики во вторую, то ранг его касательного отображения меньше максимально возможного по крайней мере на две единицы. Вот список пар:

1. гиперквадрика типа $(3,1)$ в $(3,3)$-квадрику;
2. гиперквадрика типа $(4,1)$ в $(4,3)$-квадрику;
3. $(3,2)$-квадрика в $(3,3)$-квадрику;
4. $(3,3)$-квадрика в $(4,4)$-квадрику;
5. $(3,3)$-квадрика в $(3,5)$-квадрику.

6. Модели высших порядков

В предыдущих разделах мы попытались продемонстрировать, что невырожденная вещественная квадрика в комплексном пространстве является объектом, замечательным во многих отношениях, и что описание автоморфизмов, построение системы инвариантов и классификация для ростков поверхностей (ростков CR-многообразий) могут опираться на решение этих задач для касательной квадрики. То, что такой объект существует, является большой удачей. Это факт, достойный удивления. Покажем это на проблеме выбора степени модели (это та степень d, которая для квадрики равна двум). Отдельно взятые требование универсальности и однородности оба “работают” на снижение d. Действительно, модель степени один вещественного многообразия $\{\operatorname{Im} w = 0\}$ и универсальна, и однородна. Требование конечномерности (группы автоморфизмов) “работает” на повышение d: росток поверхности степени больше, чем два, общего положения (некая невырожденность) имеет конечномерную группу. То, что эти две противоборствующие тенденции смогли “согласиться” на $d = 2$ – это удача. И остальные требования из списка требований к хорошей модели можно рассматривать как бесплатное приложение.

Однако при росте коразмерности возникает некоторое осложнение. Дело в том, что размерность пространства эрмитовых матриц порядка n конечна и равна n^2. Если коразмерность превзойдет этот рубеж, то первая часть условия конечномерности становится невыполнимой. Это приводит к тому, что все квадрики такого типа оказываются вырожденными, а их группы бесконечномерными. Таким образом, при $k > n^2$ невозможно сформулировать критерий конечномерности группы ростка типа (n, k) в терминах 2-струи, и возникает необходимость в построении новой хорошей модели.

На это явление можно посмотреть с другой стороны. Если $T^c(M)$ – расслоение вещественных векторных полей на M, принадлежащих в каждой точке комплексной части касательной плоскости, то градуированная алгебра Леви–Танаки, индуктивно определяется соотношениями

$$D^1 = T^c(M), \quad D^{j+1} = [D^j, D^1] + D^j$$

(скобка – это коммутатор полей). Если эта последовательность стабилизируется на l-м шаге $D^{l-1} \neq D^l = D^{l+1} = \cdots = D^\infty$, говорим, что длина алгебры равна l. Невырожденность формы Леви означает тогда в точности то, что длина алгебры равна двум, причем $D^\infty = T(M)$. Ясно, что при $k > n^2$ это невозможно. Высшие коразмерности требуют привлечения коммутаторов более высоких порядков, что в координатных терминах означает переход к рассмотрению струй порядка выше, чем два.

Есть еще одно обстоятельство, побуждающее перейти к рассмотрению более высоких степеней. Все работы по квадратичным моделям были выполнены во II-м тысячелетии, и наступление III-го тысячелетия побуждает перейти к рассмотрению моделей степени три и выше.

6.1. Кубическая модель. Существует, с точностью до эквивалентности, всего одна невырожденная эрмитова форма типа (n, n^2). Это форма, компонентами которой является произвольный набор из n^2 скалярных линейно независимых эрмитовых форм. Обозначим эту форму через $\langle z, \bar{z} \rangle$. Поверхностью типа $(n, K = n^2 + k)$, $k > 0$, которая является полным аналогом невырожденной квадрики, т.е. поверхностью, для которой выполнен полный список требований, предъявляемых к хорошей модели, является поверхность Q_3, заданная в пространстве $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{n^2} \oplus \mathbb{C}^k$ с координатами $(z \in \mathbb{C}^n, w_2 \in \mathbb{C}^{n^2}, w_3 \in \mathbb{C}^k)$, $n > 0$, $k > 0$, уравнениями

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar{z} \rangle, \qquad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re} \Phi(z, z, \bar{z}), \tag{14}$$

где $\Phi(z, z, \bar{z})$ – однородная форма степени два по z и степени один по $\bar{z}$ со значениями в $\mathbb{C}^k$.

Говорим, что поверхность Q_3 является касательной кубикой ростка того же типа, если его локальные уравнения можно записать в виде

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \overline{z} \rangle + F_3 + \cdots, \qquad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re} \Phi(z, z, \overline{z}\,) + G_4 + \cdots \tag{15}$$

(при подсчете весов пользуемся правилом: $[z] = 1$, $[\operatorname{Re} w_2] = 2$, $[\operatorname{Re} w_3] = 3$).

Определение. Поверхность (15) называется *невырожденной*, если $\langle z, \overline{z} \rangle$ – это невырожденная эрмитова форма типа (n, n^2), а координаты формы $\Phi(z, z, \overline{z})$ линейно независимы.

Подобно тому, как форме Леви можно дать инвариантное определение, такое определение можно дать и кубической форме Φ. Для этого следует рассмотреть повторный коммутатор $(1,0)$-полей [17]. Длина алгебры Леви–Танаки поверхности Q_3 равна 3.

Использование таких поверхностей имеет свои ограничения, вытекающие из того, что размерность пространства кубических форм конечна и равна $n^2(n+1)$. Итак, то, что невырожденная поверхность Q_3 типа $(n, K = n^2 + k)$ при $k \leqslant n^2(n+1)$ является хорошей модельной поверхностью невырожденных ростков того же типа, можно выразить тем же списком свойств [17], который при $d = 3$ получает следующую редакцию.

1. *Универсальность*: любой порождающий Леви-невырожденный росток многообразия типа $(n, K = n^2 + k)$ в $\mathbb{C}^{n+K}$ эквивалентен ростку вида (15);

2. *Конечномерность*: (a) группа голоморфных автоморфизмов поверхности Q_3 общего положения является конечномерной группой Ли; (b) критерием конечномерности группы голоморфных автоморфизмов Q_3 является невырожденность, т.е. линейная независимость всех координатных форм; (c) любая поверхность данного типа, заданная уравнениями степени меньшей, чем три, имеет бесконечномерную группу;

3. *Однородность*: Q_3 однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно, однородность обеспечивается квадратично-треугольными преобразованиями;

4. *Симметричность*: (a) кубика является самой симметричной невырожденной поверхностью, т.е. размерность группы ростка невырожденной поверхности не превосходит размерности группы ее касательной кубики; (b) алгебра автоморфизмов кубики параметризует семейство отображений одного невырожденного ростка в другой;

5. *Алгебраические свойства*: (a) алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной кубике – это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей ограниченной степени, степени коэффициентов не превосходят пяти; (b) группа автоморфизмов невырожденной кубики – это группа Ли, являющаяся подгруппой группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+K}$ ограниченной степени, в качестве оценки степени числителей и знаменателей в несократимом представлении можно взять $15(n+K)$; (c) два ростка эквивалентны лишь в том случае, если эквивалентны их касательные кубики, две кубики голоморфно эквивалентны в том и только том случае, когда они эквивалентны линейно.

Относительно строения алгебры автоморфизмов кубики $\operatorname{Aut} Q_3$ можно сказать следующее. Введем градуировку в пространстве векторных полей с коэффициентами, зависящими от (z, w_2, w_3), полагая

$$[z] = 1, \quad [w_2] = 2, \quad [w_3] = 3\left[\frac{\partial}{\partial z}\right] = -1, \quad \left[\frac{\partial}{\partial w_2}\right] = -2, \quad \left[\frac{\partial}{\partial w_3}\right] = -3;$$

тогда алгебра $\operatorname{Aut} Q_3$ становится градуированной алгеброй Ли вида

$$g_{-3} + g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6.$$

При этом подалгебра $g_- = g_{-3} + g_{-2} + g_{-1}$ – это алгебра Ли группы треугольно-квадратичных преобразований $\operatorname{Aut}_- Q_3$ вида

$$\begin{gathered} z \to p + z, \\ w_2 \to (q + i\langle p, \overline{p}\rangle) + 2i\langle z, \overline{p}\rangle + w_2, \\ w_3 \to (r + 2i \operatorname{Re} \Phi(p, p, \overline{p})) + 4i\Phi(z, p, \overline{p}) + 2i\Phi(z, z, \overline{p}) + 2i\overline{\Phi}(\overline{p}, \overline{p}, z) + sw_2 + w_3; \end{gathered}$$

причем (p, q, r) произвольная точка Q_3 и

$$\operatorname{Re} \Phi(z, p, \overline{z}) = s\langle z, \overline{z}\rangle.$$

То есть $\operatorname{Aut}_- Q_3$ – это та подгруппа, которая обеспечивает однородность Q_3, соответственно $\dim \operatorname{Aut}_- Q_3 = \dim Q_3 = 2n + n^2 + k$.

Подалгебра g_0 соответствует линейным автоморфизмам кубики

$$z \to \Lambda z, \quad \zeta \to \rho\zeta, \quad w \to \nu w,$$

где

$$\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z}\rangle = \rho\langle z, \overline{z}\rangle, \qquad \Phi(\Lambda z, \Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \nu\Phi(z, z, \overline{z}).$$

Размерность этой группы может меняться в зависимости от кубической формы Φ. Но, как видно из определяющих соотношений, если фиксировать значение невырожденной матрицы Λ, то значения ρ и ν определяются однозначно. Поэтому справедлива оценка $\dim \operatorname{Aut}_0 Q \leqslant 2n^2$. Эту подгруппу автоморфизмов кубики обозначим $\operatorname{Aut}_0 Q$.

Действие голоморфных замен на ростки порождает линейное действие на касательные кубики группы $GL(n, \mathbb{C}) \oplus GL(k, \mathbb{R})$ вида

$$\Phi(z, z, \overline{z}) \to \nu\Phi(\Lambda^{-1}z, \Lambda^{-1}z, \overline{\Lambda^{-1}z}).$$

Подалгебра $g_+ = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$ это нильпотентная алгебра Ли. Ей соответствует подгруппа нелинейных автоморфизмов кубики, сохраняющих начало координат. Причем таких, что $\Lambda = E_n$, $\rho = E_{n^2}$, $\nu = E_k$. Эту группу мы обозначим через $\operatorname{Aut}_+ Q$. В разобранных примерах: $(1,2)$ [19], $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$ [51], (n, n^2+1) [49] этой подалгебры просто нет $(= 0)$ и все автоморфизмы, сохраняющие точку, линейные. Таким образом, вопрос о существовании кубики с нетривиальной подгруппой $\operatorname{Aut} Q_3$ открыт. При этом, по-видимому, как и в случае с квадриками (жесткость), для кубики общего положения таких автоморфизмов нет, и речь идет о поиске исключительных кубик.

6.2. Квазипериодическая система модельных поверхностей. Приведенная для $d=2,3$ конструкция имеет обобщение для многообразий с произвольно большой длиной алгебры Леви–Танаки [18]. Процесс порождения модельных поверхностей все более высоких степеней напоминает процесс заполнения электронами разрешенных энергетических уровней в атоме [38]. При этом вся серия напоминает периодическую систему элементов Д. И. Менделеева.

Пусть $\mathscr{F}_{m,n}$ – пространство вещественных многочленов от $(z_1,\dots,z_n,\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_n)$ степени m, чье разложение по бистепеням не содержит компонент $(m,0)$ и $(0,m)$. Тогда если $k_{m,n}=\dim\mathscr{F}_{n,m}$, то $k_{m,n}=C^m_{2n+m-1}-2C^m_{n+m-1}$, если $K_{m,n}=k_{2,n}+k_{3,n}+\dots+k_{m,n}$, то $K_{m,n}=C^m_{2n+m}-2C^m_{n+m}+1$. В частности,

$$k_{2,n}=n^2,\qquad k_{3,n}=n^2(n+1),\qquad k_{4,n}=n^2(n+1)(7n+1)/12.$$

Модельная поверхность Q_d типа (n,K) степени d, где $K_{d-1,n}<K\leqslant K_{d,n}$, это поверхность, заданная в пространстве

$$\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^{k_{2,n}}\oplus\dots\oplus\mathbb{C}^{k_{d-1,n}}\oplus\mathbb{C}^k,$$

$k=K-K_{d-1,n}$, с координатами $(z,w_2,\dots,w_d)$ соотношениями

$$\operatorname{Im}w_m=\Phi_m(z,\overline{z}),\qquad m=2,\dots,d, \tag{16}$$

причем Φ_m для $m=2,\dots,d-1$ – это вектор, составленный из базисных элементов пространства $\mathscr{F}_m$, а Φ_d – вектор из линейно независимых элементов $\mathscr{F}_d$. При $d=2$ мы получаем невырожденную квадрику, а при $d=3$ – невырожденную кубику. Подчеркнем, что степень d не является независимым параметром в отличие от n и K, а определяется условием попадания в определенный интервал значений.

Поверхность Q_d будем называть касательной модельной поверхностью для ростка вида

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}w_2=\Phi_2+\text{члены веса три и более},\\&\quad\dots\\&\operatorname{Im}w_d=\Phi_d+\text{члены веса }(d+1)\text{ и более}.\end{aligned}\tag{17}$$

При подсчете весов принято очевидное соглашение $[\operatorname{Re}w_j]=j$. Вещественно алгебраическую поверхность Q_d вида (15) будем называть касательной модельной поверхностью ростка M_0 вида (16). Поверхность и росток будем называть невырожденными, если все координатные формы Φ линейно независимы.

Поверхности серии Q_d удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к хорошим моделям, за одним, но существенным, исключением. Речь идет о требовании универсальности. Этому требованию Q_d удовлетворяет при $d=2$ и 3. Используя простейшие замены, нетрудно показать, что любой росток типа (n,K), где $K_3<K\leqslant K_4$, с невырожденной 3-струей можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}w_2=\Phi_2(z,\overline{z})+\text{члены веса три и более},\\&\operatorname{Im}w_3=\Phi_3(z,\overline{z})+\text{члены веса четыре и более},\\&\operatorname{Im}w_4=\Phi_4(z,\overline{z})+\text{члены веса пять и более},\end{aligned}\tag{18}$$

что доказывает универсальность данной модели при $d = 4$. При $d \geqslant 5$ это уже не так. Причина в том, что доля переменных группы z (комплексная касательная) становится слишком малой в общей совокупности координат пространства. Это приводит к тому, что не удается выбором локальных координат обеспечить правильное касание ростка и нашей модельной поверхности. Выход очевиден: следует расширить класс модельных поверхностей, разрешив некоторую зависимость от переменных группы $\operatorname{Re} w$. Это можно сделать, не теряя однородности. Однако узловой пункт нашей программы – это получение критерия конечномерности. Конечномерность, на уровне алгебры, вместе с полиномиальностью и оценкой степени была получена из анализа линейной системы дифференциальных уравнений. Переход к моделям с зависимостью от $\operatorname{Re} w$ означает, что система перестает быть системой с постоянными коэффициентами. Это приводит к тому, что дифференциальные операторы, с помощью которых записывается система, перестают коммутировать. В связи с этой некоммутативностью возникают технические препятствия, которые, как можно надеяться, будут в ближайшем будущем преодолены.

С модельными поверхностями высоких степеней связан еще один мало исследованный вопрос. Положительно определенные квадрики являются остовами однородных областей. Каждой модельной поверхности можно сопоставить ее оболочку голоморфности. Это некая область в $\mathbb{C}^{n+K}$. Если модельная поверхность является в каком-либо смысле выпуклой ("положительная определенность"), то оболочка является областью, не совпадающей со всем пространством, если поверхность можно поместить в острый конус, то она оказывается областью, биголоморфно эквивалентной ограниченной. Однородность остова позволяет надеяться на то, что однородной будет и сама оболочка. Если это так, то модельные поверхности могут оказаться источником новых примеров однородных ограниченных областей (новые области Зигеля).

7. Поверхности с вырождениями

На протяжении всей данной работы при построении модельных поверхностей мы последовательно уходили от рассмотрения "вырожденных" ситуаций. В этом разделе мы коснемся этой проблематики. Это позволит нам сформулировать, в качестве гипотезы, еще одно свойство хороших модельных поверхностей. В этом разделе все рассматриваемые поверхности будем считать вещественно аналитическими и связными.

Рассмотрим опять ту простейшую ситуацию, с которой мы начинали. Пусть M – связная поверхность типа $(1,1)$, т.е. гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$, и ξ – это ее точка. Если форма Леви гиперповерхности в точке ξ невырождена, то, как нам хорошо известно, $\dim \operatorname{Aut} M_\xi \leqslant \dim \operatorname{Aut} Q = 8$, где Q – единственная модельная поверхность данного типа. Если форма в точке вырождена, то M содержит непустое аналитическое подмножество $M_0 = \{p \in M \,:\, M \text{ вырождена в } p\}$. Если M_0 содержит открытые части M, то по теореме единственности $M_0 = M$. В этом случае из теоремы Фробениуса следует, что в некоторых голоморфных координатах в окрестности любой своей точки гиперповерхность M является гиперплоскостью. В частности, $\dim \operatorname{Aut} M_\xi = \infty$ и это можно сказать о любой точке этой гиперповерхности.

Оказывается, что это единственная возможность для ростка гиперповерхности иметь бесконечномерную группу. Более того, можно утверждать, что если гиперповерхность не является локально плоской, то в любой ее точке, как в невырожденной, так и в вырожденной, $\dim \operatorname{Aut} M_\xi \leqslant \dim \operatorname{Aut} Q = 8$.

Доказать это несложно. Рассмотрим произвольные девять векторных полей $(X_1, \ldots, X_9)$ из $\operatorname{aut} M_\xi$, определенные в окрестности U_ξ точки ξ. Коль скоро M не является локально плоской, то $M \setminus M_0$ есть открытое плотное подмножество M, и пусть ξ' – произвольная точка из $(M \setminus M_0) \cap U_\xi$. В точке ξ' гиперповерхность M невырождена, поэтому из девяти полей можно составить нетривиальную линейную комбинацию с вещественными коэффициентами, тождественно равную нулю в окрестности ξ'. Эти поля имеют голоморфные коэффициенты в полномерной окрестности ξ, их сужения на M имеют вещественно аналитические коэффициенты, поэтому обращение в нуль линейной комбинации по теореме единственности продолжается из окрестности точки ξ' на всю окрестность U_ξ. Это завершает доказательство.

Итак, если M – связная вещественно аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$ и ξ – ее точка, то имеет место следующая

Альтернатива (для гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$*)*:

либо $\dim \operatorname{Aut} M_\xi = \infty$ и M в окрестности любой своей точки эквивалентна гиперплоскости;

либо $\dim \operatorname{Aut} M_\xi \leqslant \dim \operatorname{Aut} Q(1,1) = 8$.

Таким образом, гиперквадрика является самой симметричной гиперповерхностью не только в классе невырожденных ростков, но и в классе всех ростков с конечномерной группой.

Если рассмотреть вместо всей группы подгруппу $\operatorname{Aut}_\xi M_\xi$ автоморфизмов, оставляющих точку ξ на месте (подгруппа стабильности), то ее размерность для гиперквадрики в $\mathbb{C}^2$ равна пяти. Нам не известно ни одного примера поверхности с конечномерной группой, чья подгруппа стабильности была бы больше. Однако доказательства нет, и вопрос открыт.

Вопрос о возможности локального распрямления поверхности был изучен в работе Фримана [32]. Росток поверхности M_ξ в $\mathbb{C}^N$ называется q-распрямляемым, если он биголоморфно эквивалентен ростку вида $\widetilde{M}_0 \times \mathbb{C}^q$, где $\widetilde{M}_0$ – росток поверхности в $\mathbb{C}^{N-q}$. Росток распрямляем, если он q-распрямляем для некоторого $q > 0$. Рассмотрения Фримана основаны на использовании теоремы Фробениуса.

Критерий конечномерности группы автоморфизмов гиперповерхности предложен Н. Стентон [54]. Его удобнее формулировать как критерий бесконечномерности: $\dim \operatorname{aut} M_\xi = \infty$ тогда и только тогда, когда не существуют ненулевые касательные $(1,0)$-поля с голоморфными коэффициентами. Критерий не является тривиальной переформулировкой, однако его проверка – это вычислительная задача того же типа, что и вычисление алгебры автоморфизмов. Ростки с конечномерной группой Стентон называет голоморфно невырожденными. На связной вещественно аналитической поверхности голоморфная невырожденность выполняется (или не выполняется) для всех точек одновременно ([5], см. также [37]).

Приведенное выше доказательство альтернативы не переносится даже на гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$. Форма Леви такой гиперповерхности – это эрмитова форма на $\mathbb{C}^2$, и ее ранг может принимать три значения: 0, 1 и 2. Если ранг равен нулю на открытой части гиперповерхности, то поверхность распрямляемая и размерность группы равна бесконечности (голоморфная вырожденность). Если ранг равен двум, то это означает, что форма невырождена. Если ранг равен двум хотя бы в одной точке, то он равен двум на открытом плотном подмножестве гиперповерхности. Это позволяет, повторяя наше рассуждение, получить оценку $\dim \operatorname{Aut} M_\xi \leqslant \dim \operatorname{Aut} Q(2,1) = 15$. Однако ранг может повсюду быть равным единице. Примером такой гиперповерхности является световой конус:

$$\big\{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3 : (\operatorname{Im} w)^2 = (\operatorname{Im} z_1)^2 + (\operatorname{Im} z_2)^2\big\}.$$

Альтернатива остается справедливой, но ее доказательство требует бо́льших усилий.

В работах Баоуэнди, Ротшильд, Эбенфельта, Хуанга и Зайцева [5]–[9] был рассмотрен ряд характеристик вырожденных точек вещественного многообразия. В частности, была рассмотрена такая характеристика точки, как l-невырожденность. Многообразие M называется конечно невырожденным в точке ξ, если существует такое $l \geqslant 0$, что для любого $(0,1)$-векторного поля L на M с $L(\xi) \neq 0$ найдутся такие $(0,1)$-поля $L_1, \dots, L_m$, $0 \leqslant m \leqslant l$, что $[L_1, \dots, [L_m, \overline{L}], \dots](\xi) \notin T^c_\xi M \otimes \mathbb{C}$; причем если l – минимальное число, обладающее этим свойством, то M называется l-невырожденным в точке ξ. В работе [23] П. Эбенфельт выписал нормальные формы уравнения 2-невырожденной вещественно аналитической гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$. В частности, он показал, что младшие члены уравнения гиперповерхности можно записать в одном из следующих восьми вариантах. Если форма Леви поверхности M в точке ξ нулевая, т.е. оба собственных значения формы Леви равны нулю, то:

(A.1) $\operatorname{Im} w = |z_1|^2(z_2 + \overline{z}_2) + r(z_1^2\overline{z}_2 + \overline{z}_1^2 z_2) + O(|z|^4 + |\operatorname{Re} w|\,|z|^2)$, где $r > 0$;

(A.2) $\operatorname{Im} w = |z_1|^2(z_2 + \overline{z}_2) + (z_1^2\overline{z}_2 + \overline{z}_1^2 z_2) + i|z_1|^2(z_1 - \overline{z}_1) + O(|z|^4 + |\operatorname{Re} w|\,|z|^2)$;

(A.3) $\operatorname{Im} w = |z_1|^2(z_2 + \overline{z}_2) + (z_1\overline{z}_2^2 + \overline{z}_1 z_2^2) + |z_2|^2(\lambda z_2 + \overline{\lambda}\overline{z}_2) + O(|z|^4 + |\operatorname{Re} w|\,|z|^2)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$;

(A.4) $\operatorname{Im} w = |z_1|^2(z_1 + \overline{z}_1) + |z_2|^2(z_2 + \overline{z}_2) + (\mu z_1^2\overline{z}_2 + \overline{\mu}\overline{z}_1^2 z_2) + (\nu z_1\overline{z}_2^2 + \overline{\nu}\overline{z}_1 z_2^2) + O(|z|^4 + |\operatorname{Re} w|\,|z|^2)$, где $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, $\mu\nu \neq 1$;

(A.5) $\operatorname{Im} w = |z_1|^2(\eta z_1 + \overline{\eta}\overline{z}_1) + (z_1^2\overline{z}_2 + \overline{z}_1^2 z_2) + (z_1\overline{z}_2^2 + \overline{z}_1 z_2^2) + O(|z|^4 + |\operatorname{Re} w|\,|z|^2)$, где $\eta \in \mathbb{C}$.

Если же форма Леви M в точке ξ имеет ровно одно ненулевое собственное значение, то:

(B.1) $\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + |z_2|^2(z_2 + \overline{z}_2) + \gamma(z_1^2\overline{z}_2 + \overline{z}_1^2 z_2) + O(|z|^4 + |\operatorname{Re} w|\,|z|^2)$, где $\gamma = 0, 1$;

(B.2) $\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + (z_1^2\overline{z}_2 + \overline{z}_1^2 z_2) + O(|z|^4 + |\operatorname{Re} w|\,|z|^2)$;

(B.3) $\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + |z_2|^2(z_1 + \overline{z}_1) + O(|z|^4 + |\operatorname{Re} w|\,|z|^2)$.

В работе [24] А. Ершова к каждому из восьми типов применила метод модельной поверхности. В частности, для каждого типа была получена точная оценка размерности группы автоморфизмов. Максимум размерности достигается для гиперповерхности $\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + |z_2|^2(z_2 + \overline{z}_2)$ (это тип (B.1) при $\gamma = 0$). Размерность всей группы равна семи, размерность подгруппы автоморфизмов, сохраняющих начало координат, трем.

Это вычисление, точнее та часть, которая касается типов (B.1), (B.2) и (B.3), позволяет закончить наше доказательство оценки размерности группы автоморфизмов произвольной неплоской вещественно аналитической гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$. Действительно, если M – вещественно аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^3$, не являющаяся локально плоской, то множество точек l-невырожденности, где $l \leqslant 2$, есть открытое плотное подмножество M [7]. Повторяя наше рассуждение для произвольных 16 полей, получаем, что они линейно зависимы, т.е. $\dim \operatorname{Aut} M_\xi \leqslant 15$.

Итак, сформулированная выше альтернатива справедлива и для поверхностей типа $(2,1)$.

Альтернатива (*для гиперповерхности в* $\mathbb{C}^3$):
либо $\dim \operatorname{Aut} M_\xi = \infty$ и M в окрестности любой своей точки эквивалентна гиперплоскости;
либо $\dim \operatorname{Aut} M_\xi \leqslant \dim \operatorname{Aut} Q(2,1) = 15$.

Таким образом, гиперквадрики являются самыми симметричными гиперповерхностями и в $\mathbb{C}^3$.

В $\mathbb{C}^3$ имеются две неэквивалентные гиперквадрики, но размерности их групп одинаковы и равны 15. Это специфика гиперповерхностей. Модельные поверхности более высокой коразмерности, например квадрики, могут иметь группы различных размерностей, однако для каждого типа есть оценка. Потому для формулировки общей гипотезы обозначим через $D(n,k)$ и $d(n,k)$ максимумы размерностей групп автоморфизмов и подгрупп стабильности соответственно по всем модельным поверхностям типа (n,k).

Гипотеза о размерности. Для ростка M_ξ любого вещественно аналитического многообразия имеет место следующая альтернатива:
либо $\dim \operatorname{Aut} M_\xi = \infty$,
либо $\dim \operatorname{Aut} M_\xi \leqslant D(n,k)$ и $\dim \operatorname{Aut}_\xi M_\xi \leqslant d(n,k)$.

В заключение заметим, что если ставить задачу построения системы модельных поверхностей, охватывающей все случаи вырождения, то такая задача естественно порождает древовидную классификацию ростков. Причем классификационное дерево не является конечным, что видно уже на примере гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. В. Абросимов Описание локально биголоморфных автоморфизмов стандартных квадрик коразмерности два // Матем. сб. 1993. Т. 184. №10. С. 3–52.
[2] Е. Г. Анисова Нуль-квадрики коразмерности 4 в пространстве $\mathbb{C}^7$ // Матем. заметки. 1997. Т. 62. №5. С. 657–665.
[3] Е. Г. Анисова Квадрики коразмерности 4 в $\mathbb{C}^7$ и их автоморфизмы // Матем. заметки. 1998. Т. 64. №6. С. 803–811.
[4] А. Ф. Арбатский О структуре группы нелинейных автоморфизмов $(3,3)$-квадрик // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №2. С. 164–173.
[5] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1999.
[6] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild Algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets in $\mathbb{C}^n$ // Acta Math. 1996. V. 177. P. 225–273.
[7] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild Local geometric properties of real submanifolds in complex space // Preprint Trita-Mat-1999-20. Stockholm: Royal Institute of Technology, 1999.
[8] M. S. Baouendi, X. Huang, L. P. Rothschild Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces // Invent. Math. 1996. V. 125. №1. P. 13–36.
[9] M. S. Baouendi, L. P. Rothschild, D. Zaitsev Equivalences of real submanifolds in complex space // Preprint, 2000, http://xxx.land.gov/abs/math.CV/0002186.

[10] В. К. Белошапка О размерности группы автоморфизмов аналитической гиперповерхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №2. С. 243–266.

[11] В. К. Белошапка Конечномерность группы автоморфизмов вещественно аналитической поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. №2. С. 437–442.

[12] В. К. Белошапка О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. Т. 182. №2. С. 203–219.

[13] В. К. Белошапка Геометрические инварианты CR-многообразий // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №5. С. 3–12.

[14] В. К. Белошапка Инварианты CR-многообразий, связанные с касательной квадрикой // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №1. С. 42–52.

[15] В. К. Белошапка Локальные инварианты и запреты на отображения CR-многообразий // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №4. С. 588–592.

[16] В. К. Белошапка Голоморфная классификация вещественных многообразий общего типа // Докл. РАН. 1998. Т. 360. №4. С. 442–444.

[17] В. К. Белошапка Кубическая модель вещественного многообразия // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №4. С. 503–519.

[18] В. К. Белошапка Полиномиальные модели вещественных многообразий // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. №4. С. 3–20.

[19] V. K. Beloshapka CR-varieties of the type $(1,2)$ as varieties of “super-high” codimension // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. №3. P. 399–404.

[20] E. Cartan Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes // Ann. Math. Pura Appl. (4). 1932. V. 11. P. 17–90. (Œuvres. V. 2. P. 1231–1304.)

[21] S. S. Chern, J. K. Moser Real hypersurfaces in complex manifold // Acta Math. 1974. V. 133. №3–4. P. 219–271.

[22] Е. М. Чирка Введение в геометрию CR-многообразий // УМН. 1991. Т. 46. №1. С. 81–164.

[23] P. Ebenfelt Normal forms and biholomorphic equivalence of real hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ // Indiana Univ. Math. J. 1998. V. 47. №2. P. 311–366.

[24] А. Е. Ершова Автоморфизмы 2-невырожденных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ // Матем. заметки. 2001. Т. 69. №2. С. 214–222.

[25] V. Ezhov, A. Isaev, G. Schmalz Invariants of elliptic and hyperbolic CR-structures of codimension 2 // Internat. J. Math. 1999. V. 10. №1. P. 1–52.

[26] V. Ezov, G. Schmalz Holomorphic automorphisms of quadrics // Math. Z. 1994. V. 216. №3. P. 453–470.

[27] V. Ezov, G. Schmalz Poincaré automorphisms for nondegenerate CR quadrics // Math. Ann. 1994. V. 298. №1. P. 79–87.

[28] V. Ezov, G. Schmalz A matrix Poincaré formula for holomorphic automorphisms of quadrics of higher codimension. Real associative quadrics // J. Geom. Anal. 1997. V. 8. №1. P. 27–41.

[29] В. Ежов, Г. Шмальц Автоморфизмы и голоморфные отображения стандартных CR-многообразий и области Зигеля // Прогресс в науке и технологии. Сер. Совр. матем. и ее прил. (Комплексный анализ и теория представлений. Т. 1.). М.: ВИНИТИ (в печати).

[30] V. Ezov, G. Schmalz Infinitesimale Starrheit hermitescher Quadriken in allgemeiner Lage // Math. Nachr. 1999. V. 204. P. 41–60.

[31] V. Ezov, G. Schmalz Automorphisms of nondegenerate CR-quadrics and Siegel domains. Explicit description // Preprint, Max-Planck-Institute für Matematik, 1994; (to appear in J. Geom. Anal.).

[32] M. Freeman Real submanifolds with degenerate Levi form // Proc. Sympos. Pure Math. 1977. V. 30. Part I. P. 141–147.

[33] T. Garrity, R. Mizner Invariants of vector-valued bilinear and sesquilinear forms // Linear Algebra Appl. 1995. V. 218. P. 225–237.

[34] Г. С. Гиндикин, И. И. Пятецкий-Шапиро, Э. Б. Винберг Классификация и каноническая реализация комплексных ограниченных однородных областей // Труды ММО. 1963. Т. 12. С. 404–437.

[35] Р. Хорн, Ч. Джонсон Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
[36] M. Janet Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles // J. Math. Pure Appl. 1920. V. 3. P. 65–151.
[37] А. С. Лабовский О размерности группы биголоморфных автоморфизмов вещественно аналитических поверхностей // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №3. С. 349–358.
[38] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц Квантовая механика. М.: Наука, 1972.
[39] А. В. Лобода Порождающие вещественно аналитические многообразия коразмерности 2 в $\mathbb{C}^2$ и их биголоморфные отображения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. №5. С. 970–990.
[40] А. В. Лобода Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии // Труды МИАН. 2001. Т. 235. С. 114–142.
[41] R. Mizner CR structures of codimension 2 // J. Differential Geom. 1989. V. 30. №1. P. 167–190.
[42] I. Naruki Holomorphic extention problem for standard real submanifolds of second kind // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1970. V. 6. №1. P. 113–187.
[43] Н. Ф. Палинчак О квадриках высокой коразмерности // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №5. С. 110–115.
[44] Н. Ф. Палинчак Вещественные квадрики коразмерности три в $\mathbb{C}^6$ и их нелинейные автоморфизмы // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №3. С. 159–179.
[45] Н. Ф. Палинчак О с-жестких квадриках // Деп. в ВИНИТИ РАН 10.04.95, №973-В95.
[46] С. И. Пинчук О голоморфных отображениях вещественно аналитических гиперповерхностей // Матем. сб. 1978. Т. 105. С. 574–593.
[47] H. Poincaré Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. V. 23. P. 185–220.
[48] И. И. Пятецкий-Шапиро Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Физматгиз, 1961.
[49] А. Рябоненко О жесткости кубики типа (n, n^2+1) // Дипломная работа. М.: механико-математический ф-т МГУ, 2001.
[50] I. Satake Algebraic Structures of Symmetric Domains. Tokyo / Princeton: Ivanami Shoten / Princeton Univ. Press, 1980. (Kâno Memorial Lectures. V. 4.)
[51] Е. Н. Шананина Модели CR-многообразий типа $(1, k)$ при $3 \leqslant k \leqslant 7$ и их автоморфизмы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №3. С. 452–459.
[52] С. Н. Шевченко Описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов квадрик коразмерности два и их классификация // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №5. С. 142–153.
[53] С. Н. Шевченко Квадрики коразмерности два и их автоморфизмы // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №4. С. 149–172.
[54] N. K. Stanton Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces // Amer. J. Math. 1995. V. 117. №1. P. 141–167; 1996. V. 118. №1. P. 209–233.
[55] С. Стернберг Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
[56] A. Sukhov Segre varieties and Lie symmetries // Publ. Inst. Rech. Math. Av., Lille. V. 50, 1999.
[57] A. Sukhov On CR-mappings of real quadric manifolds // Michigan Math. J. 1999. V. 41. P. 143–150.
[58] N. Tanaka On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables // J. Math. Soc. Japan. 1962. V. 14. P. 397–429; II. Graded Lie algebras and geometric structures // Proc. Unated States–Japan Seminar in Differential Geometry (Kyoto, 1965), 1966. P. 147–150.
[59] A. Tress Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. Leipzig: Hirzel, 1896.
[60] А. Е. Туманов Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. №3. С. 651–659.
[61] А. Е. Туманов Геометрия CR-многообразий // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 9. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 225–245.

[62] H. W. Turnbull On the equivalence of pencils of Hermitian forms // Proc. London Math. Soc. (2). 1935. T. 39. №3. C. 232–248.
[63] П. Б. Уткин Гипотеза о размерности для квадрик коразмерности три и более // Матем. заметки (в печати).
[64] А. Г. Витушкин Голоморфные отображения и геометрия поверхностей // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 7. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 167–226.
[65] S. Webster On the mappings problem for algebraic real hypersurfaces // Invent. Math. 1977. V. 43. P. 53–68.
[66] D. Zaitsev Regularization of birational group operations in sense of Weil // J. Lie Theory. 1995. V. 5. №2. P. 207–224.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: vkb@strogino.ru

Поступила в редакцию
03.12.2001