В. К. Белошапка, Квазипериодическая система полиномиальных моделей CR-многообразий, *Тр. МИАН*, 2001, том 235, 7–35

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2001, т. 235, с. 7–35

УДК 514.763.47

Квазипериодическая система полиномиальных моделей CR-многообразий[1]

©2001 г. В. К. Белошапка[2]

Поступило в феврале 2001 г.

В работе строятся полиномиальные модели ростков вещественных подмногообразий комплексного пространства. Для ростков, чья алгебра Леви–Танаки имеет длину 2, такой достаточно хорошо изученной моделью является касательная квадрика. Показано, что модели третьей и четвертой степеней (алгебры длины 3 и 4) в своих диапазонах коразмерностей обладают полным спектром свойств, вполне аналогичных свойствам касательных квадрик. Для построенных моделей высших степеней получен весь спектр свойств с единственным исключением — они не обладают полной универсальностью.

1. ВВЕДЕНИЕ

Со времен А. Пуанкаре известно, что условие конечномерности группы биголоморфных автоморфизмов ростка вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ можно сформулировать в терминах 2-струи ростка. Позже было показано [14, 15, 11], что так же обстоят дела и для гиперповерхности в комплексном пространстве произвольной размерности, не меньшей двух. Это условие — условие невырожденности формы Леви ростка. Точнее, верно следующее: если форма не вырождена, то группа конечномерна; если вырождена, то можно указать гиперповерхность с этой формой (гиперквадрику), группа которой бесконечномерна. При этом ясно, что в терминах 1-струи такое условие сформулировать нельзя.

Пусть гиперповерхность задана в $\mathbb{C}^{n+1}$ с координатами $(z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^k)$ уравнением $\operatorname{Im} w = F(z, \overline{z}, \operatorname{Re} w)$. Введем градуировку условиями $[z] = 1$, $[\bar{z}] = 1$, $[\operatorname{Re} w] = 2$. Эрмитову часть компоненты веса 2 обозначим через $\langle z, \bar{z}\rangle$. Это форма Леви данного ростка в начале координат. После квадратичной замены уравнение ростка примет вид

$$\operatorname{Im} w = \langle z, \overline{z}\rangle + \text{Члены веса не меньше 3}. \tag{1}$$

Таким образом, условие конечномерности группы ростка — это условие невырожденности эрмитовой формы $\langle z, \bar{z}\rangle$. Гиперповерхность $Q = \{\operatorname{Im} w = \langle z, \bar{z}\rangle\}$ называется касательной гиперквадрикой. Мы говорим, что гиперквадрика является хорошей моделью ростка невырожденной гиперповерхности, и в развернутой форме это означает, что справедливы следующие утверждения.

1. Росток любой гиперповерхности эквивалентен ростку вида (1) (универсальность).

2. Гиперквадрика — это алгебраическая поверхность, заданная уравнениями степени $d = 2$, любая гиперповерхность, заданная уравнениями меньшей степени, имеет бесконечномерную группу.

3. Голоморфная эквивалентность гиперквадрик совпадает с их линейной эквивалентностью.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00969) и частичной поддержке грантом Шведской академии наук. Работа была начата в Гетеборгском университете, куда автор был любезно приглашен профессором Н. Щербиной.

[2]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: vkb@strogino.ru

4. Размерность группы гиперповерхности не превосходит размерности группы касательной гиперквадрики (экстремальность).

5. Гиперквадрика однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно; на самом деле, однородность обеспечивается аффинными автоморфизмами (однородность).

6. Имеется простой критерий конечномерности группы гиперквадрики (условие невырожденности эрмитовой формы — формы Леви), причем условие невырожденности является условием общего положения (конечномерность).

7. Алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной гиперквадрике — это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей ограниченной степени; степени коэффициентов не превосходят 2 (полиномиальность алгебры).

8. Группа автоморфизмов невырожденной гиперквадрики — это подгруппа группы дробно-линейных преобразований $\mathbb{C}^{n+1}$ (рациональность группы).

Эти утверждения либо в той или иной форме присутствуют в [14, 15, 11], либо очевидны.

Для ростков порождающих поверхностей коразмерности $k \geq 1$ можно повторить все почти дословно. Только уравнение ростка надо писать в $\mathbb{C}^{n+k}$ с координатами $(z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^k)$. Тогда пара параметров (n, k), где n — размерность комплексной касательной, а k — коразмерность, определяет тип ростка. Эрмитова форма $\langle z, \bar{z} \rangle$ принимает значения в $\mathbb{R}^k$. Критерий конечномерности квадрики типа (n, k), который естественно взять за определение невырожденности векторнозначной эрмитовой формы и который обобщает условие невырожденности скалярной эрмитовой формы [2], состоит из двух частей: 1) координатные скалярные формы $\langle z, \overline{z} \rangle_1, \ldots, \langle z, \overline{z} \rangle_k$ линейно независимы; 2) не существует ненулевого вектора e, ортогонального всем векторам относительно всех координатных форм, т.е. из $\langle e, \overline{z} \rangle = 0$ для всех z следует, что $e = 0$.

Невырожденная касательная квадрика является столь же хорошей модельной поверхностью, как и гиперквадрика для поверхности типа $(n, 1)$ [2]. А именно справедливы следующие утверждения.

1. Любой росток порождающей поверхности эквивалентен ростку вида (1) (универсальность).

2. Квадрика — это алгебраическая поверхность, заданная уравнениями степени $d = 2$; любая поверхность, заданная уравнениями меньшей степени, имеет бесконечномерную группу.

3. Голоморфная эквивалентность квадрик совпадает с их линейной эквивалентностью.

4. Размерность группы поверхности не превосходит размерности группы касательной квадрики (экстремальность).

5. Квадрика однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно; на самом деле, однородность обеспечивается аффинными автоморфизмами (однородность).

6. Имеется простой критерий конечномерности группы квадрики (условие невырожденности эрмитовой формы — формы Леви), причем условие невырожденности является условием общего положения (конечномерность).

7. Алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной квадрике — это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей ограниченной степени; степени коэффициентов не превосходят 2 (полиномиальность алгебры).

8. Группа автоморфизмов невырожденной квадрики — это некая подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+k}$, степени которых (числителей и знаменателей в несократимом представлении) ограничены константой, зависящей лишь от n и k [6] (см. также замечание 2 после предложения 8) (рациональность группы).

При этом отметим, что требования универсальности и однородности, с одной стороны, и требование конечномерности, с другой стороны, являются в определенном смысле антагонистами. Первая пара требований стремится понизить степень d, тогда как требование конечномерности ведет к ее повышению. Поэтому существование объекта, для которого конечномерность уже есть, а универсальность и однородность еще не исчезли, следует рассматривать как большую удачу.

Однако при росте коразмерности возникает некоторое осложнение. Дело в том, что размерность пространства эрмитовых матриц размера n конечна и равна n^2. Если коразмерность превзойдет этот рубеж, то первая часть условия конечномерности становится невыполнима. Это приводит к тому, что все квадрики такого типа оказываются вырожденными, а их группы бесконечномерными. Таким образом, при $k > n^2$ невозможно сформулировать критерий конечномерности группы ростка типа (n, k) в терминах 2-струи.

Есть еще одно обстоятельство, побуждающее перейти к рассмотрению моделей более высоких степеней. Все работы по квадратичным моделям были выполнены во II тысячелетии и наступление III тысячелетия требует рассмотрения кубических моделей.

В работе [4] была рассмотрена самая маломерная ситуация с нарушением условия $k \le n^2$. А именно для поверхности типа $(1, 2)$, т.е. для поверхности коразмерности 2 в $\mathbb{C}^3$, была предложена модельная поверхность третьей степени, удовлетворяющая свойствам 1–8. Вот эта поверхность:

$$Q = \{\operatorname{Im} w_1 = |z|^2,\ \operatorname{Im} w_2 = 2|z|^2 \operatorname{Re} z\}.$$

В работе [8] аналогичные построения были осуществлены для ростков типа $(1, k)$ при $k = 3 \div 7$.

Данная работа состоит из двух частей. В первой (разд. 2) строится поверхность, заданная уравнениями второй и третьей степени — “кубика” типа $(n, K = n^2 + k)$, относительно которой доказывается, что она при выполнении естественных ограничений $n^2 < K \le n^2(n+2)$ является хорошей моделью (в смысле требований 1–8) ростка многообразия того же типа (теорема 9). Во второй части (разд. 3) дается описание серии модельных поверхностей произвольных степеней $d \ge 4$. Полный список требований имеет место для $d = 4$, для остальных поверхностей доказывается выполнение всех требований, за исключением требования универсальности (теорема 20, заключительное замечание).

При $n = 1$, как было показано в [8], утверждение 1 перестает выполняться при $k \ge 7$ и $d \ge 5$. При этом утверждение 2 можно сформулировать с некоторыми оговорками, но мы не будем этого делать. То есть данный тип моделей не обладает универсальностью. При этом проблема построения универсальной хорошей модели остается.

2. КУБИКА КАК ХОРОШАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^{n+n^2+k}$ с координатами $(z \in \mathbb{C}^n, w_2 \in \mathbb{C}^{n^2}, w_3 \in \mathbb{C}^k)$, $n > 0$, $k > 0$, росток поверхности типа $(n, n^2 + k)$, заданный в нуле уравнениями

$$\operatorname{Im} w_2 = F(z, \bar z, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Re} w_3), \qquad \operatorname{Im} w_3 = G(z, \bar z, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Re} w_3), \tag{2}$$

где F и G — гладкие отображения без постоянных и линейных членов. Обозначим $\operatorname{Re} w_2$ через x и $\operatorname{Re} w_3$ через y, введем градуировку, назначая веса следующим образом: $[z] = [\bar z] = 1$, $[w_2] = [x] = 2$, $[w_3] = [y] = 3$. Тогда (2) примет вид

$$\operatorname{Im} w_2 = F_2 + \dots, \qquad \operatorname{Im} w_3 = G_2 + \dots \tag{3}$$

Координаты F_2 и G_2 — это однородные многочлены второй степени, зависящие только от z и $\bar z$, содержащие слагаемые бистепеней $(2,0)$, $(1,1)$ и $(0,2)$. Бистепени $(2,0)$ и $(0,2)$ уберем квадратичной заменой. Эрмитову компоненту F_2 обозначим $\langle z,\bar z\rangle$. Это форма Леви нашего ростка. Будем предполагать, что она не вырождена. Невырожденность эрмитовой формы со значениями в $\mathbb{R}^{n^2}$ — это не что иное, как линейная независимость координатных форм. Таким образом, координаты нашей формы — это базис пространства эрмитовых форм размерности n. Это означает, что две любые такие формы эквивалентны, а также то, что любая эрмитова форма есть их линейная комбинация. Поэтому, вычитая из второго соотношения линейную комбинацию координат первого, эрмитову часть G_2 можно сделать равной нулю. В результате (3) принимает вид

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z,\bar z\rangle + F_3 + \dots, \qquad \operatorname{Im} w_3 = G_3 + \dots$$

При этом $G_3 = 2\operatorname{Re}(G_{2,1,0}(z,z,\bar z) + G_{1,0,1}(z,x))$, поэтому после замены $z\to z$, $w_2\to w_2$, $w_3\to w_3 + 2iG_{1,0,1}(z,w_2)$ получаем

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z,\bar z\rangle + F_3 + \dots, \qquad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}\Phi(z,z,\bar z) + G_4 + \dots, \tag{4}$$

где кубическая форма с векторными значениями Φ линейна по всем трем переменным, а по первым двум симметрична.

Пусть поверхность Q задана уравнениями

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z,\bar z\rangle, \qquad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}\Phi(z,z,\bar z). \tag{5}$$

Определение 1. Вещественно алгебраическую поверхность Q вида (5) будем называть *касательной кубикой ростка M_0 вида* (4). Поверхность и росток будем называть *невырожденными*, если форма $\langle z,\bar z\rangle$ не вырождена и координатные кубические формы $\Phi_1,\dots,\Phi_k$ линейно независимы.

Условие невырожденности заключает в себе естественное ограничение на значения параметра k. Вещественная размерность пространства многочленов бистепени $(2,1)$ от n-мерного комплексного переменного равна $n^2(n+1)$. Это означает, что невырожденные кубики возможны лишь при выполнении условия $1\le k\le n^2(n+1)$.

Так же как эрмитова форма $\langle z,\bar z\rangle$ связана с коммутаторами векторных полей на поверхности [7], для кубической формы $\Phi(z,z,\bar z)$ можно указать эту связь.

Уравнения касательной к кубике имеют вид

$$\operatorname{Im} dw_2 = 2\operatorname{Re}\langle dz,\bar z\rangle, \qquad \operatorname{Im} dw_3 = 2\operatorname{Re}(2\Phi(dz,z,\bar z) + \overline{\Phi}(\bar z,\bar z,dz)).$$

Поэтому уравнения комплексной касательной можно записать так:

$$dw_2 = 2i\langle dz,\bar z\rangle, \qquad dw_3 = 4i\Phi(dz,z,\bar z) + 2i\overline{\Phi}(\bar z,\bar z,dz).$$

Каждому вектору $\alpha\in\mathbb{C}^n$ поставим в соответствие векторные поля $\mathcal{Z}_\alpha\in T^{(1,0)}(Q)$:

$$\mathcal{Z}_\alpha = \alpha\frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle\alpha,\bar z\rangle\frac{\partial}{\partial w_2} + 2i(2\Phi(\alpha,z,\bar z) + \overline{\Phi}(\bar z,\bar z,\alpha))\frac{\partial}{\partial w_3}$$

и $\Theta_\alpha = \mathcal{Z}_\alpha + \overline{\mathcal{Z}}_\alpha \in T(Q)$. Вычисляя коммутаторы, получаем

$$[\mathcal{Z}_\alpha, \overline{\mathcal{Z}}_\beta] = -2i\langle \alpha, \bar\beta\rangle \left(\frac{\partial}{\partial w_2} + \frac{\partial}{\partial \bar w_2}\right) - 4i(\Phi(\alpha, z, \bar\beta) + \overline{\Phi}(\bar\beta, \bar z, \alpha)) \left(\frac{\partial}{\partial w_3} + \frac{\partial}{\partial \bar w_3}\right),$$

$$[\mathcal{Z}_\alpha, [\mathcal{Z}_\beta, \overline{\mathcal{Z}}_\gamma]] = -4i\Phi(\alpha, \beta, \bar\gamma) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar w}\right),$$

$$[\overline{\mathcal{Z}}_\alpha, [\mathcal{Z}_\beta, \overline{\mathcal{Z}}_\gamma]] = -4i\overline{\Phi}(\bar\alpha, \bar\gamma, \beta) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar w}\right),$$

$$[[\mathcal{Z}_\alpha, \overline{\mathcal{Z}}_\beta], \mathcal{Z}_\gamma] = 4i\Phi(\alpha, \gamma, \bar\beta) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar w}\right),$$

$$[[\mathcal{Z}_\alpha, \overline{\mathcal{Z}}_\beta], \overline{\mathcal{Z}}_\gamma] = 4i\overline{\Phi}(\bar\gamma, \bar\beta, \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar w}\right),$$

$$[\Theta_\alpha, \Theta_\beta] = 2\,\mathrm{Re}[\mathcal{Z}_\alpha, \overline{\mathcal{Z}}_\beta],$$

$$[[\Theta_\alpha, \Theta_\beta], \Theta_\gamma] = 2\,\mathrm{Re}[[\mathcal{Z}_\alpha, \overline{\mathcal{Z}}_\beta], \mathcal{Z}_\gamma].$$

Ясно, что коммутаторы более высоких порядков равны нулю.

Градуированная алгебра Леви–Танаки [13] индуктивно определяется соотношениями

$$D^1 = T^c(Q), \qquad D^{j+1} = [D^j, D^1] + D^j.$$

Из наших вычислений следует

Предложение 2. *Градуированная алгебра Леви–Танаки кубики имеет вид* $T^c(Q) = D^1 \subset D^2 \subset D^3 = T(Q)$, *т.е. ее длина равна* 3.

Отметим, что для квадрики ее длина равна 2 — линейные комбинации первых скобок дают все касательное пространство. Если вычисления коммутаторов проводить не для кубики, а для произвольного ростка вида (4), то формулы для двойных скобок остаются в силе, однако их следует понимать как равенство значений полей в центре ростка.

В терминологии [7] речь идет о формах Леви высших порядков, при этом невырожденная кубика, как и невырожденный росток вида (4), характеризуется как поверхность, имеющая тип 3 в каждой своей точке. Пользуясь терминологией, предложенной в [10], можно сказать, что эти поверхности являются 2-невырожденными, тогда как невырожденность формы Леви — это тип 2, или 1-невырожденность.

Предложение 3. *Для любой точки кубики*

$$\xi = (p, q + i\langle p, \bar p\rangle, r + 2i\,\mathrm{Re}\,\Phi(p, p, \bar p))$$

существует треугольный квадратично полиномиальный автоморфизм, переводящий начало координат в эту точку.

Доказательство. Автоморфизм можно вычислить следующим образом. Подвергнем переменную z сдвигу $z \to z + p$ и подставим ее в уравнение кубики. Приведем простыми квадратичными преобразованиями полученное уравнение к исходному виду. При этом воспользуемся тем, что любую эрмитову форму, в том числе и $\mathrm{Re}\,\Phi(z, p, \bar z)$, можно записать в виде $s\langle z, \bar z\rangle$, где s — некоторая вещественная матрица. В результате получаем следующий явный вид искомого преобразования:

$$\begin{aligned}
&z \to p + z,\\
&w_2 \to (q + i\langle p, \bar p\rangle) + 2i\langle z, \bar p\rangle + w_2,\\
&w_3 \to (r + 2i\,\mathrm{Re}\,\Phi(p, p, \bar p)) + 4i\Phi(z, p, \bar p) + 2i\Phi(z, z, \bar p) + 2i\overline{\Phi}(\bar p, \bar p, z) + s w_2 + w_3.
\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Рассмотрим вопрос о действии голоморфных отображений на касательную кубику. Пусть имеются два ростка: росток M_0, заданный уравнениями (4), и росток того же вида $\widetilde{M}_0$ с уравнениями

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar{z}\rangle + \widetilde{F}_3 + \dots, \qquad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}\widetilde{\Phi}(z,z,\bar{z}) + \widetilde{G}_4 + \dots, \tag{6}$$

и пусть отображение $(z \to f(z,w_2,w_3),\ w_2 \to g(z,w_2,w_3),\ w_3 \to h(z,w_2,w_3))$ переводит первый росток во второй, т.е. при $w_2 = x + i\langle z,\bar{z}\rangle + \dots$ и $w_3 = y + 2i\operatorname{Re}\Phi(z,z,\bar{z}) + \dots$ имеют место соотношения

$$\operatorname{Im} g = \langle f, \bar{f}\rangle + \widetilde{F}_3 + \dots, \qquad \operatorname{Im} h = 2\operatorname{Re}\widetilde{\Phi}(f,f,\bar{f}) + \widetilde{G}_4 + \dots$$

Используя весовые разложения компонент отображения, будем выделять в этих соотношениях компоненты одинаковых весов. При этом считаем, что отображение оставляет нуль на месте, т.е. $f_0 = 0$, $g_0 = 0$, $h_0 = 0$. Получаем следующие соотношения.

$\operatorname{Im} g_1 = 0$, т.е. $g_1 = 0$.

$\operatorname{Im} h_1 = 0$, откуда следует, что $h_1 = 0$.

Пусть $f_1 = \Lambda z$, $g_2 = g_{2,0} + \rho w_2$, тогда из $\operatorname{Im} g_2 = \langle f_1, \bar{f}_1\rangle$ получаем $g_{2,0} = 0$, $\operatorname{Im}\rho = 0$, $\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z}\rangle = \rho\langle z,\bar{z}\rangle$.

$\operatorname{Im} h_2 = 0$, откуда $h_2 = 0$.

Пусть $h_3 = A(z,z,z) + B(z,w_2) + \nu w$, тогда из $\operatorname{Im} h_3 = 2\operatorname{Re}\widetilde{\Phi}(f_1,f_1,\bar{f}_1)$ следует, что $A = 0$, $B = 0$, $\widetilde{\Phi}(\Lambda z, \Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \nu\Phi(z,z,\bar{z})$.

Многочисленные следствия из этого простого вычисления сформулируем в виде следующего предложения.

Предложение 4. 1. *Если росток* (4) *локально биголоморфно эквивалентен ростку* (6), *то их касательные кубики также голоморфно эквивалентны.*

2. *Две кубики локально биголоморфно эквивалентны в том и только том случае, когда они эквивалентны линейно.*

3. *Если* (f,g,h) *— отображение ростка* (4) *в росток* (6), *то* $f = \Lambda z + f_2 + \dots$, $g = \rho w_2 + g_3 + \dots$, $h = \nu w_3 + h_4 + \dots$, *причем* $\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z}\rangle = \rho\langle z,\bar{z}\rangle$ *и* $\widetilde{\Phi}(\Lambda z, \Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \nu\Phi(z,z,\bar{z})$.

4. *Линейная часть отображения имеет следующий блочный вид*:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & * & * \\ 0 & \rho & * \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

5. *Линейное отображение* $z \to \Lambda z$, $w_2 \to \rho w_2$, $w_3 \to \nu w_3$ *является отображением между касательными кубиками.*

6. *Действие голоморфного отображения на росток поверхности порождает следующее действие группы* $GL(n,\mathbb{C}) \oplus GL(k,\mathbb{R})$:

$$\Phi(z,z,\bar{z}) \to \nu\Phi(\Lambda^{-1}z, \Lambda^{-1}z, \overline{\Lambda^{-1}z}).$$

7. *Линейная подгруппа группы голоморфных автоморфизмов кубики — это группа вида* $z \to \Lambda z$, $w_2 \to \rho w_2$, $w_3 \to \nu w_3$, *где* $\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z}\rangle = \rho\langle z,\bar{z}\rangle$ *и* $\Phi(\Lambda z, \Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \nu\Phi(z,z,\bar{z})$.

Предложение 5. A. *Линейная независимость координат формы* $\Phi(z,z,\bar{z})$ *является необходимым и достаточным условием конечномерности группы автоморфизмов кубики.*

B. *Если линейная независимость имеется, то алгебра инфинитезимальных автоморфизмов кубики состоит из векторных полей, коэффициенты которых являются полиномами степени не выше чем* 5.

Доказательство. Наличие линейной зависимости позволяет линейной заменой по w сделать одну из координат Φ равной нулю. Тогда при сохранении остальных координат к этой можно применять любое локально обратимое преобразование, задающееся степенным рядом с вещественными коэффициентами. Это доказывает необходимость утверждения А.

Для того чтобы доказать достаточность, будем доказывать конечномерность алгебры голоморфных векторных полей на кубике, т.е. полей, порождающих локальные однопараметрические группы голоморфных автоморфизмов Q. Это вещественные поля вида

$$X = 2\,\mathrm{Re}\left(f\frac{\partial}{\partial z} + g\frac{\partial}{\partial w_2} + h\frac{\partial}{\partial w_3}\right),$$

где коэффициенты голоморфны в окрестности нуля, а на Q они удовлетворяют условию касания

$$\mathrm{Im}\, g = 2\,\mathrm{Re}\langle f, \bar z\rangle, \qquad \mathrm{Im}\, h = 2\,\mathrm{Re}(2\Phi(f, z, \bar z) + \Phi(z, z, \bar f)). \tag{7}$$

В этих соотношениях будем отделять компоненты фиксированных бистепеней. При этом будем использовать разложения вида $f(z, w_2, w_3) = \sum f_m(z, w_2, w_3)$, где m — это степень по z, и обозначения $\triangle f = \partial_x f(\langle z, \bar z\rangle)$ и $\square f = \partial_y f(\Phi(z, z, \bar z))$. Получаем следующие соотношения.

$(0,0)$ $\mathrm{Im}\, g_0(x,y) = 0$, обозначим g_0 через a;
$\mathrm{Im}\, h_0(x,y) = 0$, обозначим h_0 через b.

$(1,0)$ $ig_1 + 2\langle z, \bar f_0\rangle = 0$, и если $f_0 = A$, то $g_1 = 2i\langle z, \overline{A}\rangle$;
$ih_1 = 0$.

$(2,0)$ $ig_2 = 0$;
$ih_2 + 2\Phi(z, z, \overline{A}) = 0$, т.е. $h_2 = 2i\Phi(z, z, \overline{A})$.

...

$(m,0)$ при $m \geq 3$
$ig_m = 0$;
$ih_m = 0$.

$(1,1)$ $\mathrm{Re}(i^2 \triangle g_0 + 2\langle f_1, \bar z\rangle) = 0$;
$\mathrm{Re}(i^2 \triangle h_0 + 4\Phi(f_0, z, \bar z) = 0$;
или, если обозначить f_1 через Bz, $\triangle a = 2\,\mathrm{Re}\langle Bz, \bar z\rangle$, $\triangle b = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(A, z, \bar z)$.

$(2,1)$ $i^2 \triangle g_1 + 2i^2 \square g_0 + 2\langle f_2, \bar z\rangle + 2\langle z, \overline{i \triangle f_0}\rangle = 0$;
$i^2 \triangle h_1 + 2i^2 \square h_0 + 4\Phi(f_1, z, \bar z) + 2\Phi(z, z, \bar f_1) = 0$;
или, если обозначить f_2 через $C(z,z)$, $\square a = \langle C(z,z), \bar z\rangle - 2i\langle z, \triangle \overline{A}\rangle$, $\square b = 2\Phi(Bz, z, \bar z) + {}$
$+ \Phi(z, z, \overline{Bz})$.

$(3,1)$ $i^2 \triangle g_2 + i^2 \square g_1 + 2\langle f_3, \bar z\rangle + 2\langle z, \overline{i \square \bar f_0}\rangle = 0$;
или, если обозначить f_3 через $D(z,z,z)$, $\langle D(z,z,z), \bar z\rangle = 2i\langle z, \square \overline{A}\rangle$.

$(4,1)$ $2\langle f_4, \bar z\rangle = 0$, т.е. $f_4 = 0$.

...

$(m,1)$ при $m \geq 5$
$2\langle f_m, \bar z\rangle = 0$, т.е. $f_m = 0$.

Еще нам понадобятся некоторые соотношения веса $(m,2)$.

$(2,2)$ $\mathrm{Im}\langle \triangle Bz, \bar z\rangle = 2\,\mathrm{Im}\langle z, \square \overline{A}\rangle$.

$(3,2)$ $2\square\,\mathrm{Im}\langle Bz, \bar z\rangle - i\langle \triangle C(z,z), \bar z\rangle = 0$.

$(4,2)$ $\langle \triangle D(z,z,z), \bar z\rangle + \langle \square C(z,z), \bar z\rangle = 0$.

$(5,2)$ $\langle \square D(z,z,z), \bar z\rangle = 0$.

Таким образом получаем, что поле X зависит от следующего набора величин:

$$\mathcal{A}(x,y) = \Big(a(x,y), b(x,y), A(x,y), B(x,y), C(x,y), D(x,y)\Big).$$

Эти величины связаны следующими соотношениями:

$$\triangle\, a = 2\,\mathrm{Re}\langle Bz, \bar z\rangle; \tag{8}$$

$$\triangle\, b = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(A, z, \bar z); \tag{9}$$

$$\Box\, a = \langle C(z,z), \bar z\rangle - 2i\langle z, \triangle\,\overline{A}\rangle; \tag{10}$$

$$\Box\, b = 2\Phi(Bz, z, \bar z) + \Phi(z, z, \overline{Bz}); \tag{11}$$

$$\langle D(z,z,z), \bar z\rangle = 2i\langle z, \Box\,\overline{A}\rangle; \tag{12}$$

$$\mathrm{Im}\langle \triangle\, Bz, \bar z\rangle = 2\,\mathrm{Im}\langle z, \Box\,\overline{A}\rangle; \tag{13}$$

$$2\,\Box\,\mathrm{Im}\langle Bz, \bar z\rangle - i\langle \triangle\, C(z,z), \bar z\rangle = 0; \tag{14}$$

$$\langle \triangle\, D(z,z,z), \bar z\rangle + \langle \Box\, C(z,z), \bar z\rangle = 0; \tag{15}$$

$$\langle \Box\, D(z,z,z), \bar z\rangle = 0. \tag{16}$$

Эти равенства — соотношения на полиномы от z и $\bar z$. Если записать их как покоэффициентные равенства, то мы получим линейную с постоянными коэффициентами систему дифференциальных уравнений с частными производными на коэффициенты искомых величин, которые являются функциями x и y. К этой системе применима теорема Эренпрайса–Паламодова об экспоненциальном представлении [5]. С помощью этой теоремы критерий конечномерности пространства решений удобно формулировать в терминах характеристического множества системы. Для конечномерности необходимо и достаточно, чтобы характеристическое множество представляло собой конечный набор точек. Характеристическое множество — это совокупность показателей $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^{n^2+k}$, являющихся показателями решений системы вида

$$\mathcal{A}(x,y) = \widetilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot y), \tag{17}$$

где $\widetilde{\mathcal{A}}$ — постоянный ненулевой вектор. Покажем, что из условия линейной независимости координат кубической формы Φ следует, что характеристическое множество нашей системы состоит из единственной точки — начала координат ($\lambda = 0, \mu = 0$). Отметим, что

$$\begin{aligned} \triangle(\widetilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda\cdot x + \mu\cdot y)) &= (\lambda \cdot \langle z, \bar z\rangle)\widetilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda\cdot x + \mu\cdot y), \\ \Box(\widetilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda\cdot x + \mu\cdot y)) &= (\mu \cdot \Phi(z,z,\bar z))\widetilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda\cdot x + \mu\cdot y). \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя (17) в (8)–(16) и учитывая (18), получаем

$$(\lambda \cdot \langle z, \bar z\rangle)\tilde a = 2\,\mathrm{Re}\langle \widetilde{B} z, \bar z\rangle; \tag{19}$$

$$(\lambda \cdot \langle z, \bar z\rangle)\tilde b = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(\widetilde{A}, z, \bar z); \tag{20}$$

$$(\mu \cdot \Phi(z,z,\bar z))\tilde a = \langle \widetilde{C}(z,z), \bar z\rangle - 2i(\lambda \cdot \langle z, \bar z\rangle)\langle z, \overline{\widetilde{A}}\rangle; \tag{21}$$

$$(\mu \cdot \Phi(z,z,\bar z))\tilde b = 4\Phi(\widetilde{B} z, z, \bar z) + 2\Phi(z, z, \overline{\widetilde{B} z}); \tag{22}$$

$$\langle \widetilde{D}(z,z,z), \bar z\rangle = 2i(\mu \cdot \Phi(z,z,\bar z))\langle z, \overline{\widetilde{A}}\rangle; \tag{23}$$

$$(\lambda \cdot \langle z, \bar z\rangle)\,\mathrm{Im}\langle \widetilde{B} z, \bar z\rangle = 2\,\mathrm{Im}((\mu \cdot \Phi(z,z,\bar z))\langle \widetilde{A}, \bar z\rangle); \tag{24}$$

$$4(\mu\cdot\Phi(z,z,\bar z))\,\mathrm{Im}\langle\widetilde{B}z,\bar z\rangle+2i(\lambda\cdot\langle z,\bar z\rangle)\langle\widetilde{C}(z,z),\bar z\rangle=0; \tag{25}$$

$$(\lambda\cdot\langle z,\bar z\rangle)\langle\widetilde{D}(z,z,z),\bar z\rangle+(\mu\cdot\Phi(z,z,\bar z))\langle\widetilde{C}(z,z),\bar z\rangle=0; \tag{26}$$

$$(\mu\cdot\Phi(z,z,\bar z))\langle\widetilde{D}(z,z,z),\bar z\rangle=0. \tag{27}$$

Пусть сначала $\lambda\neq0$ и $\mu\neq0$. Из (27) получаем, что $\widetilde{D}=0$; тогда из (26) следует, что $\widetilde{C}=0$.

Из (25) следует, что $\widetilde{B}$ — скалярная матрица. Покажем это. Действительно, (25) принимает вид $\mathrm{Im}\langle\widetilde{B}z,\bar z\rangle=0$. То, что любая эрмитова форма может быть записана как линейная комбинация координат формы $\langle z,\bar z\rangle$, означает, что для любой эрмитовой матрицы H имеет место соотношение $H\widetilde{B}=\widetilde{B}^*H$. Подставляя вместо H единичную матрицу E, получаем, что $\widetilde{B}$ эрмитова и равенство превращается в условие коммутирования $H\widetilde{B}=\widetilde{B}H$. Но так как любая матрица может быть записана в виде $M=H_1+iH_2$, где H_1 и H_2 эрмитовы, то $\widetilde{B}$ коммутирует с любой матрицей $M\widetilde{B}=\widetilde{B}M$, т.е. $\widetilde{B}$ — вещественная скалярная матрица.

Далее из (23) получаем, что $\widetilde{A}=0$; из (21) получаем, что $\tilde a=0$; из (20) получаем, что $\tilde b=0$; из (22) получаем, что $\widetilde{B}=0$. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{A}}=0$. Противоречие.

Пусть теперь $\lambda=0$, а $\mu\neq0$. Из (27) опять получаем, что $\widetilde{D}=0$; тогда из (26) следует, что $\widetilde{C}=0$; из (25) и (19) следует, что $\widetilde{B}=0$; из (23) получаем, что $\widetilde{A}=0$; из (21) получаем, что $\tilde a=0$; из (20) получаем, что $\tilde b=0$; из (22) получаем, что $\widetilde{B}=0$. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{A}}=0$. Противоречие. Таким образом, при выполнении условия невырожденности единственным характеристическим значением системы является начало координат $(\lambda=0,\mu=0)$.

Мы применяем теорему об экспоненциальном представлении в ситуации, когда характеристическое множество нульмерно. К такой же ситуации приводит рассмотрение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Как известно, общее решение однородного уравнения есть сумма экспонент с полиномиальными множителями. Каждое слагаемое — это подпространство пространства решений, состоящее из решений, относящихся к одному характеристическому значению. У каждого из этих подпространств можно определить размерность и степень (как наивысшая степень полиномиального множителя). При этом для обыкновенных уравнений Степень $+\,1=$ Размерность $=$ Кратность данного характеристического значения. Те же характеристики можно рассмотреть и для каждого изолированного характеристического значения произвольной линейной системы с постоянными коэффициентами. И если правильно понимаемая кратность (коразмерность подмодуля) остается равной размерности подпространства пространства решений, соответствующего данному значению, вопрос о степени является менее ясным. Однако для нашей системы можно получить неплохую оценку степени непосредственно.

Рассмотрим соотношение (16) как систему уравнений на $D(y)$. Покажем, что однородность (в смысле однородности дифференциального полинома) уравнений приводит к тому, что либо старшие (в данном случае первые) производные решения равны нулю, либо пространство решений бесконечномерно, что по теореме об экспоненциальном представлении невозможно. Действительно, пусть $D=\sum D_m$ — разложение на компоненты одинаковой степени. D является решением в том и только том случае, когда решением является каждая однородная компонента. Условие на $D_m=\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}D_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}y_{\alpha_1}\dots y_{\alpha_m}$ принимает вид

$$m\sum_{\alpha_2,\dots,\alpha_m}\Big\langle\sum_{\alpha_1}D_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(z,z,z)\Phi_{\alpha_1}(z,z,\bar z),\bar z\Big\rangle y_{\alpha_2}\dots y_{\alpha_m}=0.$$

И если $m\neq0$, то это означает, что для любого набора $(\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ $\langle\sum_{\alpha_1}D_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(z,z,z)\times$ $\times\,\Phi_{\alpha_1}(z,z,\bar z),\bar z\rangle=0$. Но если это уравнение имеет ненулевое решение при $m_0>0$, то это позволяет строить ненулевые решения для любых $m>m_0$. Итак, $D_y=0$.

Применяя оператор $\Box$ к (15), из коммутативности $\triangle$ и $\Box$ получаем $\langle \Box^2 C(z,z), \bar z\rangle = 0$. Отсюда таким же образом получаем, что $C_{yy} = 0$. Аналогично из (12) получаем $A_{yy} = 0$. Применяя $\Box$ к (13) и используя то, что $A_{yy} = 0$, получаем $\Box \triangle \operatorname{Im}\langle Bz, \bar z\rangle = 0$. Пользуясь теоремой об экспоненциальном представлении и доказанным выше утверждением, что решения уравнения $\operatorname{Im}\langle Bz, \bar z\rangle = 0$ — это скалярные матрицы $B = kE$, получаем, что общее решение $\Box \operatorname{Im}\langle Bz, \bar z\rangle = 0$ имеет вид $B = k(x,y)E + B_1(x) + B_2(y) + B_3(x,y)$, где B_3 — полином. Пользуясь однородностью уравнения, получаем, что $(B_3)_{xy} = 0$. Применяя $\triangle$ к (14), получаем $C_{xx} = 0$. Применяя $\triangle^2$ к (15), получаем $D_{xxx} = 0$. Исключая b из (9) и (11), получаем

$$4\Phi(\Box A, z, \bar z) + 4\overline{\Phi}(\Box \overline{A}, \bar z, z) = 2\Phi(\triangle Bz, z, \bar z) + \Phi(z, z, \triangle \overline{Bz}). \tag{28}$$

Применяя к полученному соотношению $\Box$, получаем $2\Phi(\Box \triangle Bz, z, \bar z) + \Phi(z, z, \Box \triangle \overline{Bz}) = 0$, или $3(\Box \triangle k)\Phi(z,z,\bar z) = 0$, откуда $k_{xy} = 0$ и тем самым $B_{xy} = 0$. Исключая a из (8) и (10), получаем

$$\langle \Box Bz, \bar z\rangle + \langle z, \Box \overline{B} z\rangle = \langle \triangle C(z,z), \bar z\rangle - 2i\langle z, \triangle^2 \overline{A}\rangle \tag{29}$$

и, применяя $\triangle$, получаем $A_{xxx} = 0$. Применяя $\Box^2$ к (29), получаем $\Box^3 2\operatorname{Re}\langle Bz, \bar z\rangle = 0$, применяя $\Box^2$ к (13), получаем $\Box^3 2\operatorname{Im}\langle Bz, \bar z\rangle = 0$, откуда $B_{yyy} = 0$. Применяя $\triangle^3$ к (13), получаем $\triangle^4 2\operatorname{Im}\langle Bz, \bar z\rangle = 0$. Отсюда, используя уже имеющееся представление B, получаем, что $B = B_1(x) + B_2(y) + k(x)E$, где степень B_1 не превосходит 3, степень B_2 не превосходит 2. Подставляя это выражение в (28) и применяя $\triangle^3$, получаем $\triangle^4 k = 0$, т.е. степень k не превосходит 3 и тем самым $B_{xxxx} = 0$. Теперь из (8)–(11) получаем оценки степеней a и b. Итак, справедливы следующие соотношения:

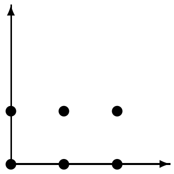
$$\begin{aligned}
A_{xxx} &= 0, & A_{yy} &= 0; & & \\
B_{xxxx} &= 0, & B_{yyy} &= 0, & B_{xy} &= 0; \\
C_{xx} &= 0, & C_{yy} &= 0; & & \\
D_{xxx} &= 0, & D_{y} &= 0; & & \\
a_{xxxxx} &= 0, & a_{yyy} &= 0, & a_{xxy} &= 0; \\
b_{xxxx} &= 0, & b_{yyyy} &= 0, & b_{xyy} &= 0.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание зависимость от z, получаем, что степени коэффициентов векторных полей не превосходят 5. Это завершает доказательство предложения.

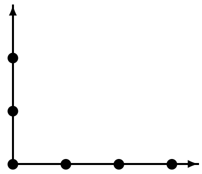
Теперь все наши неизвестные (A, B, C, D, a, b) полиномиально зависят от x и y. Будем изображать компоненту однородной степени d_x по x и d_y по y точкой с координатами (d_x, d_y) на плоскости. Для каждой неизвестной отметим множество потенциально ненулевых компонент (носитель). Тогда информацию о носителях можно изобразить на диаграммах (см. рисунок), где 38 точкам соответствуют 38 полилинейных векторнозначных форм от x и y, через которые выражается любое голоморфное векторное поле на кубике. Коэффициенты этих форм связаны системой однородных линейных алгебраических уравнений. Чтобы получить эти соотношения, нужно выражения для (f, g, h) через упомянутые 38 форм подставить в основное соотношение (7). Это дает описание алгебры кубики, вполне аналогичное описанию алгебры квадрики, данное в [2]. Итак, вопрос о вычислении алгебры кубики сводится к решению алгебраической системы линейных уравнений. В частности, от ранга этой системы непосредственно зависит размерность алгебры.

Распространим градуировку, введенную выше для пространства рядов от (z, w_2, w_3), на пространство векторных полей, полагая

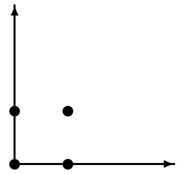
$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\right] = -1, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial w_2}\right] = -2, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial w_3}\right] = -3.$$



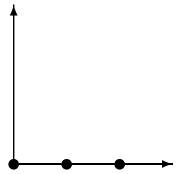
A



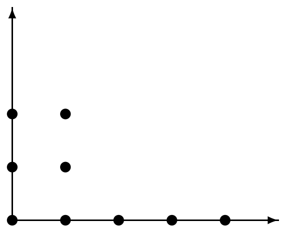
B



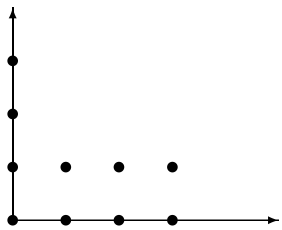
C



D



a



b

Следствие 6. *Алгебра* $\operatorname{aut} Q$ *инфинитезимальных автоморфизмов кубики является градуированной алгеброй Ли вида*

$$g = g_{-3} + g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6.$$

При этом

$$g_{-3} = \left\{ q_3 \frac{\partial}{\partial y} \right\},$$

$$g_{-2} = \left\{ q_2 \frac{\partial}{\partial x} \right\},$$

$$g_{-1} = \left\{ 2\operatorname{Re} \left[p \frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, \bar{p} \rangle \frac{\partial}{\partial w_2} + (r w_2 + 2i\Phi(z^2, \bar{p})) \frac{\partial}{\partial w_3} \right] \right\},$$

$$g_0 = \left\{ 2\operatorname{Re} \left[B_0 z \frac{\partial}{\partial z} + a_{10} w_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + b_{01} w_3 \frac{\partial}{\partial w_3} \right] \right\},$$

где $p \in \mathbb{C}^n$, $q_m \in \mathbb{R}^{k_m}$, причем эти параметры не связаны какими-либо ограничениями, r однозначно и линейно зависит от p, т.е. $r = r(p)$.

Подалгебра $g_- = g_{-3} + g_{-2} + g_{-1}$ — нильпотентная алгебра Ли. Это алгебра Ли группы из предложения 2, которую мы обозначим $\operatorname{Aut}_- Q$. Размерность $\operatorname{Aut}_- Q$ равна размерности кубики, т.е. $\dim \operatorname{Aut}_- Q = \dim g_- = n + n^2 + k$.

Подалгебра g_0 соответствует линейным автоморфизмам кубики

$$z \to \Lambda z, \qquad w_2 \to \rho w_2, \qquad w_3 \to \nu w_3,$$

где

$$\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z} \rangle = \rho \langle z, \bar{z} \rangle, \qquad \Phi(\Lambda z, \Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \nu \Phi(z, z, \bar{z}).$$

Размерность этой группы может меняться в зависимости от кубической формы Φ. Но, как видно из определяющих соотношений, если фиксировать значение невырожденной матрицы Λ, то значения ρ и ν определяются однозначно. Поэтому справедлива оценка $\dim \operatorname{Aut}_0 Q \le 2n^2$, где $\operatorname{Aut}_0 Q$ — подгруппа линейных автоморфизмов кубики, соответствующая g_0.

Подалгебра $g_+ = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$ — это нильпотентная алгебра Ли $(g_+)^7 = 0$. Ей соответствует подгруппа нелинейных автоморфизмов кубики, сохраняющих начало координат, причем таких, что $\Lambda = E_n$, $\rho = E_{n^2}$, $\nu = E_k$. Эту группу мы обозначим через $\operatorname{Aut}_+ Q$.

Как показывают примеры кубик типа $(1,2)$ и $(1,3)$, разобранные в [4] и [8], эта подгруппа может быть тривиальной, что, по-видимому, соответствует ситуации общего положения. Аналогичное явление для квадрик (“жесткость”) хорошо известно [2, 12].

Развивая нашу аналогию с квадрикой, покажем, что касательная кубика обладает следующим экстремальным свойством: размерность группы голоморфных автоморфизмов ростка не превосходит размерности группы ее касательной кубики.

Предложение 7. *Пусть* M_0 — *невырожденный росток типа* (n, n^2+k), Q — *его касательная кубика. Тогда* $\dim \operatorname{Aut} M_0 \le \dim \operatorname{Aut} Q$.

Доказательство. Данное доказательство вполне аналогично доказательству соответствующей оценки для квадрики [2]. Оно представляет собой некую версию теоремы о неявной функции для формальных рядов с оценкой числа параметров.

Если Q вырождена, то неравенство становится верным и бессодержательным. Поэтому будем предполагать невырожденность. Мы докажем несколько более общее утверждение, а именно что отображение вида

$$f = z + f_2 + \ldots, \qquad g = w_2 + g_3 + \ldots, \qquad h = w_3 + h_4 + \ldots \tag{30}$$

ростка

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar z\rangle + F_3 + \ldots, \qquad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}\Phi(z,z,\bar z) + G_4 + \ldots \tag{31}$$

в росток

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar z\rangle + \widetilde F_3 + \ldots, \qquad \operatorname{Im} w_3 = 2\operatorname{Re}\Phi(z,z,\bar z) + \widetilde G_4 + \ldots \tag{32}$$

определяется не большим числом параметров, чем автоморфизм кубики такого же вида.

Записывая в виде соотношения в формальных рядах то, что (30) переводит (31) в (32), и отделяя компоненту веса $(m+1)$ в первом соотношении и $(m+2)$ во втором, получаем

$$\operatorname{Re}(i g_{m+1} + 2\langle f_m, \bar z\rangle) = F_{m+1} - \widetilde F_{m+1} + \ldots,$$
$$\operatorname{Re}(i h_{m+2} + 4\Phi(f_m, z, \bar z) + 2\Phi(z,z,\bar f_m)) = G_{m+2} - \widetilde G_{m+2} + \ldots,$$

где в левых частях $w_2 = x + i\langle z, \bar z\rangle$, $w_3 = y + 2i\operatorname{Re}\Phi(z,z,\bar z)$, а многоточие в правых частях — это члены, зависящие от

$$f_j,\ g_{j+1},\ h_{j+2},\ F_{j+1},\ \widetilde F_{j+1},\ G_{j+2},\ \widetilde G_{j+2} \quad \text{при } j < m.$$

Эти соотношения позволяют последовательно вычислять компоненты отображения (f_m, g_{m+1}, h_{m+2}), решая алгебраическую систему линейных уравнений, правая часть которой зависит от компонент, вычисленных ранее. Размерность множества решений неоднородной системы не превышает размерности пространства решений однородной. Но однородные уравнения — это уравнения (7), определяющие алгебру кубики. Поэтому число свободных параметров, задающих отображение в классе формальных степенных рядов указанного вида, не превосходит размерности подалгебры $\operatorname{aut}_+ Q$ и соответствующей ей группы. Предложение доказано.

Предложение 8. *Группа голоморфных преобразований невырожденной кубики* $\operatorname{Aut} Q$ — *это подгруппа группы бирациональных преобразований* $\mathbb{C}^{n+K}$, *степени которых не превосходят* $15(n+K)$.

Доказательство представляет собой модификацию доказательства Туманова [6] бирациональности автоморфизмов квадратичной модели.

Рассмотрим произвольный автоморфизм кубики

$$\phi(z, w_2, w_3) = (Z(z,w_2,w_3), W_2(z,w_2,w_3), W_3(z,w_2,w_3)),$$

сохраняющий на месте начало координат. Пусть $X = (A, B, C)$ — инфинитезимальный автоморфизм. Рассмотрим присоединенное действие группы на алгебре $X(p) \to Y(p) = \phi_*^{-1} X(\phi(p)) = (a, b, c)$, или

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial z} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_2} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial z} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_2} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial W_3}{\partial z} & \dfrac{\partial W_3}{\partial w_2} & \dfrac{\partial W_3}{\partial w_3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A(Z, W_2, W_3) \\ B(Z, W_2, W_3) \\ C(Z, W_2, W_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(z, w_2, w_3) \\ b(z, w_2, w_3) \\ c(z, w_2, w_3) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где a, b и c — полиномы степени не выше пятой. Подставляя в полученное соотношение вместо $X = (A, B, C)$ векторные поля из $\mathrm{aut}_- Q$, соответствующие векторам стандартного базиса $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n^2} \oplus \mathbb{C}^n$, получаем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial z} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_2} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial z} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_2} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial W_3}{\partial z} & \dfrac{\partial W_3}{\partial w_2} & \dfrac{\partial W_3}{\partial w_3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 2i\langle Z, E_n \rangle & E_{n^2} & 0 \\ r(E_n)W_2 + 2i\Phi(Z^2, E_n) & 0 & E_k \end{pmatrix} = P,$$

где P представляет собой матрицу, элементы которой — это полиномы степени не выше 5. Выражая якобиеву матрицу, получаем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial z} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_2} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial z} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_2} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial W_3}{\partial z} & \dfrac{\partial W_3}{\partial w_2} & \dfrac{\partial W_3}{\partial w_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 2i\langle Z, E_n \rangle & E_{n^2} & 0 \\ r(E_n)W_2 + 2i\Phi(Z^2, E_n) & 0 & E_k \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{34}$$

Матрицу P^{-1}, как и остальные матрицы, будем представлять в блочном виде, и пусть R_{ij} — ее (i, j)-й блок. Отметим, что элементы R_{ij} являются рациональными функциями. Первая блок-координата (34), т.е.

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = R_{11}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial w_2} = R_{12}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial w_3} = R_{13},$$

означает, что производные Z рациональны. Группа $\mathrm{Aut}\, Q$ содержит однопараметрическую подгруппу

$$\{z \to tz,\ w_2 \to t^2 w_2,\ w_3 \to t^3 w_3\},$$

которой соответствует поле $(A = z, B = 2w_2, C = 3w_3)$. Подставляя его в (33), получаем

$$\begin{pmatrix} Z \\ 2W_2 \\ 3W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial z} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_2} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial z} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_2} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_3} \\ \dfrac{\partial W_3}{\partial z} & \dfrac{\partial W_3}{\partial w_2} & \dfrac{\partial W_3}{\partial w_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Выписывая первую блок-координату этого соотношения и используя рациональность производных Z, получаем рациональность самого отображения Z. Возвращаясь к второй координате (34), получаем рациональность производных W_2 и затем из второй координаты (35) рациональность W_2. И наконец, из третьих координат (34) и (35) получаем рациональность W_3. Если при этом следить за степенями, то получаем требуемую оценку на степени (Z, W_2, W_3). Предложение доказано.

Замечания. 1. Более точные оценки, следующие из нашего вычисления, таковы:

$$\deg Z \leq 5(n+K), \qquad \deg W_2 \leq 10(n+K), \qquad \deg W_3 \leq 15(n+K).$$

2. Если проследить за рассуждением Туманова [6] для квадрик типа (n,k), используя полученную нами в [1] оценку степеней векторных полей, то для автоморфизма невырожденной квадрики типа (n,k) $(z \to Z(z,w),\ w \to W(z,w))$ получаем следующие оценки:

$$\deg Z \leq 2(n+k), \qquad \deg W \leq 4(n+k).$$

Однако примеры квадрик с автоморфизмами степени, превосходящей k, неизвестны. По-видимому, и приведенная оценка степени для кубики также является грубой. Если формулировать гипотезу по аналогии с квадрикой, то точной оценкой степени, по-видимому, является коразмерность, т.е. K.

Полученные результаты можно резюмировать в виде следующей теоремы [3].

Теорема 9. *Кубика типа (n, n^2+k) при $1 \leq k \leq n^2(n+1)$ является хорошей модельной поверхностью. А именно*:

1) *всякий порождающий росток с невырожденной формой Леви эквивалентен ростку вида* (6);

2) *кубика — это алгебраическая поверхность, заданная уравнениями степени $d \leq 3$, для поверхностей такого типа нельзя сформулировать условие конечномерности группы в терминах 2-струи*;

3) *голоморфная эквивалентность кубик совпадает с их линейной эквивалентностью* (*предложение* 4);

4) *размерность группы ростка на превосходит размерности группы касательной кубики* (*предложение* 7);

5) *кубика однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно* (*на самом деле транзитивность обеспечивают квадратично треугольные преобразования*) (*предложение* 3);

6) *группа касательной кубики конечномерна тогда и только тогда, когда кубика не вырождена* (*определение* 1), *причем условие невырожденности, т.е. условие линейной независимости координатных форм, является условием общего положения* (*предложение* 5, A);

7) *алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной кубике — это некоторая подалгебра алгебры полиномиальных векторных полей ограниченной степени* (*степени коэффициентов не превосходят* 5) (*предложение* 5, B);

8) *группа автоморфизмов невырожденной кубики — это подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+K}$, степени которых* (*числителей и знаменателей в несократимом представлении*) *не превосходят* $15(n+K)$ (*предложение* 8).

3. МОДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ БОЛЕЕ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

Начнем с подсчета размерностей.

Лемма 10. *Если $D_{d,r}$ — размерность пространства однородных многочленов от r переменных степени d, то*

$$D_{d,r} = C^d_{r+d-1} = \frac{(r+d-1)\dots(r+1)r}{d!}.$$

Доказательство. Рассмотрим степенной ряд $(1+t_1+t_1^2+\dots)\dots(1+t_r+t_r^2+\dots)$. Его разложение содержит каждый моном с коэффициентом единица, поэтому разложение $(1+t+t^2+\dots)\dots(1+t+t^2+\dots)$ имеет вид $\sum_d D_{d,r}t^d$. Поэтому $D_{d,r} = \frac{1}{d!}\frac{d^d}{dx^d}[(1-t)^{-r}]_{t=0}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{F}_{m,n}$ — пространство вещественных многочленов от $(z_1,\dots,z_n,\bar z_1,\dots,\bar z_n)$ степени m, разложение которых по бистепеням не содержит компонент $(m,0)$ и $(0,m)$.

Следствие 11. A. *Если $k_{m,n} = \dim\mathcal{F}_{n,m}$, то $k_{m,n} = C^m_{2n+m-1} - 2C^m_{n+m-1}$.*

B. *Если $K_{m,n} = k_{2,n}+k_{3,n}+\dots+k_{m,n}$, то $K_{m,n} = C^m_{2n+m} - 2C^m_{n+m}+1$.*

В частности,

$$\begin{aligned}
&k_{2,n} = n^2,\\
&k_{3,n} = n^2(n+1),\\
&k_{4,n} = n^2(n+1)(7n+1)/12,\\
&k_{5,n} = n^2(n+1)(n+2)(3n+5)/12,\\
&k_{6,n} = n^2(n+1)(n+2)(31n^2+132n+137)/360,\\
&k_{7,n} = n^2(n+1)(n+2)^2(n+3)(3n+7)/120.
\end{aligned}$$

Перейдем к построению серии модельных поверхностей. Процесс порождения модельных поверхностей все более высоких степеней напоминает процесс заполнения электронами разрешенных энергетических уровней в атоме [9]. При этом вся серия напоминает периодическую систему элементов Менделеева. Аналогия простирается настолько далеко, что каждый "период" заканчивается модельной поверхностью со строго фиксированными свойствами — "инертный газ".

Модельная поверхность Q типа (n,K) степени d, где $K_{d-1,n} < K \le K_{d,n}$, — это поверхность, заданная в пространстве

$$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{k_{2,n}} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{k_{d-1,n}} \oplus \mathbb{C}^k,$$

$k = K - K_{d-1,n}$, с координатами $(z, w_2,\dots,w_d)$ соотношениями

$$\operatorname{Im} w_m = \Phi_m(z,\bar z), \qquad m = 2,\dots,d, \tag{36}$$

причем Φ_m для $m = 2,\dots,d-1$ — это вектор, составленный из базисных элементов пространства $\mathcal{F}_m$, а Φ_d — вектор из линейно независимых элементов $\mathcal{F}_d$. При $d=2$ мы получаем квадрику, однако следует отметить, что условие невырожденности квадрики включает, кроме линейной независимости координатных эрмитовых форм, условие отсутствия общего нетривиального ядра. При $d=3$ мы получаем невырожденную кубику. Подчеркнем, что степень d не является независимым параметром в отличие от n и K, а определяется условием попадания в определенный интервал значений.

Поверхность Q будет играть роль модельной поверхности для поверхностей вида

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= \Phi_2(z,\bar z) + \text{Члены веса 3 и более}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \operatorname{Im} w_d &= \Phi_d(z,\bar z) + \text{Члены веса } (d+1) \text{ и более}. \end{aligned} \tag{37}$$

Определение 12. Вещественно алгебраическую поверхность Q вида (36) будем называть *касательной модельной поверхностью ростка M_0 вида* (37). Поверхность и росток будем называть *невырожденными*, если все координатные формы Φ линейно независимы.

Из вычислений, аналогичных тем, что проведены в предложении 2, следует

Предложение 13. *Градуированная алгебра Леви–Танаки Q имеет вид*

$$D^1 \subset D^2 \subset \ldots \subset D^d.$$

В терминологии [7] речь идет о формах Леви высших порядков, при этом невырожденная модельная поверхность Q, как и невырожденный росток вида (37), характеризуется как поверхность, имеющая тип d в начале координат; в терминологии [10] можно сказать, что эти поверхности являются $(d-1)$-невырожденными.

Предложение 14. *Любая модельная поверхность голоморфно однородна. При этом подгруппа группы голоморфных преобразований Q, действующая на Q транзитивно, состоит из треугольных преобразований вида*

$$z \to p + z, \qquad w \to q + \rho w + P(z),$$

где $P(z)$ — полином степени $(d-1)$.

Доказательство. Совершим замену $z \to z + p$ с произвольным $p \in \mathbb{C}^n$ в уравнениях, задающих Q. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_d(z+p,\bar z+\bar p) = \Phi_d(z,\bar z) &+ (\text{Сумма многочленов из } \mathcal{F}_m \text{ при } m<d) + \\ &+ \text{Члены бистепеней } (m,0) \text{ и } (0,m), \end{aligned}$$

поэтому последнее уравнение поверхности Q можно вернуть к исходному виду следующим образом. Те дополнительные члены последнего соотношения, которые суть сумма многочленов из $\mathcal{F}_m$ при $m < d$, уничтожаются вычитанием соответствующей линейной комбинации предыдущих соотношений. Это соответствует линейной замене переменных группы $w_2, \ldots, w_{d-1}$. С другой стороны, члены бистепеней $(m,0)$ и $(0,m)$ убираются введением дополнительного полиномиального слагаемого от z в переменное w_d. После этого аналогично поступаем со всеми остальными соотношениями от $(d-1)$-го до первого. Для завершения доказательства осталось заметить, что на Q действует группа “вертикальных” сдвигов $z \to z$, $w \to q + w$ для любого $q \in \mathbb{R}^K$. Предложение доказано.

Введем в пространстве рядов от (z,w) и от $(z,\bar z,\operatorname{Re} w)$ градуировку условиями

$$[z] = 1, \quad [\bar z] = 1, \quad [w_m] = m, \quad [\operatorname{Re} w_m] = m.$$

Рассмотрим росток поверхности M в начале координат, заданный в $\mathbb{C}^{n+K}$ уравнениями вида

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= \Phi_2(z,\bar z) + F_{2,3}(z,\bar z,\operatorname{Re} w) + F_{2,4} + \ldots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \operatorname{Im} w_d &= \Phi_d(z,\bar z) + F_{d,d+1}(z,\bar z,\operatorname{Re} w) + F_{d,d+2} + \ldots, \end{aligned} \tag{38}$$

где $F_{m,l}$ — полином веса l. И пусть имеется отображение

$$\begin{aligned} z &\to \Lambda z + f_2 + \dots, \\ w_2 &\to g_{2,1} + \rho_2 w_2 + g_{2,3} + g_{2,4} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_d &\to g_{d,1} + \dots + g_{d,d-1} + \rho_d w_d + g_{d,d+1} + g_{d,d+2} + \dots, \end{aligned} \tag{39}$$

где $g_{m,l}$ имеет вес l, ростка M на другой росток $\widetilde{M}$ того же вида

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= \widetilde{\Phi}_2(z,\bar z) + \widetilde{F}_{2,3}(z,\bar z,\operatorname{Re} w) + \widetilde{F}_{2,4} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \operatorname{Im} w_d &= \widetilde{\Phi}_d(z,\bar z) + \widetilde{F}_{d,d+1}(z,\bar z,\operatorname{Re} w) + \widetilde{F}_{d,d+2} + \dots \end{aligned} \tag{40}$$

Отделяя младшие компоненты имеющегося в этой ситуации соотношения, получаем, что, во-первых, $g_{m,l} = 0$ при $l < m$, а, во-вторых,

$$\begin{gathered} \rho_2 \Phi_2(z,\bar z) = \widetilde{\Phi}_2(\Lambda z, \overline{\Lambda z}), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \rho_d \Phi_d(z,\bar z) = \widetilde{\Phi}_d(\Lambda z, \overline{\Lambda z}), \end{gathered}$$

где $\Lambda \in GL(n,\mathbb{C})$, $\rho_m \in GL(k_{m,n},\mathbb{R})$ при $m = 2,\dots,d-1$ и $\rho_d \in GL(k,\mathbb{R})$. Это позволяет сформулировать следующее

Предложение 15. 1. *Если росток M локально биголоморфно эквивалентен ростку $\widetilde{M}$, то их касательные модельные поверхности также биголоморфно эквивалентны.*

2. *Две модельные поверхности локально биголоморфно эквивалентны в том и только том случае, когда они эквивалентны линейно.*

3. *Если $(f, g_2, \dots, g_d)$ — отображение ростка M в росток $\widetilde{M}$, то $f = \Lambda z + f_2 + \dots$, $g_m = \rho_m w_m + g_{m,m+1} + \dots$, $m = 2,\dots,d$, причем $\widetilde{\Phi}_m(\Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \rho_m \Phi_m(z,\bar z)$.*

4. *Линейная часть отображения имеет следующий блочно-треугольный вид*:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & * & * & * \\ 0 & \rho_2 & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \rho_d \end{pmatrix}.$$

5. *Линейное отображение $z \to \Lambda z$, $w_j \to \rho_j w_j$, $j = 2,\dots,d$, является отображением между касательными модельными поверхностями.*

6. *Действие голоморфного отображения на росток поверхности порождает следующее действие группы $GL(n,\mathbb{C}) \oplus GL(k,\mathbb{R})$*:

$$\Phi_d(z,\bar z) \to \rho_d \Phi_d(\Lambda^{-1} z, \overline{\Lambda^{-1} z}).$$

7. *Линейная подгруппа группы голоморфных автоморфизмов модельной поверхности — это группа вида $z \to \Lambda z$, $w_m \to \rho_m w_m$, где $\Phi_m(\Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \rho_m \Phi_d(z,\bar z)$, $m = 2,\dots,d$.*

Предложение 16. *Пусть Q — модельная поверхность степени $d \geq 4$.*

A. *Линейная независимость координат формы Φ_d является необходимым и достаточным условием конечномерности группы автоморфизмов модельной поверхности.*

B. *Если линейная независимость имеется, то алгебра ее инфинитезимальных автоморфизмов состоит из векторных полей, степени которых не превосходят 2.*

Доказательство. Наличие линейной зависимости позволяет линейной заменой по w сделать одну из координат Φ, например первую, равной нулю. Тогда любые вещественно аналитические замены соответствующей координаты (при сохранении остальных неподвижными) являются автоморфизмами поверхности. Это доказывает необходимость утверждения А.

Для того чтобы доказать достаточность, будем доказывать конечномерность алгебры голоморфных векторных полей, т.е. полей, порождающих локальные однопараметрические группы голоморфных автоморфизмов Q. Это вещественные поля вида

$$X = 2\operatorname{Re}\left(f\frac{\partial}{\partial z} + g_2\frac{\partial}{\partial w_2} + \ldots + g_d\frac{\partial}{\partial w_d}\right),$$

где коэффициенты голоморфны в окрестности нуля, а на M они удовлетворяют условию касания

$$\begin{aligned}
&(2) \quad \frac{1}{2i}(g_2 - \bar g_2) = \Phi_{1,1}(z\bar f) + \Phi_{1,1}(f\bar z),\\
&(3) \quad \frac{1}{2i}(g_3 - \bar g_3) = \Phi_{2,1}(z^2\bar f) + 2\Phi_{2,1}(fz\bar z) + 2\Phi_{1,2}(z\bar z\bar f) + \Phi_{1,2}(f\bar z^2),\\
&\ldots\\
&(d) \quad \frac{1}{2i}(g_d - \bar g_d) = \Phi_{d-1,1}(z^{d-1}\bar f) + (d-1)\Phi_{d-1,1}(z^{d-2}f\bar z) + 2\Phi_{d-2,2}(z^{d-2}\bar z\bar f) + \ldots\\
&\qquad \ldots + 2\Phi_{2,d-2}(zf\bar z^{d-2}) + (d-1)\Phi_{1,d-1}(z\bar z^{d-2}\bar f) + \Phi_{1,d-1}(fz^{d-1}).
\end{aligned} \tag{41}$$

Здесь записи вида $\Phi_{d-1,1}(z^{d-1}\bar f)$ или $\Phi_{d-1,1}(z^{d-2}f\bar z)$ означают результат подстановки в полилинейную форму $\Phi_{d-1,1}$ от z и $\bar z$ вместо одного из аргументов f или $\bar f$. В этих соотношениях будем отделять компоненты фиксированных бистепеней. При этом будем использовать обозначения $x_j = \operatorname{Re} w_j$, $\triangle_{p,q} f = \partial_{x_{p+q}} f(\Phi_{p,q})$ (значение частного дифференциала на форме). Выражения такого вида естественно возникают в тейлоровских разложениях $f(z, x + i\Phi)$ в точке (z, x). А также будем использовать разложения вида $f(z,w) = \sum f_m(z,w)$ и $g_j(z,w) = \sum g_{j,m}(z,w)$, где m — это номер однородной по z компоненты. Мы можем предполагать, что $d > 3$, так как случай $d = 2$ разобран в [2], а $d = 3$ — в предыдущей части данной работы.

Итак, отделяя в соотношении (41) компоненты фиксированных бистепеней и записывая полученные соотношения покоординатно, получаем

$(0,0)$

$$\begin{aligned}
&(2) \qquad \operatorname{Im} g_{2,0} = 0,\\
&\ldots\\
&(d) \qquad \operatorname{Im} g_{d,0} = 0.
\end{aligned}$$

$(1,0)$

$$\begin{aligned}
&(2) \qquad g_{2,1} = 2i\Phi_{1,1}(z\bar f_0),\\
&(3) \qquad g_{3,1} = 0,\\
&\ldots\\
&(d) \qquad g_{d,1} = 0.
\end{aligned}$$

$(m,0)$ при $2 \le m \le d-1$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & g_{2,m} = 0, \\
\dots & \\
(m+1) & g_{m+1,m} = 2i\Phi_{m,1}(z^m \bar{f}_0), \\
\dots & \\
(d) & g_{d,m} = 0.
\end{array}
$$

$(m,0)$ при $m \ge d$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & g_{2,m} = 0, \\
\dots & \\
(d) & g_{d,m} = 0.
\end{array}
$$

$(1,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_{1,1}\, g_{2,0} = 2\,\mathrm{Re}\,\Phi_{1,1}(f_1 \bar{z}), \\
(3) & \triangle_{1,1}\, g_{3,0} = 2\,\mathrm{Re}\,2\Phi_{2,1}(f_0 z \bar{z}), \\
(4) & \triangle_{1,1}\, g_{4,0} = 0, \\
\dots & \\
(d) & \triangle_{1,1}\, g_{d,0} = 0.
\end{array}
$$

$(2,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_{2,1}\, g_{2,0} = 2\Phi_{1,1}(f_2 \bar{z}) - 4i\Phi_{1,1}(z \,\triangle_{1,1}\, \bar{f}_0), \\
(3) & \triangle_{2,1}\, g_{3,0} = 4\Phi_{2,1}(f_1 z \bar{z}) + 2\Phi_{2,1}(z^2 \bar{f}_1), \\
(4) & \triangle_{2,1}\, g_{4,0} = 6\Phi_{3,1}(f_0 z^2 \bar{z}) + 4\Phi_{2,2}(z^2 \bar{z} \bar{f}_0), \\
(5) & \triangle_{2,1}\, g_{5,0} = 0, \\
\dots & \\
(d) & \triangle_{2,1}\, g_{d,0} = 0.
\end{array}
$$

$(m,1)$ при $3 \le m \le d-2$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_{m,1}\, g_{2,0} = 2\Phi_{1,1}(f_m \bar{z}) - 4i\Phi_{1,1}(z \,\triangle_{m-1,1}\, \bar{f}_0), \\
(3) & \triangle_{m,1}\, g_{3,0} = 4\Phi_{2,1}(f_{m-1} z \bar{z}) - 4i\Phi_{2,1}(z^2 \,\triangle_{m-2,1}\, \bar{f}_0), \\
\dots & \\
(m) & \triangle_{m,1}\, g_{m,0} = 2(m-1)\Phi_{m-1,1}(f_2 z^{m-2} \bar{z}) - 4i\Phi_{1,1}(z^{m-1} \,\triangle_{1,1}\, \bar{f}_0), \\
(m+1) & \triangle_{m,1}\, g_{m+1,0} = 2m\Phi_{m,1}(f_1 z^{m-1} \bar{z}) + 2\Phi_{m,1}(z^m \bar{f}_1), \\
(m+2) & \triangle_{m,1}\, g_{m+2,0} = 2(m+1)\Phi_{m+1,1}(f_0 z^m \bar{z}) + 4\Phi_{m,2}(z^m \bar{z} \bar{f}_0), \\
(m+3) & \triangle_{m,1}\, g_{m+3,0} = 0, \\
\dots & \\
(d) & \triangle_{m,1}\, g_{d,0} = 0.
\end{array}
$$

$(d-1,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_{d-1,1}\, g_{2,0} = 2\Phi_{1,1}(f_{d-1}\bar z) - 4i\Phi_{1,1}(z \triangle_{d-2,1} \bar f_0),\\
\dots & \\
(d-1) & \triangle_{d-1,1}\, g_{d-1,0} = 2(d-2)\Phi_{d-2,1}(f_2 z^{d-3}\bar z) - 4i\Phi_{d-2,1}(z^{d-2} \triangle_{1,1} \bar f_0),\\
(d) & \triangle_{d-1,1}\, g_{d,0} = 2(d-1)\Phi_{d-1,1}(f_1 z^{d-2}\bar z) + 2\Phi_{d-1,1}(z^{d-1} \bar f_1).
\end{array}
$$

$(d,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \Phi_{1,1}(f_d\bar z) = 2i\Phi_{1,1}(z \triangle_{d-1,1} \bar f_0),\\
(3) & 2\Phi_{2,1}(f_{d-1}z\bar z) = 2i\Phi_{2,1}(z^2 \triangle_{d-2,1} \bar f_0),\\
\dots & \\
(d) & (d-1)\Phi_{d-1,1}(f_2 z^{d-2}\bar z) = 2\Phi_{d-1,1}(z^{d-1}\bar f_1).
\end{array}
$$

$(d+1,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \Phi_{1,1}(f_{d+1}\bar z) = 0,\\
(3) & 2\Phi_{2,1}(f_d z\bar z) = 2i\Phi_{2,1}(z^2 \triangle_{d-1,1} \bar f_0),\\
\dots & \\
(d) & (d-1)\Phi_{d-1,1}(f_3 z^{d-2}\bar z) = 2\Phi_{d-1,1}(z^{d-1} \triangle_{2,1} \bar f_0).
\end{array}
$$

$(d+2,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \Phi_{1,1}(f_{d+2}\bar z) = 0,\\
(3) & \Phi_{2,1}(f_{d+1} z\bar z) = 0,\\
(4) & 3\Phi_{3,1}(f_d z^2\bar z) = 2i\Phi_{3,1}(z^3 \triangle_{d-1,1} \bar f_0),\\
\dots & \\
(d) & (d-1)\Phi_{d-1,1}(f_4 z^{d-2}\bar z) = 2\Phi_{d-1,1}(z^{d-1} \triangle_{3,1} \bar f_0),\\
\dots &
\end{array}
$$

$(2d-2,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \Phi_{1,1}(f_{2d-2}\bar z) = 0,\\
\dots & \\
(d-1) & \Phi_{d-2,1}(f_{d+1} z^{2d-3}\bar z) = 0,\\
(d) & (d-1)\Phi_{d-1,1}(f_d z^{d-2}\bar z) = 2i\Phi_{d-1,1}(z^{d-1} \triangle_{d-1,1} \bar f_0).
\end{array}
$$

$(m,1)$ при $m \geq 2d-1$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \Phi_{1,1}(f_m\bar z) = 0,\\
\dots & \\
(d) & \Phi_{d-1,1}(f_{m+2-d} z^{d-2}\bar z) = 0.
\end{array}
$$

При нумерации полученных соотношений будем использовать тройную индексацию, в записи (p, q, r) (p, q) — это бистепень, а r — номер координаты.

В соответствии с построением при $m < d$ координатные формы Φ_m образуют базис соответствующего пространства, поэтому при $p + q < d$ координаты $\Phi_{p,q}$ также образуют базис в пространстве многочленов бистепени (p, q). Применяя это соображение к $\Phi_{1,1}$, из соотношения $(m, 1, 2)$ при $m \geq d + 1$ получаем $f_{d+1} = f_{d+2} = \ldots = 0$.

Рассмотрим далее соотношение $(d, 1, 2)$. Это соотношение должно выполняться с любой формой бистепени $(1, 1)$. Это равносильно тому, что соотношение выполняется для формы $z_j \bar{z}_l$ при любых j и l, т.е.

$$f_{j,d}(z^d)\bar{z}_l = 2iz_j(\triangle_{d-1,1}\,\bar{f}_0)_l,$$

откуда следует, что f_d и $\triangle_{d-1,1}\,\bar{f}_0$ имеют следующий вид:

$$f_d(z^d) = 2i\psi_d(z^{d-1})z, \qquad \triangle_{d-1,1}\,\bar{f}_0 = \psi_d(z^{d-1})\bar{z},$$

где $\psi_d(z^{d-1})$ — скалярный множитель, являющийся однородным многочленом степени $d - 1$ от z. Теперь подставим полученные выражения в соотношение $(d + 1, 1, 3)$. Получаем, что $\psi_d = 0$, т.е. $f_d(z^d) = 0$, $\triangle_{d-1,1}\,\bar{f}_0 = 0$. Таким же образом из пары соотношений $(d, 1, j)$ и $(d + 1, 1, j + 1)$ получаем, что $f_{d-j+2} = 0$ и $\triangle_{d-j+1,1}\,\bar{f}_0 = 0$. Итак, $f_3 = \ldots = f_d = 0$ и $\triangle_{2,1}\,\bar{f}_0 = \ldots = \triangle_{d-1,1}\,\bar{f}_0 = 0$. Из последнего соотношения получаем, что f_0 зависит лишь от переменных группы x_2.

В наших соотношениях фигурируют операторы $\triangle_{p,q}$ лишь при $q = 1$. Чтобы упростить обозначения, будем вместо $\triangle_{j-1,1}$ писать $\triangle_j$. Вместо f_0, f_1 и f_2 будем писать A, Bz и Cz^2 соответственно, а вместо $g_0 = (g_{2,0}, \ldots, g_{d,0})$ будем писать $G = (G_2, \ldots, G_d)$. В результате соотношения принимают вид

$(1,1)$

(2) $\triangle_2\, G_2 = 2\,\mathrm{Re}\,\Phi_{1,1}(Bz\bar{z})$,
(3) $\triangle_2\, G_3 = 2\,\mathrm{Re}\,2\Phi_{2,1}(Az\bar{z})$,
(4) $\triangle_2\, G_4 = 0$,
$\ldots$
(d) $\triangle_2\, G_d = 0$.

$(2,1)$

(2) $\triangle_3\, G_2 = 2\Phi_{1,1}(Cz^2\bar{z}) - 4i\Phi_{1,1}(z\,\triangle_2\,\overline{A})$,
(3) $\triangle_3\, G_3 = 4\Phi_{2,1}(Bzz\bar{z}) + 2\Phi_{2,1}(z^2\overline{Bz})$,
(4) $\triangle_3\, G_4 = 6\Phi_{3,1}(Az^2\bar{z}) + 4\Phi_{2,2}(z^2\bar{z}\overline{A})$,
(5) $\triangle_3\, G_5 = 0$,
$\ldots$
(d) $\triangle_3\, G_d = 0$.

$(m-1,1)$ при $3 \le m \le d-1$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_m G_2 = 0,\\
\dots & \\
(m-2) & \triangle_m G_{m-2} = 0,\\
(m-1) & \triangle_m G_{m-1} = 2(m-2)\Phi_{m-2,1}(Cz^2 z^{m-2}\bar z) - 4i\Phi_{m-2,1}(z^{m-2}\triangle_2 \overline{A}),\\
(m) & \triangle_m G_m = 2(m-1)\Phi_{m-1,1}(Bzz^{m-2}\bar z) + 2\Phi_{m-1,1}(z^{m-1}\overline{Bz}),\\
(m+1) & \triangle_m G_{m+1} = 2m\Phi_{m,1}(Az^{m-1}\bar z) + 4\Phi_{m-1,2}(z^{m-1}\bar z\overline{A}),\\
(m+2) & \triangle_m G_{m+2} = 0,\\
\dots & \\
(d) & \triangle_m G_d = 0.
\end{array}
$$

$(d-1,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_d G_2 = 0,\\
\dots & \\
(d-2) & \triangle_d G_{d-2} = 0,\\
(d-1) & \triangle_d G_{d-1} = 2(d-2)\Phi_{d-2,1}(Cz^2 z^{d-3}\bar z) - 4i\Phi_{d-2,1}(z^{d-2}\triangle_2 \overline{A}),\\
(d) & \triangle_d G_d = 2(d-1)\Phi_{d-1,1}(Bzz^{d-2}\bar z) + 2\Phi_{d-1,1}(z^{d-1}\overline{Bz}).
\end{array}
$$

$(d,1)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & 0 = 0,\\
\dots & \\
(d-1) & 0 = 0,\\
(d) & 0 = 2(d-1)\Phi_{d-1,1}(Cz^2 z^{d-2}\bar z) - 4i\Phi_{d-1,1}(z^{d-1}\triangle_2 \overline{A}).
\end{array}
$$

Воспользуемся тем, что операторы $\triangle_j$ коммутируют между собой, для того, чтобы исключить из полученных соотношений G_p. Соотношения, полученные из условия коммутирования $\triangle_p$ и $\triangle_q$, будем обозначать через $(p \leftrightarrow q)$; если мы хотим уточнить координату, пишем $(p \leftrightarrow q, r)$. Получаем

$(3 \leftrightarrow 2)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_3[2\,\mathrm{Re}\,\Phi_{1,1}(Bz\bar z)] = \triangle_2[(2\Phi_{1,1}(Cz^2\bar z) - 4i\Phi_{1,1}(z\triangle_2 \overline{A})],\\
(3) & \triangle_3[2\,\mathrm{Re}\,2\Phi_{2,1}(Az\bar z)] = \triangle_2[4\Phi_{2,1}(Bzz\bar z) + 2\Phi_{2,1}(z^2\overline{Bz})],\\
(4) & 0 = \triangle_2[6\Phi_{3,1}(Az^2\bar z) + 4\Phi_{2,2}(z^2\bar z\overline{A})].
\end{array}
$$

$(4 \leftrightarrow 2)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_4[2\,\mathrm{Re}\,\Phi_{1,1}(Bz\bar z)] = 0,\\
(3) & \triangle_4[2\,\mathrm{Re}\,2\Phi_{2,1}(Az\bar z)] = \triangle_2[2\Phi_{2,1}(Cz^2 z\bar z) - 4i\Phi_{2,1}(z^2\triangle_2 \overline{A})],\\
(4) & 0 = \triangle_2[6\Phi_{3,1}(Bzz^2\bar z) + 2\Phi_{3,1}(z^3\overline{Bz})],\\
(5) & 0 = \triangle_2[8\Phi_{4,1}(Az^3\bar z) + 4\Phi_{3,2}(z^3\bar z\overline{A})].
\end{array}
$$

$(5 \leftrightarrow 2)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_5[2\operatorname{Re}\Phi_{1,1}(Bz\bar{z})] = 0,\\
(3) & \triangle_5[2\operatorname{Re}2\Phi_{2,1}(Az\bar{z})] = 0,\\
(4) & 0 = \triangle_2[6\Phi_{3,1}(Cz^2z^2\bar{z}) - 4i\Phi_{3,1}(z^3\triangle_2\overline{A})],\\
(5) & 0 = \triangle_2[8\Phi_{4,1}(Bzz^3\bar{z}) + 2\Phi_{4,1}(z^4\overline{Bz})],\\
(6) & 0 = \triangle_2[10\Phi_{5,1}(Az^4\bar{z}) + 4\Phi_{4,2}(z^4\bar{z}\overline{A})].\\
\ldots &
\end{array}
$$

$(m \leftrightarrow 2)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_m[2\operatorname{Re}\Phi_{1,1}(Bz\bar{z})] = 0,\\
(3) & \triangle_m[2\operatorname{Re}2\Phi_{2,1}(Az\bar{z})] = 0,\\
\ldots & \\
(m-1) & 0 = \triangle_2[2(m-2)\Phi_{m-2,1}(Cz^2z^{m-3}\bar{z}) - 4i\Phi_{m-2,1}(z^{m-2}\triangle_2\overline{A})],\\
(m) & 0 = \triangle_2[2(m-1)\Phi_{m-1,1}(Bzz^{m-2}\bar{z}) + 2\Phi_{m-1,1}(z^{m-1}\overline{Bz})],\\
(m+1) & 0 = \triangle_2[2m\Phi_{m,1}(Az^{m-1}\bar{z}) + 4\Phi_{m-1,2}(z^{m-1}\bar{z}\overline{A})].\\
\ldots &
\end{array}
$$

$(d \leftrightarrow 2)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_d[2\operatorname{Re}\Phi_{1,1}(Bz\bar{z})] = 0,\\
(3) & \triangle_d[2\operatorname{Re}2\Phi_{2,1}(Az\bar{z})] = 0,\\
\ldots & \\
(d-1) & 0 = \triangle_2[2(d-2)\Phi_{d-2,1}(Cz^2z^{d-3}\bar{z}) - 4i\Phi_{d-2,1}(z^{d-2}\triangle_2\overline{A})],\\
(d) & 0 = \triangle_2[2(d-1)\Phi_{d-1,1}(Bzz^{d-2}\bar{z}) + 2\Phi_{d-1,1}(z^{d-1}\overline{Bz})].
\end{array}
$$

$(4 \leftrightarrow 3)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_4[(2\Phi_{1,1}(Cz^2\bar{z}) - 4i\Phi_{1,1}(z\triangle_2\overline{A})] = 0,\\
(3) & \triangle_4[4\Phi_{2,1}(Bzz\bar{z}) + 2\Phi_{2,1}(z^2\overline{Bz})] = \triangle_3[(2\Phi_{2,1}(Cz^2z\bar{z}) - 4i\Phi_{2,1}(z^2\triangle_2\overline{A})] = 0,\\
(4) & \triangle_4[6\Phi_{3,1}(Az^2\bar{z}) + 4\Phi_{2,2}(z^2\bar{z}\overline{A})] = \triangle_3[6\Phi_{3,1}(Bzz^2\bar{z}) + 2\Phi_{3,1}(z^3\overline{Bz})],\\
(5) & 0 = \triangle_3[8\Phi_{4,1}(Az^3\bar{z}) + 4\Phi_{3,2}(z^3\bar{z}\overline{A})].
\end{array}
$$

$(5 \leftrightarrow 3)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_5[(2\Phi_{1,1}(Cz^2\bar{z}) - 4i\Phi_{1,1}(z\triangle_2\overline{A})] = 0,\\
(3) & \triangle_5[4\Phi_{2,1}(Bzz\bar{z}) + 2\Phi_{2,1}(z^2\overline{Bz})] = 0,\\
(4) & \triangle_5[6\Phi_{3,1}(Az^2\bar{z}) + 4\Phi_{2,2}(z^2\bar{z}\overline{A})] = \triangle_3[(6\Phi_{3,1}(Cz^2z^2\bar{z}) - 4i\Phi_{3,1}(z^3\triangle_2\overline{A})] = 0,\\
(5) & 0 = \triangle_3[8\Phi_{4,1}(Bzz^3\bar{z}) + 2\Phi_{4,1}(z^4\overline{Bz})],\\
(6) & 0 = \triangle_3[10\Phi_{5,1}(Az^4\bar{z}) + 4\Phi_{4,2}(z^4\bar{z}\overline{A})].\\
\ldots &
\end{array}
$$

$(m \leftrightarrow 3)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_m[(2\Phi_{1,1}(Cz^2\bar z) - 4i\Phi_{1,1}(z\,\triangle_2\,\overline{A})] = 0,\\
(3) & \triangle_m[4\Phi_{2,1}(Bzz\bar z) + 2\Phi_{2,1}(z^2\overline{Bz})] = 0,\\
(4) & \triangle_m[6\Phi_{3,1}(Az^2\bar z) + 4\Phi_{2,2}(z^2\bar z\overline{A})] = 0,\\
\dots & \\
(m-1) & 0 = \triangle_3[2(m-2)\Phi_{m-2,1}(Cz^2z^{m-3}\bar z) - 4i\Phi_{m-2,1}(z^{m-2}\,\triangle_2\,\overline{A})],\\
(m) & 0 = \triangle_3[2(m-1)\Phi_{m-1,1}(Bzz^{m-2}\bar z) + 2\Phi_{m-1,1}(z^{m-1}\overline{Bz})],\\
(m+1) & 0 = \triangle_3[2m\Phi_{m,1}(Az^{m-1}\bar z) + 4\Phi_{m-1,2}(z^{m-1}\bar z\overline{A})].\\
\dots &
\end{array}
$$

$(d \leftrightarrow 3)$

$$
\begin{array}{ll}
(2) & \triangle_d[(2\Phi_{1,1}(Cz^2\bar z) - 4i\Phi_{1,1}(z\,\triangle_2\,\overline{A})] = 0,\\
(3) & \triangle_d[4\Phi_{2,1}(Bzz\bar z) + 2\Phi_{2,1}(z^2\overline{Bz})] = 0,\\
(4) & \triangle_d[6\Phi_{3,1}(Az^2\bar z) + 4\Phi_{2,2}(z^2\bar z\overline{A})] = 0,\\
\dots & \\
(d-1) & 0 = \triangle_3[2(d-2)\Phi_{d-2,1}(Cz^2z^{d-3}\bar z) - 4i\Phi_{d-2,1}(z^{d-2}\,\triangle_2\,\overline{A})],\\
(d) & 0 = \triangle_3[2(d-1)\Phi_{d-1,1}(Bzz^{d-2}\bar z) + 2\Phi_{d-1,1}(z^{d-1}\overline{Bz})].
\end{array}
$$

Пусть $d = 4$, тогда из соотношения $(4 \leftrightarrow 2,3)$ следует, что $A''_{x_2,x_2} = 0$ и $C'_{x_2} = 0$. Из соотношения $(3 \leftrightarrow 2,3)$ следует, что $B'_{x_2} = 0$. Из соотношения $(3 \leftrightarrow 2,2)$ и соотношения $(4 \leftrightarrow 3,4)$ следует, что $B'_{x_3} = 0$. Из соотношения $(4 \leftrightarrow 3,3)$ следует, что $C'_{x_3} = 0$ и $B'_{x_4} = 0$. И наконец, из соотношения $(4 \leftrightarrow 3,2)$ следует, что $C'_{x_4} = 0$. Итак, мы получили, что A линейно зависит от x_2, т.е. $A = A_0 + A_1x_2$, а B и C от x не зависят. Возвращаясь к соотношениям, включающим G, получаем, что G зависит от x не более чем квадратичным образом.

Теперь пусть $d \geq 5$. Рассмотрим соотношение $(3 \leftrightarrow 2,4)$. Можно считать, что базис в пространстве $\mathcal{F}_4$ выбран согласованно с разложением этого пространства по бистепеням, поэтому данное соотношение означает, что $\triangle_2[6\Phi_{3,1}(Az^2\bar z)] = 0$ и $\triangle_2[4\Phi_{2,2}(z^2\bar z\overline{A})] = 0$, откуда следует, что $A'_{x_2} = 0$, т.е. A является константой.

Теперь из $(3 \leftrightarrow 2,3)$ получаем, что $B'_{x_2} = 0$; из $(4 \leftrightarrow 2,3)$ получаем, что $C'_{x_2} = 0$; из $(4 \leftrightarrow 3,3)$ получаем, что $C'_{x_4} = 0$; из $(4 \leftrightarrow 3,3)$ получаем, что $C'_{x_3} = 0$ и $B'_{x_4} = 0$. Далее для $m = 5, \dots, d$ из $(m \leftrightarrow 3,2)$ получаем, что $C'_{x_m} = 0$; из $(m \leftrightarrow 3,3)$ получаем, что $B'_{x_3} = 0$. Таким образом как B, так и C от x не зависят. Возвращаясь к соотношениям, включающим G, получаем, что G зависит от x линейно, точнее, $G_m = q_m + r_mx_{m-1} + s_mx_m + t_mx_{m+1}$. Этим завершается доказательство утверждения A. Собирая информацию о коэффициентах полей, получаем утверждение B. Предложение доказано.

Распространим нашу градуировку на алгебру векторных полей, полагая

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\right] = -1, \quad \left[\frac{\partial}{\partial w_m}\right] = -m, \quad [z] = 1, \quad [w_m] = m.$$

Следствие 17. A. *Если $d \geq 4$, то алгебра $\operatorname{aut} Q$ инфинитезимальных автоморфизмов модельной поверхности степени d является градуированной алгеброй Ли вида*

$$\operatorname{aut} Q = g_{-d} + \ldots + g_{-1} + g_0 + g_1.$$

B. *Если* $d \geq 4$, *то алгебра* $\operatorname{aut} Q$ *распадается в прямую сумму трех подалгебр* $g_- \oplus g_0 \oplus g_1$. *Подалгебра* $g_- = g_{-d} + \ldots + g_{-1}$ *соответствует подгруппе треугольных преобразований, действующей на* Q *транзитивно и описанной в предложении* 14; g_0 *соответствует подгруппе линейных автоморфизмов, описанных в предложении* 15; g_1 — *группе нелинейных автоморфизмов, сохраняющих начало координат неподвижным. При этом* g_- *нильпотентна, а* g_1 *коммутативна.*

C. *Если* $d \geq 5$, *то компоненты алгебры* $\operatorname{aut} Q$ *имеют следующий вид*:

$$\begin{aligned}
g_{-d} &= \left\{2\operatorname{Re}\left[q_d \frac{\partial}{\partial w_d}\right]\right\},\\
&\ldots\\
g_{-2} &= \left\{2\operatorname{Re}\left[q_2 \frac{\partial}{\partial w_2}\right]\right\},\\
g_{-1} &= \Bigg\{2\operatorname{Re}\Bigg[p\frac{\partial}{\partial z} + 2i\Phi_{1,1}(z,\bar p)\frac{\partial}{\partial w_2} + (r_3 w_2 + 2i\Phi_{2,1}(z^2,\bar p))\frac{\partial}{\partial w_3} + \ldots\\
&\qquad \ldots + (r_d w_{d-1} + 2i\Phi_{d-1,1}(z^{d-1},\bar p))\frac{\partial}{\partial w_d}\Bigg]\Bigg\},\\
g_0 &= \left\{2\operatorname{Re}\left[Bz\frac{\partial}{\partial z} + s_2 w_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + \ldots + s_d w_d \frac{\partial}{\partial w_d}\right]\right\},\\
g_1 &= \left\{2\operatorname{Re}\left[C(z,z)\frac{\partial}{\partial z} + t_2 w_3 \frac{\partial}{\partial w_2} + \ldots + t_{d-1} w_d \frac{\partial}{\partial w_{d-1}}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

При $d = 4$ *компоненты* g_{-4}, g_{-3}, g_{-2}, g_{-1}, g_0 *имеют такой же вид, тогда как*

$$\begin{aligned}
g_1 = \Bigg\{2\operatorname{Re}\Bigg[&(C(z,z) + a w_2)\frac{\partial}{\partial z} + (t_2 w_3 + 2i\Phi_{1,1}(z,\bar a w_2))\frac{\partial}{\partial w_2} + \\
&+ (t_3 w_4 + 2i\Phi_{2,1}(z^2,\bar a w_2) + T(z,z))\frac{\partial}{\partial w_3} + 2i\Phi_{3,1}(z^3,\bar a w_2)\frac{\partial}{\partial w_4}\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}$$

где $p \in \mathbb{C}^n$, $q_m \in \mathbb{R}^{k_m}$, *причем эти параметры не связаны какими-либо ограничениями. На остальные параметры наложены те ограничения, которые обеспечивают условие касания.*

Предложение 18. *Пусть* M_0 — *росток вида* (37), *тогда* $\dim \operatorname{Aut} M_0 \leq \dim \operatorname{Aut} Q$.

Доказательство. Данное доказательство вполне аналогично доказательствам соответствующих оценок для квадрики [1] и кубики (предложение 7).

Если Q вырождена, то неравенство становится верным и бессодержательным. Поэтому будем предполагать невырожденность. Мы докажем несколько более общее утверждение, а именно что отображение вида

$$\begin{aligned}
z &\to z + f_2 + \ldots,\\
w_2 &\to w_2 + g_{2,3} + g_{2,4} + \ldots,\\
&\ldots\\
w_d &\to w_d + g_{d,d+1} + g_{d,d+2} + \ldots
\end{aligned} \tag{42}$$

ростка (38) на росток (40) определяется не большим числом параметров, чем автоморфизм соответствующей модельной поверхности.

Записывая в виде соотношения в формальных рядах то, что (42) переводит (38) в (40), и отделяя в m-й координате соотношения компоненты веса $(l+m-1)$, получаем

$$
\begin{aligned}
&(2) \qquad -\frac{1}{2i}(g_{2,l+1}-\bar g_{2,l+1})+\Phi_{1,1}(z\bar f_l)+\Phi_{1,1}(f_l\bar z)=F_{2,l+1}-\widetilde F_{2,l+1}+\dots,\\
&(3) \qquad -\frac{1}{2i}(g_{3,l+2}-\bar g_{3,l+2})+\Phi_{2,1}(z^2\bar f_l)+2\Phi_{2,1}(f_l z\bar z)+2\Phi_{1,2}(z\bar z\bar f_l)+\Phi_{1,2}(f_l\bar z^2)=\\
&\qquad\quad =F_{3,l+2}-\widetilde F_{3,l+2}+\dots,\\
&\dots\\
&(d) \qquad -\frac{1}{2i}(g_{d,l+d-1}-\bar g_{d,l+d-1})+\Phi_{d-1,1}(z^{d-1}\bar f_l)+(d-1)\Phi_{d-1,1}(z^{d-2}f_l\bar z)+\\
&\qquad\quad +2\Phi_{d-2,2}(z^{d-2}\bar z\bar f_l)+\dots+2\Phi_{2,d-2}(zf_l\bar z^{d-2})+(d-1)\Phi_{1,d-1}(z\bar z^{d-2}\bar f_l)+\\
&\qquad\quad +\Phi_{1,d-1}(f_l z^{d-1})=F_{d,l+d-1}-\widetilde F_{d,l+d-1}+\dots,
\end{aligned}
$$

где в левых частях $w_m=x_m+i\Phi_m$, а многоточие в правых частях — это члены, зависящие от f_j, $g_{m,j+m-1}$, $F_{m,j+m-1}$, $\widetilde F_{m,j+m-1}$ при $j<l$. Эти соотношения позволяют последовательно вычислять компоненты отображения $(f_l, g_{m,l+m-1})$, решая алгебраическую систему линейных уравнений, правая часть которой зависит от компонент, вычисленных ранее. Размерность множества решений неоднородной системы не превышает размерности пространства решений однородной. Но однородные уравнения — это уравнения (41), определяющие алгебру автоморфизмов Q. Поэтому число свободных параметров, задающих отображение в классе формальных степенных рядов указанного вида, не превосходит размерности подалгебры $\mathrm{aut}_+ Q$ и соответствующей ей группы. Предложение доказано.

Предложение 19. *Группа голоморфных преобразований невырожденной модельной поверхности* $\mathrm{Aut}\,Q$ *— это подгруппа группы бирациональных преобразований* $\mathbb{C}^{n+K}$, *степени которых не превосходят* $2d(n+K)$.

Доказательство. Приводимое ниже рассуждение вполне аналогично доказательству предложения 8. Рассмотрим произвольный автоморфизм поверхности Q

$$\phi(z,w_2,\dots,w_d)=(Z(z,w_2,\dots,w_d),W_2(z,w_2,\dots,w_d),\dots,W_d(z,w_2,\dots,w_d)),$$

сохраняющий на месте начало координат. Пусть $X=(F,G_2,\dots G_d)$ — инфинитезимальный автоморфизм. Рассмотрим присоединенное действие группы на алгебре $X(p)\to Y(p)=$ $=\phi_*^{-1}X(\phi(p))=(f,g_2,\dots,g_d)$, или

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial Z}{\partial w_d}\\
\frac{\partial W_2}{\partial z} & \frac{\partial W_2}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial W_2}{\partial w_d}\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\frac{\partial W_d}{\partial z} & \frac{\partial W_d}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial W_d}{\partial w_d}
\end{pmatrix}^{-1}
\begin{pmatrix}
F(Z,W_2,\dots,W_d)\\ G_2(Z,W_2,\dots,W_d)\\ \dots\\ G_d(Z,W_2,\dots,W_d)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f(z,w_2,\dots,w_d)\\ g_2(z,w_2,\dots,w_d)\\ \dots\\ g_d(z,w_2,\dots,w_d)
\end{pmatrix}, \qquad (43)
$$

где $f,g_2,\dots,g_d$ — полиномы степени не выше второй. Подставляя в полученное соотношение вместо X векторные поля из $\mathrm{aut}_- Q$, соответствующие векторам стандартного базиса

$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R}^{k_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{k_d}$, получаем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial z} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial Z}{\partial w_d} \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial z} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial W_d}{\partial z} & \dfrac{\partial W_d}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial W_d}{\partial w_d} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2i\Phi_{1,1}(Z^2, E_n) & E_{k_2} & 0 & \ldots & 0 \\ r_3(E_n)W_2 + 2i\Phi_{2,1}(Z^2, E_n) & 0 & E_{k_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_d(E_n)W_{d-1} + 2i\Phi_{d-1,1}(Z^2, E_n) & 0 & 0 & \ldots & E_{k_d} \end{pmatrix} = P,$$

где E_m — единичная матрица размером $m \times m$, а P представляет собой матрицу, элементы которой — это полиномы степени не выше 2. Выражая якобиеву матрицу, получаем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial z} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial Z}{\partial w_d} \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial z} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial W_d}{\partial z} & \dfrac{\partial W_d}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial W_d}{\partial w_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2i\Phi_{1,1}(Z^2, E_n) & E_{k_2} & 0 & \ldots & 0 \\ r_3(E_n)W_2 + 2i\Phi_{2,1}(Z^2, E_n) & 0 & E_{k_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_d(E_n)W_{d-1} + 2i\Phi_{d-1,1}(Z^2, E_n) & 0 & 0 & \ldots & E_{k_d} \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{44}$$

Матрицу P^{-1}, как и остальные матрицы, будем представлять в блочном виде, и пусть R_{ij} — ее (i,j)-й блок. Отметим, что ее элементы являются рациональными функциями.

Группа $\operatorname{Aut} Q$ содержит однопараметрическую подгруппу

$$\{z \to tz,\ w_2 \to t^2 w_2,\ \ldots,\ w_d \to t^d w_d\},$$

которой соответствует поле $(F = z,\ G_2 = 2w_2,\ \ldots,\ G_d = dw_d)$. Подставляя его в (43), получаем

$$\begin{pmatrix} Z \\ 2\,W_2 \\ \cdots \\ d\,W_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial z} & \dfrac{\partial Z}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial Z}{\partial w_d} \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial z} & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial W_2}{\partial w_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial W_d}{\partial z} & \dfrac{\partial W_d}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial W_d}{\partial w_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_d \end{pmatrix}, \tag{45}$$

где $\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_d$ — полиномы не выше второй степени.

Выписывая 1-ю блок-координату (44), получаем рациональность производных Z. Теперь из 1-й координаты (45) получаем рациональность Z. Возвращаясь к 2-й координате (44), получаем рациональность производных W_2, а из 2-й координаты (45) — рациональность W_2. Продолжая это вычисление, получаем рациональность всех координат автоморфизма ϕ. Если при этом следить за степенями, то получаем требуемую оценку на степени $(Z, W_2, \ldots, W_d)$. Предложение доказано.

Оценку степени можно уточнить:

$$\begin{aligned}\deg Z &\le 2(n+K),\\ \deg W_m &\le 2m(n+K), \qquad m=2,\dots,d.\end{aligned}$$

Полученные результаты можно резюмировать в виде следующей теоремы.

Теорема 20. *Для модельной поверхности Q типа (n,K) степени d, где $K_{d-1,n} < K \le \le K_{d,n}$, выполняется следующий список утверждений. (Ср. соответствующие утверждения из введения.)*

3. *Голоморфная эквивалентность модельных поверхностей совпадает с их линейной эквивалентностью (предложение 15).*

4. *Размерность группы ростка вида (37) не превосходит размерности группы касательной модельной поверхности (предложение 16).*

5. *Q однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно (на самом деле транзитивность обеспечивают полиномиально треугольные преобразования степени $d-1$) (предложение 14).*

6. *Группа голоморфных автоморфизмов Q конечномерна тогда и только тогда, когда поверхность не вырождена (определение 12).*

7. *Алгебра Ли голоморфных векторных полей на Q — это некоторая подалгебра алгебры полиномиальных векторных полей ограниченной степени (степени коэффициентов не превосходят 2) (предложение 16).*

8. *Группа голоморфных автоморфизмов Q — это подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+k}$, степени которых (числителей и знаменателей в несократимом представлении) не превосходят $2d(n+K)$ (предложение 19).*

Замечание. Используя простейшие замены, аналогичные тем, что использовались для кубики, нетрудно показать, что любой росток типа (n,K), где $K_3 < K \le K_4$, с невырожденными струями 2-го и 3-го порядков можно записать в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} w_2 &= \Phi_2(z,\bar z) + \text{Члены веса 3 и более},\\ \operatorname{Im} w_3 &= \Phi_3(z,\bar z) + \text{Члены веса 4 и более},\\ \operatorname{Im} w_4 &= \Phi_4(z,\bar z) + \text{Члены веса 5 и более},\end{aligned} \tag{46}$$

что доказывает универсальность данной модели (выполнение требований 1 и 2 основного списка) при $d=4$.

При $d \ge 5$ это уже не так. Причина в том, что доля переменных группы z (комплексная касательная) становится слишком малой в общей совокупности координат пространства. Это приводит к тому, что не удается выбором локальных координат обеспечить правильное касание ростка и нашей модельной поверхности. Выход очевиден: следует расширить класс модельных поверхностей, разрешив некоторую зависимость от переменных группы $x = \operatorname{Re} w$. Это можно сделать, не теряя однородности. Однако узловой пункт нашей программы — это получение критерия конечномерности. Конечномерность на уровне алгебры вместе с полиномиальностью и оценкой степени была получена из анализа линейной системы дифференциальных уравнений. Переход к моделям с зависимостью от x означает, что система перестает быть системой с постоянными коэффициентами и наши вычисления переходят из коммутативной ситуации в некоммутативную. В связи с этим возникает несколько технических препятствий, которые, как можно надеяться, будут в ближайшем будущем преодолены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белошапка В.К.* Конечномерность группы автоморфизмов вещественно аналитической поверхности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, №2. С. 437–442.
2. *Белошапка В.К.* О голоморфных преобразованиях квадрики // Мат. сб. 1991. Т. 182, №2. С. 203–219.
3. *Белошапка В.К.* Кубическая модель вещественного многообразия // Мат. заметки. 2001. Т. 70, №4. С. 503–519.
4. *Beloshapka V.K.* CR-Varieties of the type $(1, 2)$ as varieties of “super-high” codimension // Russ. J. Math. Phys. 1998. V. 5, N 2. P. 399–404.
5. *Паламодов В.П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
6. *Туманов А.Е.* Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. 1988. Т. 52, №3. С. 651–659.
7. *Чирка Е.М.* Введение в геометрию CR-многообразий // УМН. 1991. Т. 46, №1. С. 81–164.
8. *Шананина Е.Н.* Модели CR-многообразий типа $(1, k)$ при $3 \le k \le 7$ и их автоморфизмы // Мат. заметки. 2000. Т. 67, №3. С. 452–459.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1972. Кн. 2. 183 с.
10. *Baouendi M.S., Ebenfelt P., Rothschild L.P.* Local gometric properties of real submanifolds in complex space: Preprint Trita-Mat-1999-20. Stockholm (Sweden): Roy. Inst. Technology, 1999.
11. *Chern S.S., Moser J.K.* Real hypersurfaces in complex manifold // Acta math. 1974. V. 133, N 3–4. P. 219–271.
12. *Ezhov V., Schmalz G.* Infinitezimale Starrheit hermitescher Quadriken in allgemeiner Lage // Math. Nachr. 1999. Bd. 204. S. 41–60.
13. *Naruki I.* Holomorphic extension problem for standart real submanifolds of second kind // Publ. Res. Inst. Math. Kioto Univ. 1970. V. 6, N 1. P. 113–187.
14. *Tanaka N.* On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables // J. Math. Soc. Japan. 1962. V. 14. P. 397–429.
15. *Tanaka N.* Graded Lie algebras and geometric structures // Proc. US–Japan Seminar in Differential Geometry. Tokyo: Nippon Hyoronsha, 1965. P. 147–150.