ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 360, № 4, с. 442–444

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

ГОЛОМОРФНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ОБЩЕГО ТИПА

© 1998 г. **В. К. Белошапка**

Представлено академиком А.Г. Витушкиным 03.04.96 г.

Поступило 16.05.96 г.

В работах автора [1, 2] были построены три серии локальных *CR*-инвариантов *CR*-многообразия $\Gamma(p)$, $\gamma(q)$, $\delta(r)$. Эти инварианты носят локальный характер и определяются по значению формы Леви многообразия, и в силу этого их значение в точке определяется 2-струей многообразия. Каждая из этих серий представляет собой систему вложенных проективных множеств (флаговая конструкция) в проективизации касательного пространства или его подпространств.

На основе этих инвариантных конструкций в ряде ситуаций, т.е. для некоторых значений параметров n и k (размерность комплексной касательной, ее вещественная коразмерность в вещественной касательной), для многообразия общего положения удается построить *CR*-инвариантную систему сечений касательного расслоения, являющихся ее репером над открытым плотным подмножеством многообразия. В работе автора [1] описана процедура построения такого *CR*-инвариантного репера в ситуациях $n = 3$, $k = 3$ и $n = 3$, $k = 4$. В обоих случаях основой для построения репера послужил инвариант $\Gamma(2)$. Причем если во втором случае $\Gamma(2)$ – это инвариантная девятка комплексных прямых в трехмерной комплексной касательной и репер строится почти непосредственно, то в первом $\Gamma(2)$ – это однородная кубическая гиперповерхность в $\mathbf{C}^3$ или, что то же самое, кубическая кривая в $\mathbf{CP}^2$ и построение репера содержит дополнительный шаг – переход к инвариантной системе точек перегиба кубики.

Рассмотренная процедура построения инвариантного репера проходит всякий раз, когда мы имеем достаточно богатый набор инвариантных одномерных направлений в касательном пространстве. В проективизации это выглядит как инвариантное конечное, т.е. нульмерное проективное множество. Такие нульмерные инварианты с достаточным количеством точек весьма часто возникают в составе флаговых конструкций серий Γ, γ и δ (см., например, [1, утверждение 5, п. 6 и 8, а также табл. 6]). Но даже если ни одна из серий не содержит нетривиальных нульмерных инвариантов, их можно получить дополнительными построениями. Например, с каждым из инвариантных проективных многообразий можно связать свою флаговую конструкцию подмногообразий, состоящих из точек уплощения степени не меньше фиксированной. Подмногообразие точек перегиба – это лишь первое в этом ряду.

Определение. Будем называть многообразие M (абстрактное *CR*-многообразие или вещественное подмногообразие комплексного пространства) с параметрами k и n **многообразием общего типа**, если у каждой точки открытого плотного подмножества имеется окрестность, над которой имеется *CR*-инвариантный репер *CR*-структуры, т.е. *CR*-инвариантная система вещественных векторных полей $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{2n+k}\}$, таких, что их значения в каждой точке есть базис касательного пространства, а первые n из них есть комплексный базис комплексной касательной.

При этом будем подразумевать, что если многообразие обладает какой-либо дополнительной структурой, например структурой вещественно-аналитического многообразия, то репер удовлетворяет соответствующим дополнительным требованиям.

Сказанное выше означает, что класс многообразий общего типа весьма широк. Более того, мы полагаем, что справедлива следующая гипотеза.

Гипотеза. *Для любых значений k и n ($n \geq 1$) многообразие общего положения является многообразием общего типа.*

При этом отметим, что описанная техника построения инвариантных полей, связанная с упомянутыми флаговыми конструкциями, удовлетворительно работает лишь там, где $1 \leq k \leq n^2$, т.е. в том диапазоне значений параметров, где эрмитова форма от n переменных со значениями в $\mathbf{R}^k$ общего положения невырождена (см. [3]). Однако вырожденность формы Леви не является препятствием для существования инвариантного базиса, так как его можно строить исходя из свойств струй порядка более высокого, чем два.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Наличие CR-инвариантного базиса сильно упрощает решение вопроса о CR-эквивалентности таких многообразий. Эта задача для случая вещественной гиперповерхности, т.е. для $k = 1$, подробно обсуждалась в известной работе Черна и Мозера 1974 г. [5]. Для ее решения предлагались два разных подхода. Первый, аналитический подход, реализованный Мозером (а до него в $\mathbf{C}^2$ Пуанкаре) основан на том, что с ростком вещественно-аналитической гиперповерхности связывалась специальная голоморфная система координат, в которой уравнение гиперповерхности принимало некоторую особую форму (нормальная форма). Второй, дифференциально-геометрический подход, реализованный Черном (а до него Танакой), осуществлял программу эквивалентности G-структур Э. Картана. Наша цель показать, как эти подходы реализуются для многообразий общего типа.

Дифференциально-геометрический подход применим к многообразиям общего типа тривиальным образом. Инвариантный репер, или, иначе $\{e\}$-структура, являющаяся в программе Э. Картана плодом длительных усилий, дана нам исходно. Сформулируем соответствующее утверждение. Пусть M и $\tilde{M}$ – два многообразия общего типа U и $\tilde{U}$ их подобласти, над которыми имеются инвариантные CR-реперы σ и $\tilde{\sigma}$.

Предложение 1. *$M \cap U$ CR-эквивалентно $\tilde{M} \cap \tilde{U}$ тогда и только тогда, когда существует диффеоморфизм φ: $M \cap U \mapsto \tilde{M} \cap \tilde{U}$, переводящий σ в $\tilde{\sigma}$, т.е. $\varphi^*(\sigma) = \tilde{\sigma}$.*

Однако в некотором смысле такой ответ на вопрос об эквивалентности не является вполне удовлетворительным и удобным. Вопрос сводится к вопросу о разрешимости некоторой линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Переходя к аналитическому подходу отметим, что в работе автора [4] мозеровская конструкция применялась к анализу ситуации $k \geq 1$. При этом, однако, вопрос был решен лишь в классе формально голомофоных замен. Есть работы [6, 7], где строится нормализация сходящимися рядами, но в них рассмотрены лишь частные случаи ($n = k = 2$). Реализуем данный подход для многообразия общего типа.

Пусть M – вещественно-аналитическая поверхность в $\mathbf{C}^N$, $\xi \in M$, $\dim_C T_\xi^C M = n$, $\operatorname{codim}_R T_\xi M = k$, $N = n + k$ и уравнение M в окрестности ξ в некоторых координатах $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_k) = u + iv$ записано в виде $v = F(z, \bar{z}, u)$, где F: $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^k \mapsto \mathbf{R}^k$ – вещественно-аналитическое отображение, причем F и dF равны нулю в начале координат. При этом $T_0M = \{v = 0\}$, $T_0^{\mathrm{C}} M = \{w = 0\}$. Компонента тейлоровского разложения F степени 1 по z, 1 по $\bar{z}$ и 0 по u – это форма Леви M в точке ξ. Пусть эта форма сильно невырождена, т.е. из ее координатных форм можно составить невырожденную в скалярном смысле линейную комбинацию. В таком случае можно после линейной замены по w считать, что невырожденной является первая координата формы. Фиксируем на M k-мерную вещественно-аналитическую поверхность χ, проходящую через начало, трансверсальную $T_0^{\mathrm{C}} M$ вместе с некоторой ее аналитической параметризацией $\chi(t)$, а также семейство векторов $e(t) = (e_1(t), \ldots, e_n(t))$, так что для любого малого t эта система является базисом $T_{\chi(t)}^{\mathrm{C}} M$. В [4] было доказано следующее утверждение.

Лемма. *Пусть первая координата формы Леви M в точке ξ невырождена. Тогда существует единственная, голоморфная в окрестности нуля замена координат, такая, что $\xi \mapsto (0, 0)$, $\chi \mapsto \{z = 0, v = 0\}$, $t \mapsto u$, $e_j(t) \mapsto \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, такая, что уравнение M принимает вид $v = \sum F_{pq}(z, \bar{z}, u)$, где $F_{pq} = (F_{pq}^{(1)}, \ldots, F_{pq}^{(k)})$ – это компонента разложения F степени p по z и q по $\bar{z}$, причем $F_{p0} = 0$ $(p = 0, 1, \ldots)$; $F_{p1}^{(1)} = 0$, $p = 2, 3, \ldots$*

Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2n+k}$ – инвариантный CR-репер, тогда $\sigma_{2n+1}(\xi), \ldots, \sigma_{2n+k}(\xi)$ трансверсальны $T_\xi^C M$. Инвариантную поверхность χ построим так. Пусть $\chi_1(t_1)$ – это интегральная кривая поля σ_{2n+1}, проходящая через нуль, и t_1 – ее параметр; $\chi_2(t_1, t_2)$ – интегральная кривая поля σ_{2n+2}, проходящая при $t_2 = 0$ через точку $\chi_1(t_1)$, и т.д. до σ_{2n+k}. Положим $\chi(t) = \chi_k(t_1, \ldots, t_k)$, которая в силу аналитичности полей является вещественно аналитической поверхностью, инвариантно связанной с M, как и параметр t. В качестве системы векторов $e(t)$ следует взять $\sigma_1(\chi(t)), \ldots, \sigma_n(\chi(t))$. Уравнение M, построенное в соответствии с леммой при таком выборе начальных данных $\{\chi, t, e\}$, будем называть нормальной формой уравнения M, согласованной с CR-репером σ. Резюмируем.

Предложение 2. *Пусть M_ξ – росток вещественно-аналитического многообразия, причем в окрестности ξ имеется инвариантный CR-репер и форма Леви многообразия M в точке ξ сильно невырождена. Тогда в окрестности ξ существует единственная голоморфная замена координат, приводящая уравнение M к нормальной форме, согласованной с репером.*

Отметим, что из наличия инвариантной системы координат следует, в свою очередь, локальное существование инвариантного репера.

Располагая инвариантной нормальной формой, получаем полное решение задачи биголоморфной классификации ростков многообразий.

Предложение 3. *Пусть M и $\tilde{M}$ – два вещественно-аналитических многообразия, обладающих в окрестности точек $\xi \in M$ и $\tilde{\xi} \in \tilde{M}$ инвариантными CR-реперами и $v = \langle z, \bar{z} \rangle + N(z, \bar{z}, u)$, $v = \langle z, \bar{z} \rangle + \tilde{N}(z, \bar{z}, u)$ – согласованные с ними нормальные формы. Тогда ростки M_ξ и $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$ биголоморфно эквивалентны в том и только том случае, когда $N = \tilde{N}$.*

Таким образом, последовательность коэффициентов нормальной формы – это полный набор биголоморфных инвариантов ростка многообразия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 096-01-01002). Работа была начата во время пребывания в Германии.

Автор благодарен проф. А. Хакклберри за предоставленную возможность работы в Рурском университете (г. Бохум, Рейн-Вестфалия).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белошапка В.К.* // Мат. заметки. 1994. Т. 55. В. 5. С. 3–12.
2. *Белошапка В.К.* // Там же. 1996. Т. 59. № 1. С. 42–52.
3. *Белошапка В.К.* // Изв. АН СССР. 1988. Т. 52. № 2. С. 437–442.
4. *Белошапка В.К.* // Мат. заметки 1990. Т. 48. В. 2. С. 3–9.
5. *Chern S.S., Moser J.K.* // Acta Math. 1974. V. 133. № 3/4. P. 219–271.
6. *Лобода А.В.* // Изв. АН СССР. Т. 52. № 5. С. 970–990.
7. *Ezhov V., Schmalz G.* Normal Form and 2-Dimentional Chains of an Elliptic *CR*-Surfaces in $\mathbf{C}^2$. *Prepr. Max-Planck-Inst. Math. Bonn*, 1993.